Exercices corrigés d'algèbre linéaire 2
Réduction des endomorphismes

1. Réductions concrètes.

2. Réductions abstraites.

3. Suites récurrentes linéaires.

4. Polynômes d'endomorphismes.

5. Diagonalisation.

6. Endomorphismes nilpotents.

7. Trigonalisation et jordanisation.

8. Exponentielles de matrices.

9. Topologie matricielle.

10. Réduction simultanée.

11. Dimension infinie.

12. Farrago final.

Le chapitre sur la réduction des endomorphismes est la clé de voûte de l'algèbre linéaire en taupe. La maîtrise des techniques et des concepts demande un gros investissement intellectuel, car ce chapitre est la synthèse de plusieurs chapitres antérieurs, et est lié au cours d'analyse.

Les exercices sont ici groupés par familles, et disposés de manière à peu près progressive. Les exercices des § 1, 2 et 5 s'adressent à tous, ceux des § 8, 9, 10 s'adressent aux candidats aux grands concours. Prière de ne pas diffuser ce document sur la toile.

Ces pages sont dédiées à un ancien élève de cette classe, Franck Bettendorff (M' 1992-1993), qui, loin de toute forme de technicité, de pouvoir et de compétition, est devenu professeur des écoles de l'enseignement catholique du diocèse de Saint-Étienne, et travaille depuis onze ans à la scolarisation des enfants et des jeunes du voyage. Membre de l'ASET (Association pour la scolarisation des enfants tsiganes et autres jeunes en difficulté), Franck a été pendant 10 ans l'instituteur des camions scolaires nomades de l'ARIV. Si jamais ces lignes tombent sous ses yeux, qu'il sache que son vieux maître est fier de lui.

Pierre-Jean Hormière

1. Réductions concrètes.

La réduction des matrices de petites tailles peut se faire selon un protocole simple :
• Calculer le polynôme caractéristique, déterminer ses racines, qui sont les valeurs propres.
• Déterminer, pour chaque valeur propre, l'espace propre associé.
• Si la matrice est diagonalisable, tout est dit.
• Sinon, chercher les espaces caractéristiques, trouver dans chacun d'eux une base « trigonalisante », et obtenir la forme trigonale supérieure réduite et la décomposition additive dite « de Dunford ».
• Pour obtenir une réduction de Jordan, il faut plus de soin, mais en dim. 2 et 3, cela reste facile.
Les réductions sont conduites avec Maple, mais suivent pas à pas les calculs manuels.

Exercice 1 : 1) Réduire A = $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Quel est son polynôme minimal ?

2) Calculer A^n par deux méthodes ; calculer exp(xA) par deux méthodes.

3) A quelle condition sur X_0 la suite récurrente $X_{k+1} = A.X_k$ est-elle bornée ?

4) Chercher C(A) = { M ∈ $M_3(\mathbf{R})$; M.A = A.M }.

5) Résoudre l'équation $M^2 = A$ dans $M_3(\mathbf{R})$.

6) Quels sont les sous-espaces A-stables de $\mathbf{R}^3$?

Solution : **1) Polynômes caractéristique, minimal, spectre, diagonalisation**.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[5,-3,2,6,-4,4,4,-4,5]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> c:=factor(charpoly(A,x));m:=factor(minpoly(A,x));
sp:=eigenvals(A);vect:=eigenvects(A);
```

$$c := (x-1)(x-2)(x-3)$$
$$m := (x-1)(x-2)(x-3)$$
$$sp := 1, 2, 3$$
$$vect := [2, 1, \{[1, 1, 0]\}], [3, 1, \{[1, 2, 2]\}], [1, 1, \{[1, 2, 1]\}]$$

```
> for i in sp do k[i]:=kernel(A-i);od;
```

$$k_1 := \{[1, 2, 1]\} \qquad k_2 := \{[1, 1, 0]\} \qquad k_3 := \{[1, 2, 2]\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k[1]),op(k[2]),op(k[3])]));
Diag:=multiply(inverse(P),A,P);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad Diag := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Calcul des puissances de A, par deux méthodes, l'une géométrique, l'autre polynomiale.

```
> multiply(P,diag(1,2^n,3^n),inverse(P));
```

$$\begin{bmatrix} -2+2\,2^n+3^n & 2-2^n-3^n & -1+3^n \\ -4+2\,2^n+2\,3^n & 4-2^n-2\,3^n & -2+2\,3^n \\ -2+2\,3^n & 2-2\,3^n & -1+2\,3^n \end{bmatrix}$$

```
> L:=interp([1,2,3],[1,2^n,3^n],x);evalm(subs(x=A,L));
```

$$L := \left(\frac{1}{2}3^n - 2^n + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{5}{2} + 4\,2^n - \frac{3}{2}3^n\right)x + 3 - 3\,2^n + 3^n$$

$$\begin{bmatrix} -2+2\,2^n+3^n & 2-2^n-3^n & -1+3^n \\ -4+2\,2^n+2\,3^n & 4-2^n-2\,3^n & -2+2\,3^n \\ -2+2\,3^n & 2-2\,3^n & -1+2\,3^n \end{bmatrix}$$

La seconde méthode, purement algébrique, repose sur le théorème de Hamilton-Cayley : nous savons que A annule son polynôme caractéristique. Si on fait la division euclidienne

$X^n = \chi_A(X).Q(X) + R(X)$, où deg R < 3, alors après substitution $A^n = R(A)$.

Autrement dit A^n est une combinaison linéaire de I, A et A^2.

Or R n'est autre que le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que R(1) = 1, R(2) = 2^n, R(3) = 3^n.

3) <u>A quelle condition sur</u> X_0 <u>la suite récurrente</u> $X_{k+1} = A.X_k$ <u>est-elle bornée</u> ?

Mieux vaut travailler dans le repère propre !

La suite Y_{k+1} = diag(1, 2, 3).Y_k est donnée par Y_k = diag(1, 2^k, 3^k).Y_0.

Elle est bornée ssi Y_0 est de la forme (u_0, 0, 0), i.e. ssi X_0 est colinéaire au vecteur propre (1, 2, 1).

4) <u>Calcul de l'exponentielle de Ax, par réduction, par méthode polynomiale, par procédure</u>.

```
> multiply(P,diag(exp(x),exp(2*x),exp(3*x)),inverse(P));
```

$$\begin{bmatrix} -2\,e^x+2\,e^{(2x)}+e^{(3x)} & 2\,e^x-e^{(2x)}-e^{(3x)} & -e^x+e^{(3x)} \\ -4\,e^x+2\,e^{(2x)}+2\,e^{(3x)} & 4\,e^x-e^{(2x)}-2\,e^{(3x)} & -2\,e^x+2\,e^{(3x)} \\ -2\,e^x+2\,e^{(3x)} & 2\,e^x-2\,e^{(3x)} & -e^x+2\,e^{(3x)} \end{bmatrix}$$

```
> Lexp:=interp([1,2,3],[exp(x),exp(2*x),exp(3*x)],t);evalm(subs(t=A,Lexp));
exponential(A,x);
```

$$Lexp := \left(\frac{1}{2}e^{(3x)} - e^{(2x)} + \frac{1}{2}e^x\right)t^2 + \left(-\frac{5}{2}e^x + 4\,e^{(2x)} - \frac{3}{2}e^{(3x)}\right)t + 3\,e^x - 3\,e^{(2x)} + e^{(3x)}$$

$$\begin{bmatrix} -2\,e^x+2\,e^{(2x)}+e^{(3x)} & 2\,e^x-e^{(2x)}-e^{(3x)} & -e^x+e^{(3x)} \\ -4\,e^x+2\,e^{(2x)}+2\,e^{(3x)} & 4\,e^x-e^{(2x)}-2\,e^{(3x)} & -2\,e^x+2\,e^{(3x)} \\ -2\,e^x+2\,e^{(3x)} & 2\,e^x-2\,e^{(3x)} & -e^x+2\,e^{(3x)} \end{bmatrix}$$

5) <u>Calcul du commutant de A</u> :

Un calcul direct montre que les matrices qui commutent à diag(1, 2, 3) sont les matrices diagonales.

Du coup, les matrices qui commutent à A sont les matrices de la forme P.diag(p, q, r,).P^{-1}. Elles forment une sous-algèbre commutative de dimension 3 de $M_3(\mathbf{C})$, dont une base est :

$$P.diag(1, 0, 0).P^{-1} \quad , \quad P.diag(0, 1, 0).P^{-1} \quad , \quad P.diag(0, 0, 1).P^{-1} .$$

```
> C:=multiply(P,diag(p,q,r),inverse(P));
```

$$C := \begin{bmatrix} -2\,p+2\,q+r & 2\,p-q-r & -p+r \\ -4\,p+2\,q+2\,r & 4\,p-q-2\,r & -2\,p+2\,r \\ -2\,p+2\,r & 2\,p-2\,r & -p+2\,r \end{bmatrix}$$

6) **<u>Recherche des sous-espaces stables</u>**. Ils sont de dimension 0, 1, 2 ou 3.

Dimension 0 : {0} ; dimension 3 : $\mathbf{R}^3$; dimension 1 : les trois droites propres.

Restent les plans A-stables ; ils correspondent aux vecteurs propres de ${}^tA$.

En effet soit P un plan A-stable, d'équation $ax + by + cz = 0$, où $(a, b, c) \neq 0$

$$[\ a\ b\ c\ ] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ [\ a\ b\ c\ ]\ A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

En vertu du premier résultat de dualité, la forme linéaire [a b c] A est proportionnelle à [a b c] .

Cela revient à dire que $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

On trouve 3 plans stables, sommes directes de deux espaces propres.

```
> B:=transpose(A);
```

$$B := \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> for i in sp do kernel(B-i);od;
```

$$\{[2, -2, 1]\}$$
$$\{[-2, 1, 0]\}$$
$$\{[1, -1, 1]\}$$

Le plan d'équation $2x - 2y + z = 0$ est la somme directe $\mathrm{Ker}(A - 2I) \oplus \mathrm{Ker}(A - 3I)$.
Le plan d'équation $-2x + y = 0$ est la somme directe $\mathrm{Ker}(A - I) \oplus \mathrm{Ker}(A - 3I)$.
Le plan d'équation $x - y + z = 0$ est la somme directe $\mathrm{Ker}(A - I) \oplus \mathrm{Ker}(A - 2I)$.

7) <u>Réduction de Jordan préprogrammée, réduction de Frobenius</u>.(hors programme)

```
> J:=jordan(A,Q);print(Q);
```

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> u:=vector([3,5,3]);v:=multiply(A,u);w:=multiply(A,v);
U:=transpose(matrix([u,v,w]));F:=multiply(inverse(U),A,U);
F:=frobenius(A,V);print(V);
#réduction à la forme de Frobenius (décomposition monogène);
```

$$u := [3, 5, 3] \qquad v := [6, 10, 7] \qquad w := [14, 24, 19]$$

$$U := \begin{bmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 5 & 10 & 24 \\ 3 & 7 & 19 \end{bmatrix} \qquad F := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 6 & 22 \\ 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 2</u> : 1) Réduire $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

2) On considère les suites $X_n = {}^t(x_n, y_n, z_n)$ définie par $X_{n+1} = A.X_n$. Montrer que ces suites sont bornées quels que soient x_0, y_0, z_0.

<u>Solution</u> :
$\mathrm{Sp}A = \{ 1, i, -i \}$. Donc A est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{C})$, mais non dans $M_3(\mathbf{R})$.
Point n'est besoin de chercher les vecteurs propres pour en déduire que $A^4 = I$.
Du coup, toutes les suites (X_n) sont 4-périodiques, donc bornées.

<u>Exercice 3</u> : 1) Réduire $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Quel est son polynôme minimal ?

2) Calculer A^n ; 3) Chercher $C(A) = \{ M \in M_3(\mathbf{R})\ ;\ M.A = A.M \}$.
4) Résoudre l'équation $M^2 = A$ dans $M_3(\mathbf{R})$.
5) Quels sont les sous-espaces A-stables de $\mathbf{R}^3$?
6) Reconnaître la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Montrer que A conserve cette surface.

<u>Solution</u> : Menons les calculs avec Maple.

```
> with(linalg):A:=matrix(3,3,[1,2,2,2,1,2,-2,-2,-3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> c:=factor(charpoly(A,x));m:=factor(minpoly(A,x));
```

$$c := (x-1)(1+x)^2$$
$$m := (x-1)(1+x)$$

```
> k1:=kernel(A-1);k2:=kernel(A+1);
```

$$k1 := \{[-1, -1, 1]\}$$
$$k2 := \{[-1, 1, 0], [-1, 0, 1]\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k1),op(k2)]));R:=multiply(inverse(P),A,P);
```

$$P := \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Concluons ! A est diagonalisable. Mieux, c'est une symétrie par rapport à un plan parallèlement à une droite. Du coup, $A^n = I$ ou A selon que n est pair ou impair.

Commutant de A.

Un calcul direct montre que les matrices qui commutent à R sont les matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{bmatrix}$.

Cela peut aussi se justifier par un argument théorique.

Par suite, le commutant de A est formé des matrices de la forme $P.\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & r & s \end{bmatrix}.P^{-1}$.

C'est une sous-algèbre de dimension 5 de $M_3(\mathbf{R})$.

```
> C:=multiply(P,matrix(3,3,[a,0,0,0,p,q,0,r,s]),inverse(P));
```

$$C := \begin{bmatrix} a+p+r-q-s & a-q-s & a+p+r-2q-2s \\ a-p+q & a+q & a-p+2q \\ -a-r+s & -a+s & -a-r+2s \end{bmatrix}$$

```
> exponential(A,x);
```

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^x & \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{(-x)} & \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{(-x)} \\ \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{(-x)} & \mathbf{e}^x & \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{(-x)} \\ -\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)} & -\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{(-x)} & 2\,\mathbf{e}^{(-x)} - \mathbf{e}^x \end{bmatrix}$$

Remarque : La matrice A conserve la forme quadratique $q(X) = x^2 + y^2 - z^2$, donc le cône de révolution d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; voir mon étude sur les triplets pythagoriciens.

Exercice 4 : 1) Réduire $A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$. Quel est son polynôme minimal ?

2) Quelle est la décomposition de Dunford de A ?

3) Calculer A^n par deux méthodes ;

4) Chercher $C(A) = \{ M \in M_3(\mathbf{R}) ; M.A = A.M \}$.

5) Résoudre l'équation $M^2 = A$ dans $M_3(\mathbf{R})$.

6) Quels sont les sous-espaces A-stables de $\mathbf{R}^3$?

Solution :

```
> A:=matrix(3,3,[6,-6,5,-4,-1,10,7,-6,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> c:=factor(charpoly(A,x));m:=factor(minpoly(A,x));
```

$$c := (x+1)(x-5)^2$$

$$m := (x+1)(x-5)^2$$

```
> e1:=kernel(A+1);e5:=kernel(A-5);f5:=kernel((A-5)^2);
```

$$e1 := \left\{ \left[\frac{5}{2}, \frac{15}{4}, 1 \right] \right\}$$

$$e5 := \{ [1, 1, 1] \}$$

$$f5 := \{ [1, 0, 1], [0, 1, 0] \}$$

La matrice A n'est pas diagonalisable, pour deux raisons :

- L'espace propre associé à la valeur propre 5 est de dimension 1 ;
- Le polynôme minimal est scindé mais a une racine double.

Nous ne disposons que de deux vecteurs propres libres. Deux options s'offrent à nous :

- Compléter ces deux vecteurs en une base n'importe comment : c'est la trigonalisation du pauvre.
- Déterminer le sous-espace caractéristique $F_5 = \mathrm{Ker}(A - 5I)^2$ associé à la valeur propre 5, et compléter le vecteur propre (1, 1, 1) en une base de F_5 : c'est la trigonalisation du riche.

Cette méthode est supérieure à la précédente, car elle conduit à une diagonalisation par blocs trigonaux, à la décomposition additive dite « de Dunford », et au calcul de A^n via le binôme.

```
> P:=transpose(matrix([scalarmul(op(e1),4),op(e5),op(2,f5)]));
```

$$P := \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> T:=multiply(inverse(P),A,P);
```

$$T := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> #décomposition de Dunford A = D + N
> Diag:=multiply(P,diag(-1,5,5),inverse(P));Nilp:=multiply(P,T-diag(-
1,5,5),inverse(P));
```

$$Diag := \begin{bmatrix} -5 & 0 & 10 \\ -15 & 5 & 15 \\ -4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad Nilp := \begin{bmatrix} 11 & -6 & -5 \\ 11 & -6 & -5 \\ 11 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> #calcul de A^n;
> Tn:=diag((-1)^n,matrix(2,2,[5^n,n*6*5^(n-1),0,5^n]));
multiply(P,Tn,inverse(P));
```

$$Tn := \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 6\,n\,5^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 5^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}5^n - 11\,n\,5^{(n-1)} & 6\,n\,5^{(n-1)} & -\frac{5}{3}(-1)^n + \frac{5}{3}5^n + 5\,n\,5^{(n-1)} \\ \frac{5}{2}(-1)^n - \frac{5}{2}5^n - 11\,n\,5^{(n-1)} & 6\,n\,5^{(n-1)} + 5^n & -\frac{5}{2}(-1)^n + \frac{5}{2}5^n + 5\,n\,5^{(n-1)} \\ \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}5^n - 11\,n\,5^{(n-1)} & 6\,n\,5^{(n-1)} & -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{5}{3}5^n + 5\,n\,5^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

```
> #commutant de A;
> C:=diag(a,matrix(2,2,[p,q,0,p]));multiply(P,C,inverse(P));
```

$$C := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3}a - \frac{2}{3}p - \frac{11}{6}q & q & -\frac{5}{3}a + \frac{5}{3}p + \frac{5}{6}q \\ \frac{5}{2}a - \frac{5}{2}p - \frac{11}{6}q & q+p & -\frac{5}{2}a + \frac{5}{2}p + \frac{5}{6}q \\ \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}p - \frac{11}{6}q & q & -\frac{2}{3}a + \frac{5}{3}p + \frac{5}{6}q \end{bmatrix}$$

Le calcul montre que les matrices qui commutent à T = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ sont de la forme $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$.

Les matrices qui commutent à A sont donc les matrices P. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$.$P^{-1}$. Elles forment une sous-algèbre de dimension 3 de $M_3(\mathbf{R})$. Les racines carrées de A sont à chercher dans cette sous-algèbre.

```
> #racines carrées de A;
> evalm(C^2);
```

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & 2\,p\,q \\ 0 & 0 & p^2 \end{bmatrix}$$

```
> Rt:=diag(epsilon1*I,matrix(2,2,[epsilon2*sqrt(5),epsilon2*3/sqrt(5),0,
epsilon2(sqrt(5))]));
```

$$Rt := \begin{bmatrix} I\,\varepsilon 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon 2\,\sqrt{5} & \frac{3}{5}\varepsilon 2\,\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \varepsilon 2(\sqrt{5}) \end{bmatrix}$$

```
> multiply(P,Rt,inverse(P));
```

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3}I\,\varepsilon 1 - \frac{53}{30}\varepsilon 2\,\sqrt{5} & \frac{3}{5}\varepsilon 2\,\sqrt{5} & -\frac{5}{3}I\,\varepsilon 1 + \frac{13}{6}\varepsilon 2\,\sqrt{5} \\ \frac{5}{2}I\,\varepsilon 1 - \frac{53}{30}\varepsilon 2\,\sqrt{5} - \frac{11}{6}\varepsilon 2(\sqrt{5}) & \frac{3}{5}\varepsilon 2\,\sqrt{5} + \varepsilon 2(\sqrt{5}) & -\frac{5}{2}I\,\varepsilon 1 + \frac{13}{6}\varepsilon 2\,\sqrt{5} + \frac{5}{6}\varepsilon 2(\sqrt{5}) \\ \frac{2}{3}I\,\varepsilon 1 - \frac{53}{30}\varepsilon 2\,\sqrt{5} & \frac{3}{5}\varepsilon 2\,\sqrt{5} & -\frac{2}{3}I\,\varepsilon 1 + \frac{13}{6}\varepsilon 2\,\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

On peut calculer A^n sans réduction par une méthode purement algébrique : la division euclidienne de X^n par le polynôme $(X + 1)(X + 5)^2$. Pour obtenir le reste euclidien, on fait X = – 1, puis X = 5, et enfin on dérive et on fait X = 5.

```
> #calcul de A^n par méthode polynomiale
> R:=alpha*x^2+beta*x+delta;
```

$$R := \alpha\,x^2 + \beta\,x + \delta$$

```
> solve({subs(x=-1,R)=(-1)^n,subs(x=5,R)=5^n,subs(x=5,diff(R,x))=n*5^(n-
1)},{alpha,beta,delta}):
> assign(%);evalm(subs(x=A,R));
```

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}5^n + 11\,n\,5^{(n-1)} & -6\,n\,5^{(n-1)} & -\frac{5}{3}(-1)^n + \frac{5}{3}5^n - 5\,n\,5^{(n-1)} \\ \frac{5}{2}(-1)^n - \frac{5}{2}5^n + 11\,n\,5^{(n-1)} & 5^n - 6\,n\,5^{(n-1)} & -\frac{5}{2}(-1)^n + \frac{5}{2}5^n - 5\,n\,5^{(n-1)} \\ \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}5^n + 11\,n\,5^{(n-1)} & -6\,n\,5^{(n-1)} & -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{5}{3}5^n - 5\,n\,5^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

```
> #recherche des plans stables;
> B:=transpose(A);kernel(B+1);kernel(B-5);
```

$$B := \begin{bmatrix} 6 & -4 & 7 \\ -6 & -1 & -6 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{[-1, 0, 1]\} \quad \left\{\left[\frac{-11}{5}, \frac{6}{5}, 1\right]\right\}$$

Les plans stables correspondent aux vecteurs propres de ${}^tA$.
Ils sont au nombre de 2 : le plan d'équation $-x + z = 0$ et le plan d'équation $-11x + 6y + 5z = 0$.
On constate que le premier est $\mathrm{Ker}(A - 5I)^2$ et le second $\mathrm{Ker}(A - I) \oplus \mathrm{Ker}(A - 5I)$.
Enfin, l'égalité des polynômes caractéristique et du minimal implique que A est monogène.

<u>Exercice 5</u> : Réduire $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

<u>Solution</u> :

```
> A:=matrix(3,3,[1,-3,3,-2,-6,13,-1,-4,8]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> c:=factor(charpoly(A,x));m:=factor(minpoly(A,x));
```

$$c := (x-1)^3$$

$$m := (x-1)^3$$

Ici on peut déjà affirmer que A n'est pas diagonalisable. En effet, si elle l'était, elle serait semblable à I, donc égale à I. Or ce n'est pas le cas. Pour trouver une base de trigonalisation, on détermine $\mathrm{Ker}(A - I)$ et $\mathrm{Ker}(A - I)^2$, et on complète progressivement.

```
> k1:=kernel(A-1);k2:=kernel((A-1)^2);
```

$$k1 := \{[3, 1, 1]\}$$

$$k2 := \{[-3, 1, 0], [6, 0, 1]\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k1),op(1,k2),array([1,0,0])]));
```

$$P := \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> T:=multiply(inverse(P),A,P);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> #réduction de Jordan;
> e3:=array([1,0,0]);e2:=multiply(A-1,e3);e1:=multiply(A-1,e2);
```

$$e3 := [1, 0, 0]$$

$$e2 := [0, -2, -1]$$

$$e1 := [3, 1, 1]$$

```
> Q:=transpose(matrix([e1,e2,e3]));J:=multiply(inverse(Q),A,Q);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> #calcul de A^n
> N:=evalm(T-1);Tn:=map(expand,evalm(1+n*N+n*(n-1)/2*N^2));
multiply(P,Tn,inverse(P));
```

$$N := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Tn := \begin{bmatrix} 1 & -n & -\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}n^2 + 1 & -\frac{15}{2}n + \frac{9}{2}n^2 & 12\,n - 9\,n^2 \\ -\frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & 1 - \frac{17}{2}n + \frac{3}{2}n^2 & 16\,n - 3\,n^2 \\ -\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2 & -\frac{11}{2}n + \frac{3}{2}n^2 & 1 + 10\,n - 3\,n^2 \end{bmatrix}$$

Ici encore, les racines carrées de A sont à chercher parmi les matrices qui commutent avec A, lesquelles forment une algèbre de dimension 3.

```
> #racines carrées de A
> C:=(p,q,r)->matrix(3,3,[p,q,r,0,p,q,0,0,p]);evalm(C(p,q,r)^2);
```

$$C := (p, q, r) \to \mathrm{matrix}(3, 3, [p, q, r, 0, p, q, 0, 0, p])$$

$$\begin{bmatrix} p^2 & 2\,p\,q & 2\,p\,r + q^2 \\ 0 & p^2 & 2\,p\,q \\ 0 & 0 & p^2 \end{bmatrix}$$

```
> solve({p^2=1,2*p*q=-1,2*p*r+q^2=-1});
```

$$\{r = \frac{-5}{8}, p = 1, q = \frac{-1}{2}\}, \{r = \frac{5}{8}, p = -1, q = \frac{1}{2}\}$$

```
> multiply(P,C(1,-1/2,-5/8),inverse(P));evalm(%^2);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{-21}{8} & \frac{15}{4} \\ \frac{-9}{8} & \frac{-23}{8} & \frac{29}{4} \\ \frac{-5}{8} & \frac{-19}{8} & \frac{21}{4} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 : Décomposition de Dunford de A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ∈ $M_3(\mathbf{C})$. [Ecrit Mines MP 2011]

Solution :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[3,-1,1,2,0,1,1,-1,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> c:=factor(charpoly(A,x));
```

$$c := (x-1)\,(x-2)^2$$

```
> k1:=kernel(A-1);k2:=kernel(A-2);c2:=kernel((A-2)^2);
```

$$k1 := \{[0, 1, 1]\}$$
$$k2 := \{[1, 1, 0]\}$$
$$c2 := \{[0, 0, 1], [1, 1, 0]\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k1),op(k2),op(1,c2)]));
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> T:=multiply(inverse(P),A,P);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> CD:=multiply(P,diag(1,2,2),inverse(P));CN:=evalm(A-CD);
```

$$CD := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad CN := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> gcdex(x-1,(x-2)^2,x,'s','t');s;t;p:=(3-x)*(x-1);q:=(x-2)^2;
```

$$1 \qquad 3-x \qquad 1 \qquad p := (x-1)(3-x) \qquad q := (x-2)^2$$

```
> P:=evalm(subs(x=A,p));Q:=evalm(subs(x=A,q));expand(2*p+q);evalm(2*P+Q);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad 4x - x^2 - 2 \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

C’est surtout sur des matrices de grande taille, convenablement choisies, que l’on peut voir l’intérêt des théorèmes de réduction.

Exercice 7 : Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Forme trigonale supérieure réduite de A. Décomposition de Dunford. Réduction de Jordan.

Solution : [Queysanne, Algèbre n° 487 p. 509, Chambadal-Ovaert Algèbre 2 n° 40 p. 487.]

```
> with(linalg):
> A:=matrix(5,5,[1,1,-1,2,-1,2,0,1,-4,-1,0,1,1,1,1,0,1,2,0,1,0,0,-3,3,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> c:=factor(charpoly(A,x));m:=factor(minpoly(A,x));
```

$$c := (x+1)^2 (x-1)^3$$
$$m := (x+1)^2 (x-1)^3$$

On peut déjà dire que A n’est pas diagonalisable. Ce que confirme la recherche des espaces propres.

```
> k1:=kernel(A-1);k2:=kernel((A-1)^2);k3:= [op(kernel((A-1)^3))];
```

$$k1 := \{[1, -1, 1, 1, 0]\}$$
$$k2 := \{[0, 1, 0, 0, 0], [1, 0, 1, 1, 0]\}$$

$$k3 := [[1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1, 0]]$$

```
> K1:=kernel(A+1);K2:=[op(kernel((A+1)^2))];
```

$$K1 := \{[1, -1, 0, 0, 1]\}$$

$$K2 := [[1, -1, 0, 1, 0], [1, -1, 0, 0, 1]]$$

Si l'on recolle des bases des sous-espaces caractéristiques, on diagonalise A par blocs :

```
> Q:=transpose(matrix([op(k3),op(K2)]));multiply(inverse(Q),A,Q);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Si on fabrique des bases des espaces caractéristiques par complétions successives, on obtient une <u>forme trigonale supérieure réduite</u> :

```
> P:=transpose(matrix([op(k1),op(1,k2),op(3,k3),op(K1),op(1,K2)]));
det(P);R:=multiply(inverse(P),A,P);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad -1 \qquad R := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Décomposition additive de Dunford de A</u> :

```
> Diag:=multiply(P,diag(1,1,1,-1,-1),inverse(P));Nilp:=multiply(P,evalm(R-
diag(1,1,1,-1,-1)),inverse(P));
```

$$Diag := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad Nilp := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Réduction de Jordan</u> préprogrammée :

```
> jordan(A,U);print(U);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 8</u> : Réduire la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 22 & 45 & 68 & 68 & 68 & 68 & 68 & 68 \\ -33 & -68 & -102 & -102 & -102 & -102 & -102 & -102 \\ 26 & 53 & 78 & 80 & 82 & 82 & 82 & 82 \\ -15 & -30 & -44 & -52 & -59 & -59 & -59 & -59 \\ 12 & 24 & 36 & 48 & 58 & 60 & 62 & 62 \\ -12 & -24 & -36 & -48 & -59 & -67 & -74 & -74 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 61 & 60 \\ -3 & -6 & -9 & -12 & -15 & -18 & -20 & -19 \end{bmatrix}.$$

Solution : avec Maple, bien sûr !

```
> with(linalg):
> A:=matrix(8,8,[22,45,68,68,68,68,68,68,-33,-68,-102,-102,-102,-102,-102,-102,26,53,78,80,82,82,82,82,-15,-30,-44,-52,-59,-59,-59,-59,12,24,36,48,58,60,62,62,-12,-24,-36,-48,-59,-67,-74,-74,9,18,27,36,45,54,61,60,-3,-6,-9,-12,-15,-18,-20,-19]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 22 & 45 & 68 & 68 & 68 & 68 & 68 & 68 \\ -33 & -68 & -102 & -102 & -102 & -102 & -102 & -102 \\ 26 & 53 & 78 & 80 & 82 & 82 & 82 & 82 \\ -15 & -30 & -44 & -52 & -59 & -59 & -59 & -59 \\ 12 & 24 & 36 & 48 & 58 & 60 & 62 & 62 \\ -12 & -24 & -36 & -48 & -59 & -67 & -74 & -74 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 61 & 60 \\ -3 & -6 & -9 & -12 & -15 & -18 & -20 & -19 \end{bmatrix}$$

```
> C:=factor(charpoly(A,x));M:=factor(minpoly(A,x));Sp:=eigenvals(A);
```

$$C := (x-3)\,(x-2)^3\,(x-1)^4$$

$$M := (x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

$$Sp := 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$$

```
> for i from 1 to 3 do k[i]:=kernel(A-i);od;
```

$$k_1 := \left\{\left[\frac{425}{3}, \frac{-425}{3}, 55, 0, -6, 0, 0, 1\right], [-17, 17, -7, 1, 0, 0, 0, 0], \left[\frac{425}{3}, \frac{-425}{3}, 55, 0, -6, 0, 1, 0\right], [85, -85, 33, 0, -4, 1, 0, 0]\right\}$$

$$k_2 := \{[-10, 12, -6, 1, 0, 0, 0, 0], [30, -36, 17, 0, -3, 1, 0, 0], [-90, 108, -51, 0, 8, 0, -3, 1]\}$$

$$k_3 := \{[-7, 9, -5, 1, 0, 0, 0, 0]\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k[1]),op(k[2]),op(k[3])]));
> R:=multiply(inverse(P),A,P);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{425}{3} & 85 & \frac{425}{3} & -17 & -10 & 30 & -90 & -7 \\ \frac{-425}{3} & -85 & \frac{-425}{3} & 17 & 12 & -36 & 108 & 9 \\ 55 & 33 & 55 & -7 & -6 & 17 & -51 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -6 & 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 9 : Réduire la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0 \end{bmatrix}.$$

Solution : [Arnaudiès, *Groupes, algèbres, géométrie*. tome 1, p. 377].
A est symétrique réelle, donc diagonalisable…

Exercice 10 : Ecrire une procédure prenant en argument une matrice, reconnaissant si cette matrice est nilpotente, affichant alors son indice de nilpotence, la suite concave des dimensions des noyaux des A^k, et sa réduction de Jordan.

Appliquer cette procédure à $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$, puis à $B = \begin{bmatrix} A & I \\ O & A \end{bmatrix} \in M_6(\mathbf{C})$.

```
> nilpotente:=proc(A)
> local n,m,r,k,N,J,U;
> n:=rowdim(A);
> if iszero(A^n) then
> m:=minpoly(A,x);r:=degree(m);
> print(`cette matrice est nilpotente d'indice`,r);n[0]:=0;N[0]:={};
> for k from 1 to r do N[k]:=kernel(A^k);n[k]:=nops(N[k]);od;
print(`dimensions des noyaux:`);for k from 0 to r do print(`dimension de
ker A^`,k,`:`,n[k]);od;  J:=jordan(A,U);print(`réduite de
Jordan:`);print(J);print(`matrice de passage:`);print(U);fi;
> end;
> A:=matrix(3,3,[3,6,1,0,0,4,-1,-2,-3]);nilpotente(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

cette matrice est nilpotente d'indice , 3

dimensions des noyaux:

*dimension de ker A^*, 0, :, 0

*dimension de ker A^*, 1, :, 1

*dimension de ker A^*, 2, :, 2

*dimension de ker A^*, 3, :, 3

réduite de Jordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice de passage:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Z:=matrix(3,3,0):J:=diag(1,1,1):
B:=blockmatrix(2,2,[A,J,Z,A]);nilpotente(B);
```

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

cette matrice est nilpotente d'indice , 4

dimensions des noyaux:

*dimension de ker A^*, 0, :, 0
*dimension de ker A^*, 1, :, 2
*dimension de ker A^*, 2, :, 4
*dimension de ker A^*, 3, :, 5
*dimension de ker A^*, 4, :, 6

réduite de Jordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice de passage:

$$\begin{bmatrix} 24 & 6 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & -2 & -8 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 11 : On considère avec Maple la matrice A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Est-elle diagonalisable ? Expliquer ce paradoxe.

Solution : Maple affirme sans hésiter que cette matrice est diagonalisable.
En réalité, il considère A comme élément de $M_2(\mathbf{K})$, où $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(a, b, c, d)$.
Le polynôme caractéristique de A est scindé dans un sur-corps de **K**, le corps $\mathbf{K}[\sqrt{\Delta}\,]$, où Δ est le discriminant du polynôme caractéristique. A a deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

$$C := x^2 - x\,d - a\,x + d\,a - b\,c$$

$$J := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2\,d\,a + d^2 + 4\,b\,c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2\,d\,a + d^2 + 4\,b\,c} \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} 0 & b\,c - d\,a \\ 1 & a + d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

2. Réductions abstraites.

Si l'on veut réduire une matrice A de grande taille, en particulier une matrice « creuse » (c'est-à-dire comportant beaucoup de 0), il est difficile, maladroit, voire impossible, de calculer le polynôme caractéristique. ***Mieux vaut alors chercher directement les couples d'éléments propres*** (λ, X). L'étude et la discussion de l'« équation séculaire » $A.X = \lambda.X$, où $X \neq 0$, permet souvent de déterminer simultanément λ et X. Si l'on dispose de n vecteurs propres libres, A est diagonalisable ; sinon, on peut la trigonaliser.

Il peut arriver aussi que A s'interprète comme la matrice d'un endomorphisme d'un espace $\mathbf{R}_n[X]$, etc. ; la recherche des éléments propres (λ, X) est facilitée par cette interprétation linéaire.
Parfois enfin, la matrice A est un polynôme en une matrice plus simple Ω ; il vaut mieux alors diagonaliser Ω avant de s'attaquer à A ; c'est le cas des matrices cycliques et apparentées.

Exercice 1 : On considère les matrices réelles (H et Y étant de format impair $n = 2m + 1$) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix},\ N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & .. & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}.$$

Sont-elles diagonalisables ? Réduction ? Polynôme caractéristique ? Polynôme minimal ?

Solution : On suppose les matrices d'ordre $n > 2$.
1) A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
De plus rg A = 2, donc 0 est valeur propre d'ordre $n - 2$.
Cherchons les éléments propres (λ, X), X $\neq$ 0.

$$AX = \lambda X \iff x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 = \lambda x_n\ ,\ x_1 + x_n = \lambda x_2 = \dots = \lambda x_{n-1}.$$

$\lambda = 0$ donne $x_1 + \dots + x_n = 0$, $x_1 + x_n = 0$: espace de dimension $n - 2$ (intersection de 2 hyperplans).
$\lambda \neq 0$ donne $x_1 = x_n$ et $x_2 = \dots = x_{n-1}$. Bref, $X = {}^t(a, b, \dots, b, a)$.
De plus : $(2 - \lambda).a + (n - 2).b = 0$ et $2.a - \lambda.b = 0$.
Le système ne saurait être cramérien, sans quoi $a = b = 0$, donc $\begin{vmatrix} 2-\lambda & n-2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$.
Ainsi, $\lambda^2 - 2.\lambda - 2n + 4 = 0$; $\lambda = 1 \pm \sqrt{2n-3}$.
On trouve deux nouvelles valeurs propres : $\alpha = 1 + \sqrt{2n-3}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2n-3}$, donnant naissance à deux droites propres respectives $\mathbf{R}.(\alpha, 2, \dots, 2, \alpha)$ et $\mathbf{R}.(\beta, 2, \dots, 2, \beta)$.

En conclusion, si $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\dots0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0\dots\dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1\dots\dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots\dots0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0\dots1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1..-1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0\dots0 & \alpha & \beta \end{bmatrix}$, $P^{-1}A.P = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \alpha, \beta)$.

Finalement A est diagonalisable, et $\chi_A(X) = (-1)^n X^{n-2} (X^2 - 2.X - 2n + 4)$.

2) Réduire $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & & \dots. & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ équivaut à réduire $C = B - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & & \dots. & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, qui est également de rang 2. On peut reprendre la même méthode que précédemment, mais pour varier les plaisirs, nous allons plutôt choisir une méthode polynomiale.
On constate que $C^3 = C$; C annule donc le polynôme scindé sans carrés $X^3 - X = X.(X + 1).(X - 1)$.

- Ker C = { x ; $x_1 = x_n = 0$ } est de dimension $n - 2$.
- Ker(C − I) = $\mathbf{C}.(1, 2, \dots, 2, 1)$
- Ker(C + I) = $\mathbf{C}.(1, 0, \dots, 0, 1)$

Donc C est diagonalisable, et B aussi.

Plus précisément $P^{-1}.B.P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = diag(I_{n-2} , 2 , 0), où $P = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Cherchons les éléments propres (λ, X), X ≠ 0, de H.

$HX = \lambda X \iff x_1 + \dots + x_{2m+1} = \lambda x_{m+1}$, $x_1 + x_{2m+1} = \lambda x_1 = \dots = \lambda x_m = \lambda x_{m+2} = \dots = \lambda x_{2m+1}$.

• λ = 0 donne $x_1 + \dots + x_{2m+1} = 0$, $x_1 + x_{2m+1} = 0$:
espace de dimension $n - 2$ (intersection de 2 hyperplans). Logique, car rg H = 2.

• λ ≠ 0 implique $x_1 = \dots = x_m = x_{m+2} = \dots = x_{2m+1}$. Bref, $X = {}^t(a, \dots, a, b, a, \dots, a)$.
De plus, $2a = \lambda a$, $2ma + b = \lambda b$.

λ ≠ 2 donne $a = 0$, λ = 1, $X = {}^t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

λ = 2 donne $2ma = b$, $X = {}^t(1, \dots, 1, 2m, 1, \dots, 1)$.

<u>Conclusion</u> : H est diagonalisable ; si $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\dots0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\dots\dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1\dots\dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots\dots0 & 1 & 2m \\ \dots & 0 & 0\dots1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1\dots-1 & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0\dots0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}H.P$ = diag(0, …, 0, 1, 2).

Une autre méthode possible aurait consisté à noter que Ker H et Im H sont supplémentaires et à considérer l'endomorphisme induit par H sur Im H.

<u>Exercice 2</u> : On considère la matrice $C = \begin{bmatrix} 0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \in M_7(\mathbf{R})$.

1) Diagonaliser C. Quel est son polynôme caractéristique ? son polynôme minimal ?
2) Déterminer les formes linéaires f sur $\mathbf{R}^7$ telles que $\forall X \in \mathbf{R}^7$ $f(C.X) = f(X)$.

<u>Solution</u> : [Source : Ecrit Centrale PSI 2010]

<u>1ère méthode</u> : Cherchons les éléments propres de C, c'est-à-dire les couples (λ, X), avec X ≠ 0, tels que CX = λX.
$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \lambda.x_1 = \lambda.x_7 \\ x_2 + x_5 = \lambda.x_2 = \lambda.x_6 \\ x_1 = \lambda.x_3 = \lambda.x_4 = \lambda.x_5 \end{cases}$$

• Si λ = 0, il vient $x_1 = 0$, $x_3 + x_4 = x_2 + x_5 = 0$.
Trois formes linéaires indépendantes : Ker C est un espace de dimension 4, ayant pour base
^{t}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) , ^{t}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) , ^{t}(0, 1, 0, 0, –1, 0, 0) , ^{t}(0, 0, 1, –1, 0, 0, 0).

• Si λ ≠ 0, X est de la forme ${}^t(a, b, c, c, c, b, a)$, avec $2c = \lambda a$, $b + c = \lambda b$, $a = \lambda c$.
Cela implique $2c = \lambda^2 c$, $c = (\lambda - 1) b$.

• Si λ = 1, $a = c = 0$, b est quelconque. Vecteur $X = {}^t$(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) .

• Si $\lambda = \varepsilon\sqrt{2}$, ε = ±1 , il vient $a = 2(\lambda - 1)$, $b = \lambda$, $c = \lambda(\lambda - 1)$.

On a obtenu une base propre.

<u>Conclusion</u> : C est diagonalisable, Sp C = $\{ 0 , 1 , \sqrt{2} , -\sqrt{2} \}$.
C a pour polynôme caractéristique $X^4 (X - 1) (X - \sqrt{2}) (X + \sqrt{2})$

et pour polynôme minimal : $X(X-1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(\alpha-1) & 2(\beta-1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \beta(\beta-1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \beta(\beta-1) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \beta(\beta-1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2(\alpha-1) & 2(\beta-1) \end{bmatrix}, \quad P^{-1}.C.P = \mathrm{diag}(0, 0, 0, 0, 1, \alpha, \beta), \ \alpha = \sqrt{2}, \ \beta = -\sqrt{2}.$$

2ème méthode : recherche de Ker C et Im C.

Cette méthode repose sur un lemme préalable, laissé en exercice :

Lemme : Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$ et l'endomorphisme $v = u|_{\mathrm{Im}\, u}$ est diagonalisable.

Or $\mathrm{Ker}\, C = \{ X = {}^t(0, a, b, -b, -a, c, d) ; (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \}$.
C'est un espace de dimension 4, dont une base est

${}^t(0, 1, 0, 0, -1, 0, 0)$, ${}^t(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0)$, ${}^t(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, ${}^t(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$

Im C est de dimension 3, engendré par les trois premières colonnes de C :

$\mathrm{Im}\, C = \{ Y = {}^t(a, b, c, c, c, b, a) ; (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \}$.

Une base en est : $c_1 = {}^t(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$, $c_2 = {}^t(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$, $c_3 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Il est facile de vérifier que $\mathrm{Im}\, C \cap \mathrm{Ker}\, C = \{0\}$.

Il découle de ceci que (c_1, c_2, c_3) est base de Im C. De plus Im C est toujours C-stable.
Soit A la matrice, relativement à cette base, de l'endomorphisme induit.

On a : $C.c_1 = c_2 + 2.c_3$, $C.c_2 = c_2$, $C.c_3 = c_1$, de sorte que $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

1 est valeur propre de A, car $C.c_2 = c_2$. Comme tr A = 1, les deux valeurs propres sont opposées.

$\mathrm{Sp}\, A = \{ 1, \alpha, -\alpha \}$. De plus $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, tr $A^2 = 5$ et $\alpha = \sqrt{2}$.

Ainsi $\mathrm{Sp}\, A = \{ 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$. A est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$.
Finalement, $\mathrm{Sp}\, C = \{ 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0 \}$ et C est diagonaliable.
1, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ sont valeurs propres d'ordre 1, 0 est d'ordre 4.

2) <u>Cherchons les formes linéaires *f* telles que</u> $\forall X \in \mathbf{R}^7 \ f(C.X) = f(X)$.
$f(X) = L.X$, où L est un vecteur-ligne. On a $L.C.X = L.X$ pour tout X, si et seulement si $L.C = L$, autrement dit si ${}^tL$ est un vecteur propre de ${}^tC$ associé à la valeur propre 1.
On trouve : $L = \lambda(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$.

Exercice 3 : Les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{bmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?

Solution : Warning ! Ces deux matrices sont de fausses amies.
Si l'on calcule A^2, puis A^4, on voit que A annule le polynôme scindé sans carrés

$$X^4 - 9 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X - i\sqrt{3})(X + i\sqrt{3}),$$

Elle est donc diagonalisable et son spectre est inclus dans $\{ \sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3} \}$.
Notons a, b, c, d les ordres de multiplicité respectifs de $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$.

Un argument de trace et de déterminant va permettre de déterminer les valeurs propres.
On a $a + b + c + d = 3$ pour des questions de format.

$$\text{tr } A = 1 + 2j = i\sqrt{3} = a\sqrt{3} - b\sqrt{3} + ci\sqrt{3} - di\sqrt{3} \text{ , donc } a = b \text{ , } c - d = 1.$$

$$\det A = -3i\sqrt{3} = (\sqrt{3})^a.(-\sqrt{3})^b.(i\sqrt{3})^c.(-i\sqrt{3})^d \text{ , donc } 2b + c + 3d = 3 \pmod 4).$$

On en déduit que b est impair, donc $a = b = c = 1$ et $d = 0$. Sp A = $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}$.
Bien entendu on aurait pu aussi calculer le caractéristique.
La seconde annule X^2 ; elle est nilpotente d'indice 2, donc non diagonalisable.
Ceci montre au passage qu'une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable.

```
> with(linalg):j:=-1/2+I*sqrt(3)/2;
> A:=map(simplify,matrix(3,3,[1,1,1,1,j,j^2,1,j^2,j]));
B:=map(simplify,matrix(3,3,[1,j,j^2,j,j^2,1,j^2,1,j]));
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & 1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> ca:=factor(charpoly(A,x));map(simplify,evalm(A^4));
```

$$ca := (-x+\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(-x+I\sqrt{3})$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> k1:=kernel(A-sqrt(3));k2:=kernel(A+sqrt(3));k3:=kernel(A-I*sqrt(3));
```

$$k1 := \left\{\left[1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right]\right\} \quad k2 := \left\{\left[1, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right]\right\} \quad k3 := \{[0, -1, 1]\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k1),op(k2),op(k3)]));
map(simplify,multiply(inverse(P),A,P));
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & I\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> cb:=factor(charpoly(B,x));mb:=factor(minpoly(B,x));
```

$$cb := x^3 \qquad mb := x^2$$

```
> N:=kernel(B);Q:=transpose(matrix([op(N),array([0,0,1])]));
map(simplify,multiply(inverse(Q),B,Q));
```

$$N := \left\{\left[0, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}, 1\right], \left[1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}, 0\right]\right\}$$

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1+I\sqrt{3}}{-1+I\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 : Valeurs et vecteurs propres de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$.

Solution :

1) A est antisymétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbf{C}^n$ hermitien standard et à spectre imaginaire pur. Cela découle par exemple de ce que iA est hermitienne.

2) On peut calculer le polynôme caractéristique de A en notant que c'est un déterminant d'Hurwitz :

$$\chi(X) = \frac{(-1)^n}{2} [(X+1)^n + (X-1)^n] .$$

Les valeurs propres de A vérifient $\frac{\lambda-1}{\lambda+1} = \exp(i\frac{2k+1}{n}\pi)$, pour $0 \le k \le n-1$, etc.

mais il reste ensuite à déterminer les vecteurs propres, et je ne vois guère comment…

3) Une autre approche consiste à noter que $A = \Omega + \Omega^2 + \dots + \Omega^{n-1}$, où $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Situation analogue à celle des matrices cycliques. On montre que Ω est diagonalisable et que

$\mathrm{Sp}\,\Omega = \{ z \in \mathbf{C} ; z^n = -1 \} = \{ \exp(i\frac{2k+1}{n}\pi) ; 0 \le k \le n-1 \}$. Je laisse le lecteur terminer…

Exercice 5 : 1) Diagonaliser la matrice $A = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbf{C})$.

2) Plus généralement, si σ est une permutation de {1, 2, …, n}, diagonaliser la matrice P(σ) de permutation associée : valeurs et vecteurs propres, polynômes caractéristique et minimal.

Solution : 1) Conformément aux recommandations du cours, nous allons chercher directement les couples (λ, X), X ≠ 0, d'éléments propres. Le système obtenu se scinde en deux

$$x_4 = \lambda.x_1 , x_1 = \lambda.x_3 , x_3 = \lambda.x_4 \quad \text{et} \quad x_5 = \lambda.x_2 , x_2 = \lambda.x_5 .$$

Il implique : $x_1 = \lambda^3.x_1$ et $x_2 = \lambda^2.x_2$.

Or $\lambda^3 \ne 1$ et $\lambda^2 \ne 1$ impliqueraient X = 0 ; donc $\lambda^3 = 1$ ou $\lambda^2 = 1$, et $\lambda \in \{ +1, -1, j , j^2 \}$

♣ λ = +1 donne les vecteurs du type (a, b, a, a, b), qui forment un plan.

♦ λ = −1 donne les vecteurs du type (0, c, 0, 0, −c), qui forment une droite

♥ λ = j donne la droite $\mathbf{C}.(1, 0, j^2 , j , 0)$.

♠ λ = j^2 donne la droite $\mathbf{C}.(1, 0, j , j^2 , 0)$.

Finalement, A est diagonalisable : si $P = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&1 \\ 0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&j^2&j \\ 1&0&0&j&j^2 \\ 0&1&-1&0&0 \end{bmatrix}$, alors $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0 \\ 0&0&1&j&0 \\ 0&0&0&0&j^2 \end{bmatrix}$.

A a pour polynôme caractéristique $\chi(X) = (X-1)^2(X+1)(X-j)(X-j^2) = (X^2-1)(X^3-1)$,

et pour polynôme minimal $\mu(X) = (X-1)(X+1)(X-j)(X-j^2) = (X+1)(X^3-1)$.

2) De façon plus générale, toute matrice de permutation P(σ) est diagonalisable.

En effet, $\exists m \in \mathbf{N}^*\ \sigma^m = \mathrm{id}$ (m est le ppcm des longueurs des cycles composant σ), et alors $P(\sigma)^m = I_n$.

P(σ) annule le polynôme $X^m - 1$ qui est scindé sans facteur carré.

Variante : la matrice P(σ) est unitaire, car elle conserve le produit scalaire hermitien standard de $\mathbf{C}^n$.

Reste à diagonaliser effectivement P(σ).

Le cas le plus simple est celui où σ est le cycle [1, 2, …, n].

Alors $P(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \Gamma_n$ est diagonalisable et a pour spectre $U_n(\mathbf{C}) = \{ z ; z^n = 1 \}$, pour polynômes caractéristique et minimal $X^n - 1$: cf. le cours sur la réduction, § 8.1.

Dans le cas général, σ se décompose en produit de cycles à supports disjoints $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \dots \circ \gamma_\nu$, et de longueurs respectives $n_1, n_2, \dots, n_\nu$, avec $n_1 + n_2 + \dots + n_\nu = n$.

Quitte à permuter convenablement les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{C}^n$, $P(\sigma)$ est semblable à un tableau diagonal de matrices de cycles de formats $n_1, n_2, \dots, n_\nu$.

Plus précisément $\exists \tau \in \mathfrak{S}_n \quad P(\tau)^{-1}.P(\sigma).P(\tau) = \operatorname{diag}(\Gamma_{n_1}, \Gamma_{n_2}, \dots, \Gamma_{n_\nu})$

Du coup, $P(\sigma)$ est diagonalisable, a pour spectre $S = \bigcup_{i=1}^{\nu} U_{n_i}(C)$, pour polynôme caractéristique $\prod_{i=1}^{\nu}(X^{n_i} - 1)$ et pour polynôme minimal $\prod_{\zeta \in S}(X - \zeta)$.

Nous allons maintenant traiter trois fois le même exercice, mais de manière différente selon les indications données par l'énoncé.

Exercice 6 : On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d'ordre n. Calculer AX, où $X = \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin 2t \\ \dots \\ \sin nt \end{bmatrix}$.

En déduire valeurs et vecteurs propres de A.

Solution :

A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.

$AX = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos t.\sin(2t) \\ \dots \\ 2\cos t.\sin(n-1)t \\ \sin(n-1)t \end{bmatrix} = 2\cos t \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin(2t) \\ \dots \\ \sin(n-1)t \\ \sin(nt) \end{bmatrix}$ si et seulement si $\sin(n+1)t = 0$, *i.e.* $t = \dfrac{k\pi}{n+1}$.

Pour $1 \le k \le n$, $X = \begin{bmatrix} \sin\frac{k\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2k\pi}{n+1} \\ \dots \\ \sin\frac{nk\pi}{n+1} \end{bmatrix}$ est $\neq 0$ (sa 1ère coordonnée est > 0), et vérifie $AX = 2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}.X$.

On dispose donc de n éléments propres de A. Inutile d'en chercher d'autres.

Finalement, $\operatorname{Sp} A = \left\{ 2\cos\dfrac{\pi}{n+1}, 2\cos\dfrac{2\pi}{n+1}, \dots, 2\cos\dfrac{n\pi}{n+1} \right\}$.

$$P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 2\cos\frac{\pi}{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\cos\frac{2\pi}{n+1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\cos\frac{n\pi}{n+1} \end{bmatrix}, \text{ où } P = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n+1} & \sin\frac{2\pi}{n+1} & \dots & \sin\frac{n\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2\pi}{n+1} & \sin\frac{4\pi}{n+1} & \dots & \sin\frac{2n\pi}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\frac{n\pi}{n+1} & \sin\frac{2n\pi}{n+1} & \dots & \sin\frac{n^2\pi}{n+1} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice P n'est pas orthogonale. Il faudrait pour cela normer ses vecteurs.

Exercice 7 : On considère la matrice A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d'ordre n. Calculer $\det(A + 2\cos\theta.I_n)$.

En déduire valeurs et vecteurs propres de A.

Solution : Soit P le polynôme caractéristique de A.

$U_n = \det(A + 2\cos\theta.I_n) = P(-2\cos\theta)$ est un déterminant tridiagonal vérifiant :

$U_1 = 2\cos\theta$, $U_2 = 4\cos^2\theta - 1$, $U_n = 2\cos\theta.U_{n-1} - U_{n-2}$. On peut donc poser $U_0 = 1$.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta.\, r + 1$.

Finalement, on trouve $U_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ si $\sin\theta \neq 0$. Donc $U_n = 0$ pour $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Au bout du compte, il vient Sp A = $\{\, 2\cos\dfrac{\pi}{n+1}, 2\cos\dfrac{2\pi}{n+1}, \dots, 2\cos\dfrac{n\pi}{n+1} \,\}$.

Une fois calculées les valeurs propres, il reste à résoudre, pour chacune d'elle, le système $AX = \lambda X$. Or ce système montre que $(x_1, \dots, x_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et l'on retourve sans peine le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 8 : Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d'ordre n.

Solution : Nous allons chercher directement les éléments propres (λ, X), $A.X = \lambda.X$, $X \neq 0$. Il vient :

$$\begin{cases} -\lambda.x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda.x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - \lambda.x_3 + x_4 = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_{n-2} - \lambda.x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - \lambda.x_n = 0 \end{cases}$$

On voit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, mais, pour des raisons esthétiques il vaut mieux considérer le vecteur $(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, avec $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Alors l'équation caractéristique de la suite s'écrit $r^2 - \lambda.r + 1 = 0$.

Soit $\Delta = \lambda - 4$. Supposons $\Delta \neq 0$, et notons $\Delta = \delta^2$. Alors $r = \dfrac{\lambda \pm \delta}{2}$ et $x_p = \alpha(\dfrac{\lambda+\delta}{2})^p + \beta(\dfrac{\lambda-\delta}{2})^p$.

$x_0 = x_{n+1} = 0$ s'écrit $\alpha + \beta = 0$, $\alpha(\dfrac{\lambda+\delta}{2})^{n+1} + \beta(\dfrac{\lambda-\delta}{2})^{n+1} = 0$.

Ce système linéaire en (α, β) ne saurait être cramérien, sans quoi $\alpha = \beta = 0$, et $X = 0$.

Donc son déterminant est nul, *i.e.* $(\dfrac{\lambda+\delta}{2})^{n+1} = (\dfrac{\lambda-\delta}{2})^{n+1}$, et $\beta = -\alpha$.

Il vient $\lambda - \delta = \exp(\dfrac{2ik\pi}{n+1}).(\lambda + \delta)$, où $1 \leq k \leq n$ ($k = 0$ est impossible, car on a supposé $\delta \neq 0$).

Posons $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$. Il vient $\lambda.(1 - e^{2i\theta}) = \delta.(1 + e^{2i\theta})$, ou encore $-2i\lambda.\sin\theta = 2\delta.\cos\theta$.

Elevons au carré et simplifions : il vient $\lambda^2 = 4\cos^2\theta$. En résumé $\lambda = \pm\, 2.\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Cela donne, non pas $2n$ réels distincts, mais n , car $2.\cos\dfrac{k\pi}{n+1} = -2.\cos\dfrac{(n+1-k)\pi}{n+1}$.

Au final, on a obtenu n valeurs propres distinctes $\lambda = 2.\cos\frac{k\pi}{n+1}$ $(1 \le k \le n)$.

Inutile d'en chercher d'autres : on en a déjà n … Reste à trouver les vecteurs propres associés.

$$x_p = \alpha \left[\left(\frac{\lambda+\delta}{2}\right)^p - \left(\frac{\lambda-\delta}{2}\right)^p \right] = \dots = 2i\alpha \sin(p\theta) = 2i\alpha \sin\frac{pk\pi}{n+1} \quad (1 \le p \le n)$$

Afin d'obtenir un vecteur réel, on peut choisir $\alpha = \frac{1}{2i}$.

On a bien retrouvé le résultat des exercices précédents.

Exercice 9 : Valeurs propres et vecteurs propres des matrices d'ordre n :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 1/a & 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & 1/a & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & \dots & 1/a & 0 \end{bmatrix} \ (a \in \mathbf{C}^*) \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a & b \\ 0 & 0 & \dots & c & a \end{bmatrix} \ (a, b, c \in \mathbf{C}^*).$$

Solution : Il suffit de généraliser les méthodes de l'exercice précédent.
Attention la seconde matrice est diagonalisable ssi b et c sont tous deux nuls ou tous deux non nuls.

3. *Suites récurrentes linéaires.*

Les suites récurrentes linéaires d'ordre p à coefficients constants relèvent du théorème des noyaux appliqué à l'opérateur de décalage $T : u = (u_n) \to (u_{n+1})$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 mais vectorielles relèvent de méthodes matricielles. Les deux approchent ne s'excluent d'ailleurs pas. Le plus souvent, il faut se placer dans $\mathbf{C}$, mais il n'est pas interdit de se placer dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ou dans un de ses sur-corps. Enfin, on peut aussi aborder ces sujets à l'aide d'un autre outil : les séries entières, formelles ou non. Je l'ai fait dans quelques exercices.

Exercice 1 : Etudier les suites récurrentes linéaires $u_{n+1} = u_n + 2\,v_n$, $v_{n+1} = u_n + v_n$, $u_0 = v_0 = 1$.
Que dire de la suite $(\frac{u_n}{v_n})$? Calculer $u_n^2 - 2.v_n^2$. En déduire l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Solution : Ces suites récurrentes linéaires remontent à l'Antiquité : elles servaient à démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ par une méthode transmise par Théon de Smyrne (2ème siècle avant J.-C.), mais qui remonte peut-être au pythagoricien Philolaos de Crotone. En tout cas, elles étaient connues de Platon et Euclide, qui nommaient les u_n « nombres diagonaux » et les v_n « nombres latéraux ».

Matriciellement, il s'agit de calculer la puissance n-ième de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, par diagonalisation de A.

```
> with(linalg):A:=matrix(2,2,[1,2,1,1]);c:=charpoly(A,x);
f:=factor(charpoly(A,x),sqrt(2));
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c := x^2 - 2\,x - 1$$

$$f := -(x - 1 + \sqrt{2})\,(-x + 1 + \sqrt{2})$$

```
> alias(alpha=1-sqrt(2),beta=1+sqrt(2));
k1:=kernel(A-alpha);k2:=kernel(A-beta);
```

$$\alpha, \beta$$

$$k1 := \left\{ \left[1, -\frac{1}{2}\sqrt{2} \right] \right\} \qquad k2 := \left\{ \left[1, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right] \right\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k1),op(k2)]));
map(simplify,multiply(inverse(P),A,P));
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

```
> An:=multiply(P,diag(alpha^n,beta^n),inverse(P));
```

$$An := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha^n + \frac{1}{2}\beta^n & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\alpha^n + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\beta^n \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2}\,\alpha^n + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\beta^n & \frac{1}{2}\alpha^n + \frac{1}{2}\beta^n \end{bmatrix}$$

```
> V:=multiply(An,vector([1,1]));limit(V[1]/V[2],n=infinity);
```

$$V := \left[\frac{1}{2}\alpha^n + \frac{1}{2}\beta^n - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\alpha^n + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\beta^n, -\frac{1}{4}\sqrt{2}\,\alpha^n + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\beta^n + \frac{1}{2}\alpha^n + \frac{1}{2}\beta^n\right]$$

$$2\frac{\beta}{\sqrt{2}+2}$$

Mais on peut aussi recourir à la commande rsolve, qui fournit en outre les fonctions génératrices:

```
> rsolve({u(n+1)=u(n)+2*v(n),v(n+1)=u(n)+v(n),u(0)=1,v(0)=1},{u,v});
```

$$\left\{ u(n) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right)^n + \sqrt{2}\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right)^n + \left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}, \right.$$

$$\left. v(n) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right)^n + \sqrt{2}\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}\right)^n - \left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^n\right)}{(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} \right\}$$

```
>rsolve({u(n+1)=u(n)+2*v(n),v(n+1)=u(n)+v(n),u(0)=1,v(0)=1},{u,v},'genfunc
'(x));
```

$$\left\{ v(x) = -\frac{1}{x^2 - 1 + 2x},\ u(x) = -\frac{x+1}{x^2 - 1 + 2x} \right\}$$

<u>Conclusion</u> : $u_n = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}]$ et $v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}]$

Du coup, $u_n \sim \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1}$, $v_n \sim \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}$ et la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers $\sqrt{2}$.

Plus précisément, $\frac{u_n}{v_n} = \sqrt{2}\,\frac{1-\lambda^{n+1}}{1+\lambda^{n+1}}$, où $\lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

On en déduit $\frac{u_1}{v_1} < \frac{u_3}{v_3} < \dots < \sqrt{2} < \dots < \frac{u_4}{v_4} < \frac{u_2}{v_2}$, les suites $(\frac{u_{2n}}{v_{2n}})$ et $(\frac{u_{2n+1}}{v_{2n+1}})$ étant adjacentes.

On vérifie sans peine que $u_n^2 - 2.v_n^2 = (-1)^n$.
Cela découle de ce que la forme quadratique $q(X) = x^2 - 2.y^2$ est telle que $(\forall X)\ q(AX) = -q(X)$.
Supposons que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Alors $|\,b.u_n - a.v_n\,| = \frac{b}{u_n + v_n\sqrt{2}} \to 0$.

Comme $b.u_n - a.v_n \in \mathbf{Z}$, on aurait $b.u_n - a.v_n = 0$ à partir d'un certain rang, donc la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ serait constante à partir d'un certain rang. Ce n'est pas le cas.

<u>Exercice 2</u> : Etudier la suite récurrente définie par : $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

<u>Solution</u> :

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants « avec second membre ».

1ère solution, algébrique.

Introduisons l'opérateur de décalage T. On veut $(T^2 - T - 2.I)(u) = (-1)^n$.

Or la suite $(-1)^n$ est dans le noyau de T + I. Par conséquent, $(T + I) \circ (T^2 - T - 2.I)(u) = 0$.

Cela s'écrit, $(T + I)^2 \circ (T - 2.I)(u) = 0$. Finalement, u est de la forme $u_n = (an + b).(-1)^n + c.2^n$,

avec $u_0 = u_1 = 1$, $u_2 = 4$. Il vient : $u_n = \frac{7}{9}2^n + \frac{3n+2}{9}(-1)^n$.

2ème solution, par séries formelles.

Introduisons la série entière formelle $A = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n$, dite série génératrice de la suite (u_n).

La relation de récurrence s'écrit : $\frac{A - u_0 - u_1 X}{X^2} = \frac{A - u_0}{X} + 2A + \frac{1}{1+X}$.

$$(1 - X - 2X^2)A = u_0 + (u_1 - u_0)X + \frac{X^2}{1+X} = 1 + \frac{X^2}{1+X} = \frac{X^2+X+1}{1+X}.$$

Donc $A = \frac{X^2+X+1}{(1+X)^2(1-2X)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+X)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{1+X} + \frac{7}{9}\frac{1}{1-2X}$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)X^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n X^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}2^n X^n.$$

Et l'on retrouve le résultat précédent. Si l'on veut respecter le programme, il faut montrer que la série entière considérée a un rayon de convergence > 0, i.e. que la suite (u_n) est à majorante géométrique. On pourra montrer au préalable que $|u_n| \leq 2^{n+1} - 1$.

Avec Maple :

```
> rsolve({u(n+2)=u(n+1)+2*u(n)+(-1)^n,u(0)=1,u(1)=1},u);
```

$$-\frac{1}{9}(-1)^n + \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}\right)(-1)^n$$

```
> F:=(X^2+X+1)/((X+1)^2*(1-2*X));convert(F,parfrac,X);
```

$$F := \frac{X^2 + X + 1}{(X+1)^2(1 - 2X)}$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{X+1} - \frac{7}{9}\frac{1}{-1+2X}$$

Exercice 3 : Etudier les suites récurrentes $u_{n+5} = u_{n+4} + 5.u_{n+3} - u_{n+2} - 8.u_{n+1} - 4.u_n$.
Lesquelles sont bornées ? convergentes ?

Solution : Soit T l'opérateur de décalage. Via le théorème des noyaux, cela donne :

```
> P:=X^5-X^4-5*X^3+X^2+8*X+4;factor(P);
```

$$P := X^5 - X^4 - 5X^3 + X^2 + 8X + 4$$

$$(X-2)^2(X+1)^3$$

```
> u:=n->(a*n+b)*2^n+(c*n^2+d*n+e)*(-1)^n;
```

$$u := n \to (a\,n + b)\,2^n + (c\,n^2 + d\,n + e)(-1)^n$$

Les suites bornées correspondent à $a = b = c = d = 0$; elles sont du type $e(-1)^n$.

La seule suite convergente est la suite nulle.

```
> rsolve({u(n+5)=u(n+4)+5*u(n+3)-u(n+2)-8*u(n+1)-4*u(n)},u);
```

$$-\left(\frac{1}{18}\mathrm{u}(4)-\frac{7}{18}\mathrm{u}(1)-\frac{4}{27}\mathrm{u}(0)-\frac{5}{18}\mathrm{u}(2)+\frac{1}{54}\mathrm{u}(3)\right)2^n$$
$$+\left(\frac{1}{54}\mathrm{u}(4)-\frac{5}{54}\mathrm{u}(1)-\frac{1}{27}\mathrm{u}(0)-\frac{1}{18}\mathrm{u}(2)+\frac{1}{54}\mathrm{u}(3)\right)(n+1)\,2^n$$
$$+\left(\frac{2}{9}\mathrm{u}(4)+\frac{4}{9}\mathrm{u}(1)+\frac{56}{27}\mathrm{u}(0)-\frac{10}{9}\mathrm{u}(2)-\frac{7}{27}\mathrm{u}(3)\right)(-1)^n$$
$$+\left(-\frac{8}{27}\mathrm{u}(4)-\frac{32}{27}\mathrm{u}(1)-\frac{44}{27}\mathrm{u}(0)+\frac{11}{9}\mathrm{u}(2)+\frac{13}{27}\mathrm{u}(3)\right)(n+1)(-1)^n$$
$$+\left(\frac{1}{9}\mathrm{u}(4)+\frac{4}{9}\mathrm{u}(1)+\frac{4}{9}\mathrm{u}(0)-\frac{1}{3}\mathrm{u}(2)-\frac{2}{9}\mathrm{u}(3)\right)(n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right)(-1)^n$$

```
> rsolve({u(n+5)=u(n+4)+5*u(n+3)-u(n+2)-8*u(n+1)-4*u(n)},u,'genfunc'(x));
```

$$(\mathrm{u}(0)+\mathrm{u}(1)\,x+\mathrm{u}(2)\,x^2+\mathrm{u}(3)\,x^3+\mathrm{u}(4)\,x^4-x\,\mathrm{u}(0)-\mathrm{u}(1)\,x^2-\mathrm{u}(2)\,x^3-\mathrm{u}(3)\,x^4$$
$$-5\,x^2\,\mathrm{u}(0)-5\,x^3\,\mathrm{u}(1)-5\,x^4\,\mathrm{u}(2)+x^3\,\mathrm{u}(0)+x^4\,\mathrm{u}(1)+8\,x^4\,\mathrm{u}(0))\Big/($$
$$1+4\,x^5-x-5\,x^2+x^3+8\,x^4)$$

```
> solve({1/18*u(4)-7/18*u(1)-4/27*u(0)-5/18*u(2)+1/54*u(3)=0,1/54*u(4)-
5/54*u(1)-1/27*u(0)-1/18*u(2)+1/54*u(3)=0,-8/27*u(4)-32/27*u(1)-
44/27*u(0)+11/9*u(2)+13/27*u(3)=0,1/9*u(4)+4/9*u(1)+4/9*u(0)-1/3*u(2)-
2/9*u(3)=0},{u(0),u(1),u(2),u(3),u(4)});
```

$$\{\mathrm{u}(2)=-\mathrm{u}(3),\ \mathrm{u}(1)=\mathrm{u}(3),\ \mathrm{u}(0)=-\mathrm{u}(3),\ \mathrm{u}(4)=-\mathrm{u}(3),\ \mathrm{u}(3)=\mathrm{u}(3)\}$$

Exercice 4 : On considère la suite de Fibonacci : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1) Calculer u_n pour tout n ; limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$?

2) On définit la suite (x_n) définie par : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + u_n$. Calculer x_n .

Solution :

1) L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ a pour racines le nombre d'or $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son conjugué $\varpi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a $u_n = \alpha.\omega^n + \beta.\varpi^n$; après calculs, il vient $u_n = \frac{\omega^n-\varpi^n}{\omega-\varpi}$. Enfin, $u_n \sim \frac{\omega^n}{\sqrt{5}}$.

2) La suite (x_n) est caractérisée par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = u_n$, ou encore par

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 - x_1 - x_0 = 0$, $x_3 - x_2 - x_1 = 1$,

$x_{n+4} - x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0.$

ou encore par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_{n+4} - 2.x_{n+3} - x_{n+2} + 2.x_{n+1} + x_n = 0.$

Au fond, si T est l'opérateur de décalage qui à la suite (z_n) associe (z_{n+1}), on a

$$u \in \mathrm{Ker}\,(T^2 - T - I) \quad \text{et} \quad x \in \mathrm{Ker}\,(T^2 - T - I)^2 = \mathrm{Ker}\,(T - \omega.I)^2 \circ (T - \varpi.I)^2 \text{ , donc}$$
$$x_n = (an + b).\omega^n + (cn + d).\varpi^n .$$

Tous calculs faits :

$$\boxed{x_n = \frac{\omega^n}{5\sqrt{5}}(3n + 3 - n\omega) - \frac{\varpi^n}{5\sqrt{5}}(3n + 3 + n\varpi) = \frac{3n+3}{5}.u_n - \frac{n}{5}.u_{n+1} .}$$

Avec Maple :

```
> R:=rsolve({x(n+4)-2*x(n+3)-
x(n+2)+2*x(n+1)+x(n)=0,x(0)=0,x(1)=1,x(2)=1,x(3)=3},x(n));
```

$$R := -\frac{\frac{2}{25}\sqrt{5}\left(-2\frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^n}{1-\sqrt{5}} + \frac{\left(-\frac{8}{5}+\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)(n+1)\left(-2\frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^n}{(1-\sqrt{5})^2}$$
$$+\frac{\frac{2}{25}\sqrt{5}\left(-2\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\sqrt{5}} + \frac{\left(-\frac{8}{5}-\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)(n+1)\left(-2\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{(1+\sqrt{5})^2}$$

Remarque : 1) On peut aussi utiliser les séries formelles $A = \sum_{n\geq 0} u_n X^n$ et $B = \sum_{n\geq 0} x_n X^n$.

$(1 - X - X^2).A = X$ et $(1 - X - X^2).B = X + X^2.A$, donc $A = \frac{X}{1-X-X^2}$ et $B = A + X.A^2$.

Il reste à décomposer en éléments simples les fractions A et B.

2) Les deux exercices précédents se généralisent sans peine aux suites récurrentes vérifiant P(T)(u) = v, où v est elle-même suite récurrente linéaire à coefficients constants Q(T)(v) = 0. Car alors (PQ)(T)(u) = 0, etc. La situation est analogue à celle des équations différentielles linéaires P(D)(y) = *f*, où *f* est une exponentielle-polynôme.

Exercice 5 : Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_{n+4} = x_{n+1} + x_n$ $(\forall n \geq 0)$.
Montrer que, pour tout *p* premier, *p* divise x_p. [Oral X, 2004]

Solution :

1) Une première approche… peu satisfaisante.

(x_n) est une banale suite récurrente linéaire dont l'équation caractéristique est $P(r) = r^4 - r - 1 = 0$.
Cette équation a deux racines réelles a et b, telles que $-1 < a < 0$, $1 < b < 2$, et deux racines complexes conjuguées c et d. Donc pour tout *n*, $x_n = \alpha.a^n + \beta.b^n + \gamma.c^n + \delta.d^n$.

Les conditions initiales conduisent à $(\forall n)$ $x_n = a^n + b^n + c^n + d^n$.

Donc $x_n = \text{tr } A^n$, où $A = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{Z})$, car a, b c et d sont les valeurs propres de A, matrice-compagnon du polynôme P.

On pourrait, certes, calculer a, b, c et d par la méthode de Ferrari, mais cela n'apporterait rien.

2ème approche. Placons-nous, non dans $M_n(\mathbf{C})$, mais dans $M_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ a un polynôme caractéristique $P(X) = X^4 - X - 1$ qui se scinde dans un surcorps **K** de **Z**/*p***Z**. Et A est trigonalisable dans un tel surcorps : $\exists P \in Gl_4(\mathbf{K})$ $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} a&*&*&*\\ 0&b&*&*\\ 0&0&c&*\\ 0&0&0&d \end{bmatrix}$

Peu importe ce sur-corps, et peu importe si a, b, c et d sont distinctes ou non dans ce sur-corps.
L'important est que **K** est un corps fini de caractéristique *p*. Et $\sigma : x \to x^p$ est un endomorphisme de corps de **K**, **l'endomorphime de Frobenius**. Il est injectif, donc bijectif.

$x_p = a^p + b^p + c^p + d^p = \sigma(a + b + c + d) = \sigma(0) = 0$ dans **K**, donc dans **Z**/*p***Z**. Cqfd.

Remarque 1 : Les calculs Maple ci-dessous montrent que P ne se scinde pas toujours dans **Z**/*p***Z**.

```
> P:=x^4-x-1;
```

$$P := x^4 - x - 1$$

```
> factor(P);
```

$$x^4 - x - 1$$

```
> solve(P=0,x);fsolve(P=0,x);
```

$$-.7244919590, 1.220744085$$

```
> for k from 1 to 9 do print(ithprime(k),Factor(P) mod ithprime(k));od;
```

$$2, x^4 + x + 1$$
$$3, x^4 + 2x + 2$$
$$5, x^4 + 4x + 4$$
$$7, (x+4)(x^3 + 3x^2 + 2x + 5)$$
$$11, (x^3 + 3x^2 + 9x + 4)(x+8)$$
$$13, (x^3 + 2x^2 + 4x + 7)(x+11)$$
$$17, (x+2)(x+5)(x^2 + 10x + 5)$$
$$19, x^4 + 18x + 18$$
$$23, (x^3 + 12x^2 + 6x + 2)(x+11)$$

Remarque 2 : l'exercice suivant généralise tout ceci.

Exercice 6 : Soit p un nombre premier.
Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbf{Z})$ $\operatorname{tr}(A^p) \equiv \operatorname{tr}(A) \pmod{p}$.
et que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{Z})^2$ $\operatorname{tr}((A+B)^p) \equiv \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \pmod{p}$.

Solution : On trouvera dans la RMS mai-juin 1994 (ex. 267 p. 691) une solution « élémentaire » de cet exercice. Elle respecte la lettre du programme, mais elle relève à mes yeux de mathématiques administratives. Bref, je la trouve artificielle, et je préfère sortir carrément du programme, mais donner une solution à mes yeux plus naturelle (mais niveau agrégation).

Le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ admet une clôture algébrique Ω_p, c'est à dire un sur-corps commutatif algébriquement clos, dont tous les éléments sont algébriques sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Ainsi, tout polynôme $P \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$ est scindé dans Ω_p, et toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est trigonalisable dans $M_n(\Omega_p)$.
Ce corps Ω_p est de caractéristique p, et l'application $\sigma : x \to x^p$ est un automorphisme de corps de Ω_p, appelé **automorphisme de Frobenius**. [σ est surjective car l'équation $x^p = y$ a toujours une solution, le polynôme $X^p - y$ étant scindé.]
De plus $\sigma(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, en vertu du petit théorème de Fermat et du fait que l'équation $x^p = x$ a au plus p racines.
Si $A \in M_n(\Omega_p)$, A est trigonalisable dans $M_n(\Omega_p)$ et on voit que $\operatorname{tr}(A^p) = \sigma(\operatorname{tr} A) \pmod{p}$.
Du coup, $\forall \bar{A} \in M_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ $\operatorname{tr}(\bar{A}^p) = \operatorname{tr} \bar{A}$, donc $\forall A \in M_n(\mathbf{Z})$ $\operatorname{tr}(A^p) \equiv \operatorname{tr}(A) \pmod{p}$.
De plus $\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{Z})^2$ $\operatorname{tr}((A+B)^p) \equiv \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \pmod{p}$, car en réduisant A et B modulo p :

$$\operatorname{tr}((\bar{A} + \bar{B})^p) = \sigma(\operatorname{tr}(\bar{A} + \bar{B})) = \sigma(\operatorname{tr} \bar{A}) + \sigma(\operatorname{tr} \bar{B}) = \operatorname{tr} \bar{A} + \operatorname{tr} \bar{B}.$$

Remarque : on pourrait plus économiquement se placer dans un corps de scindage des deux polynômes caractéristiques de A et B, qui est un corps fini.

Exercice 7 : Etudier la convergence des suites réelles définies par :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n + \frac{3}{4} c_n \ , \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{4} c_n \ , \quad c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{3}{4} b_n \ .$$

Solution :
Ces itérations barycentriques peuvent être traitées, soit par des méthodes linéaires, soit par l'analyse.

1) Méthodes linéaires.

Notant $X_n = {}^t(a_n\ b_n\ c_n)$, on a $X_{n+1} = A.X_n$, où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$. D'où $X_n = A^n.X_0$.

Nous voici amenés à étudier la suite (A^n) des puissances de A et sa limite.
Cela peut se faire par diagonalisation de A. Or A est stochastique : tous ses éléments sont ≥ 0, et la somme des éléments de chaque ligne vaut 1, de sorte que A.e = e, où $e = {}^t(1, 1, 1)$ et $1 \in \mathrm{Sp}\, A$.
Les deux autres valeurs propres sont complexes conjuguées de module < 1.
Donc (A^n) converge vers le projecteur sur l'espace propre Ker(A − I) parallèlement à la somme directe des deux autres espaces propres.
Avec Maple, ces calculs peuvent se faire, soit en réduisant A, soit en calculant directement le projecteur propre en tant de polynôme de Lagrange de A :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[0,1/4,3/4,3/4,0,1/4,1/4,3/4,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> c:=charpoly(A,x);eigenvals(A);alpha:=-1/2+I*sqrt(3)/4:beta:=-1/2-
I*sqrt(3)/4:
```

$$c := x^3 - \frac{9}{16}x - \frac{7}{16} \qquad 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} I\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} I\sqrt{3}$$

```
> k1:=kernel(A-1);k2:=kernel(A-alpha);k3:=kernel(A-beta);
```

$$k1 := \{[1, 1, 1]\}$$

$$k2 := \left\{\left[\frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right]\right\} \qquad k3 := \left\{\left[-\frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right]\right\}$$

```
> P:=transpose(matrix([op(k1),op(k2),op(k3)]));
R:=map(simplify,multiply(inverse(P),A,P));
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} I\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} I\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} I\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> Lim:=multiply(P,diag(1,0,0),inverse(P));
```

$$Lim := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```
> p:=simplify(interp([1,alpha,beta],[1,0,0],x));evalm(subs(x=A,p));
```

$$p := \frac{16}{39}x^2 + \frac{16}{39}x + \frac{7}{39} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Enfin, on pouvait noter que A est à la fois cyclique et stochastique…

2ème méthode : par l'analyse.

Notons $m_n = \min(a_n, b_n, c_n)$ et $M_n = \max(a_n, b_n, c_n)$, de sorte que $I_n = [m_n, M_n]$ est le plus petit segment contenant a_n, b_n et c_n (leur enveloppe convexe).

Nous allons montrer que (I_n) est une suite de segments emboîtés, contenant tous $g = \frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0)$ dont la longueur L_n tend vers 0. Il est clair que $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} \in I_n$, donc $I_{n+1} \subset I_n$.

De plus, la suite $\frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n)$ est constante, donc g appartient à chacun des I_n.

I_{n+1} n'est pas toujours inclus dans l'intérieur de I_n, mais je dis que $L_{n+2} \leq \frac{7}{8} L_n$.

En effet, $A^2 = \begin{bmatrix} 6/16 & 9/16 & 1/16 \\ 1/16 & 6/16 & 9/16 \\ 9/16 & 1/16 & 6/16 \end{bmatrix}$. On a $a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2} \in [\frac{15m_n+M_n}{16}, \frac{m_n+15M_n}{16}]$.

Si par exemple $a_n = m_n \leq b_n$, $c_n \leq M_n$, avec b_n ou $c_n = M_n$, alors :

$$\frac{15}{16}m_n + \frac{1}{16}M_n \leq a_{n+2} = \frac{6}{16}m_n + \frac{9}{16}b_n + \frac{1}{16}c_n \leq \frac{1}{16}m_n + \frac{15}{16}M_n .$$

$$\frac{15}{16}m_n + \frac{1}{16}M_n \leq b_{n+2} = \frac{1}{16}m_n + \frac{6}{16}b_n + \frac{9}{16}c_n \leq \frac{1}{16}m_n + \frac{15}{16}M_n .$$

$$\frac{15}{16}m_n + \frac{1}{16}M_n \leq c_{n+2} = \frac{9}{16}m_n + \frac{1}{16}b_n + \frac{6}{16}c_n \leq \frac{1}{16}m_n + \frac{15}{16}M_n . \quad \text{Etc.}$$

4. *Polynômes d'endomorphismes.*

Exercice 1 : Le problème du chamelier.
Un chamelier circule entre les trois oasis A, B et C. Il peut aller en une étape de A à B, de C à B et de B à C, et enfin de C à A. Chercher le nombre d'itinéraires en 100 étapes de C à A.

Solution :

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[0,1,0,0,0,1,1,1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(A^100);%[3,1];
```

$$\begin{bmatrix} 288627200960 & 506505428836 & 382349636061 \\ 382349636061 & 670976837021 & 506505428836 \\ 506505428836 & 888855064897 & 670976837021 \end{bmatrix}$$

$$506505428836$$

```
> M:=minpoly(A,x);
```

$$M := -1 - x + x^3$$

```
> R:=rem(x^100,M,x);evalm(subs(x=A,R));
```

$$R := 382349636061x^2 + 506505428836x + 288627200960$$

$$\begin{bmatrix} 288627200960 & 506505428836 & 382349636061 \\ 382349636061 & 670976837021 & 506505428836 \\ 506505428836 & 888855064897 & 670976837021 \end{bmatrix}$$

On en déduit que $L_{n+2} \leq \frac{7}{8} L_n$, donc $L_{2p} \leq (\frac{7}{8})^p.L_0$ et $L_{2p+1} \leq (\frac{7}{8})^p.L_1$. cqfd.

Exercice 2 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers la matrice d'une projection. Déterminer cette matrice.

Application : Soit (M_p) une suite de points d'un espace affine réel de dimension finie, telle que, pour tout p, M_{p+3} est l'isobarycentre de M_p, M_{p+1} et M_{p+2}. Montrer que la suite (M_p) converge vers un point Ω, dont on donnera les coordonnées barycentriques en fonction de M_0, M_1 et M_2 .

Solution : [Oral Mines 2002, Ecricome 2002]

On peut sans dommage supposer $A \in M_n(\mathbf{C})$.

La matrice A annule le polynôme $P(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$, qui est scindé sans facteur carré.

Or $P(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1 = (X-1)(3X^2 + 2X + 1) = 3(X-1)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$, où $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{2}}{3}$.

En vertu du théorème de Schreier, A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{Sp}\, A \subset \{1, \alpha, \overline{\alpha}\}$.

Soit $\Omega \in Gl_n(\mathbf{C})$ telle que $\Omega^{-1} A\, \Omega = \mathrm{diag}(I_p, \alpha I_q, \overline{\alpha} I_r) = D$, $(p + q + r = n)$.

$\Omega^{-1} A^k\, \Omega = \mathrm{diag}(I_p, \alpha I_q, \overline{\alpha} I_r) = D^k \to \mathrm{diag}(I_p, O_q, O_r)$ quand $k \to +\infty$, car $|\alpha| < 1$.

Conclusion : La suite (A^k) tend vers $P = \Omega.\mathrm{diag}(I_p, O_q, O_r).\Omega^{-1}$.

Géométriquement, P est le projecteur sur le noyau Ker(A – I) parallèlement à la somme directe

$$\mathrm{Ker}(A - \alpha I) \oplus \mathrm{Ker}(A - \overline{\alpha} I) = \mathrm{Ker}(3A^2 + 2A + I_n) .$$

Ce projecteur est un polynôme de A : c'est le polynôme L(A), où L(X) est le polynôme de Lagrange $L(1) = 1$, $L(\alpha) = L(\overline{\alpha}) = 0$. $L(X) = \frac{(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})} = \frac{1}{6}(3X^2 + 2X + 1)$.

Conclusion : La suite (A^k) tend vers $P = \frac{1}{6}(3A^2 + 2A + I_n)$.

A noter que Im P = Ker(I – A)

Application géométrique :

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{OM}_{p+3} \\ \overrightarrow{OM}_{p+2} \\ \overrightarrow{OM}_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM}_{p+2} \\ \overrightarrow{OM}_{p+1} \\ \overrightarrow{OM}_{p} \end{bmatrix}, \text{ donc } \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM}_{p+2} \\ \overrightarrow{OM}_{p+1} \\ \overrightarrow{OM}_{p} \end{bmatrix} = A^p \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM}_{2} \\ \overrightarrow{OM}_{1} \\ \overrightarrow{OM}_{0} \end{bmatrix}, \text{ où } A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice A satisfait aux conditions ci-dessus, donc $A^p \to P = \frac{1}{6}(3A^2 + 2A + I_3) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Du coup $M_p \to \Omega$, barycentre des points M_0, M_1 et M_2 pondérés resp. par $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Remarque : A est stochastique, et P est un projecteur stochastique.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[1/3,1/3,1/3,1,0,0,0,1,0]);P:=1/6*(3*X^2+2*X+1);
evalm(subs(X=A,P));
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P := \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{1}{6} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Exercice 3 bis : Pour $p \geq 1$, soit $Q_p(X) = p\, X^p - (X^{p-1} + \ldots + X + 1)$.

1) Montrer que 1 est racine simple de Q_p.

2) Montrer que toute racine de Q_p autre que 1 est de module < 1.
3) Montrer que Q_p n'admet que des racines simples dans **C**.
4) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $Q_p(A) = 0$. Convergence et limite éventuelle de $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$?

Solution : [Oral Mines MP 2012, RMS n° 486]
Notons $A_p(X) = (X-1).Q_p(X) = p\,X^{p+1} - (p+1)\,X^p + 1$.
On a $A_p'(X) = p\,(p+1)\,X^p - p\,(p+1)\,X^{p-1}$.
Et $A_p''(X) = p^2\,(p+1)\,X^{p-1} - p\,(p^2-1)\,X^{p-2}$.
1) Pour montrer que 1 est racine simple de Q_p, il suffit de montrer que 1 est racine double de A_p.
Or $A_p(1) = A_p'(1) = 0$, $A_p''(1) \neq 0$.
2) Si z est une racine de Q_p telle que $|z| > 1$, on aurait $z^p = \frac{1}{p}(z^{p-1} + \dots + z + 1)$.
Or le second membre est de module $\leq |z|^{p-1}$; impossible.
Si z est une racine de Q_p telle que $|z| = 1$, on aurait encore $z^p = \frac{1}{p}(z^{p-1} + \dots + z + 1)$.
Le cas d'égalité dans l'inégalité du triangle donne 1 et z positivement liés, donc z = 1.
3) Soit z une racine double de Q_p autre que 1.
Alors $A_p(z) = p\,z^{p+1} - (p+1)\,z^p + 1 = 0$ et $A_p'(z) = p\,(p+1)\,z^{p-1}\,(z-1) = 0$.
De la 2de relation on tire z = 0, mais c'est impossible.
4) Il découle de ce qui précède et du théorème de Schreier que A annule un polynôme scindé sans facteurs carrés, donc est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$.
De plus, son spectre est inclus dans l'ensemble des racines de Q_p.
La suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers le projecteur sur Ker(A – I) parallèlement à la somme directe des autres espaces propres. A noter que Ker(A – I) peut être réduit à {0}, auquel cas (A^k) tend vers 0.

Exercice 4 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $3A^2 = {}^tA + A + I_n$. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers la matrice d'une projection.

Solution : [Oral Mines MP 2011, RMS n° 457].
${}^tA = 3A^2 - A - I_n$, donc $A = 3\,{}^tA^2 - {}^tA - I_n = 3\,(3A^2 - A - I)^2 - (3A^2 - A - I) - I_n$
Cela s'écrit : $(3A^2 - A - I)^2 - A^2 = 0$, i.e. : $(3A^2 - 2A - I).(3A^2 - I) = 0$.
A annule le poynôme $P(X) = (3X^2 - 2X - I).(3X^2 - I) = (X-1)(3X+1)(X\sqrt{3}+1)(X\sqrt{3}-1)$
qui est scindé à racines simples. Donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$, et

$$\mathrm{Sp}\,A \subset \{ 1, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \}.$$

Conclure est alors facile.
Remarque : on aurait pu supposer A complexe.

Exercice 5 : 1) Montrer que deux matrices A et $B \in M_n(\mathbf{K})$ semblables ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal.
2) Montrer que toute matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ est semblable, soit à $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, soit à $\begin{bmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{bmatrix}$, où T = tr A et D = det A.
3) Application : si **K** est de cardinal q, combien y-a-t-il de classes de similitude dans $M_2(\mathbf{K})$?
4) Montrer que deux matrices A et $B \in M_2(\mathbf{K})$ ayant même polynôme et même polynôme minimal sont semblables.

5) Que dire des matrices A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

Solution : 1) Si $B = P^{-1}.A.P$, alors $\det(B - X.I) = \det(A - X.I)$ et, pour tout polynôme $f \in \mathbf{K}[X]$, $f(B) = P^{-1}.f(A).P$, de sorte que A et B ont même idéal annulateur.

2) Si A n'est pas scalaire, il existe un vecteur x_0 qui n'est pas colinéaire à son image. $(x_0, A\,x_0)$ est donc une base de $\mathbf{K}^2$. La matrice de l'endomorphisme canoniquement attaché à A est alors de la forme $\begin{bmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{bmatrix}$. L'identification des polynômes caractéristiques donne T = tr A et D = det A.

3) $M_2(\mathbf{K})$ a $q + q^2$ classes de similitude, car les matrices des deux types précédants sont semblables ssi elles sont égales.
4) Si A et B ont même caractéristique P et même minimal M, alors :
• si $M = X - a$ est de degré 1, $A = B = a\mathrm{I}$.
• si deg M = 2, A et B ont même trace T et même déterminant D, et sont semblables à $\begin{bmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{bmatrix}$.

5) A et B ont pour polynôme caractéristique $(X - 1)^4$, et pour polynôme minimal $(X - 1)^2$.
Cela découle de ce qu'une matrice-bloc M = $\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$ a

– pour polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \chi_P(X).\chi_Q(X)$, produit des caractéristiques,
– pour polynôme minimal $\mu_M(X) = \mu_P(X) \vee \mu_Q(X)$, ppcm des minimaux.
Cependant, A et B ne sont pas semblables, car Ker(A – I) est de dimension 2, et Ker(B – I) de dimension 3.
Remarque finale : la réponse complète est donnée par la théorie des facteurs invariants : deux matrices sont semblables ssi elles ont mêmes facteurs invariants.

Exercice 6 : exemples et contre-exemples.
1) Donner des exemples de matrices, ou d'endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie :
• diagonalisables mais non diagonales, trigonalisables mais non diagonalisables, non trigonalisables ;
• ayant un nombre fini de sous-espaces stables, une infinité de sous-espaces stables ;
2) Indiquer 2 matrices diagonalisables dont la somme, resp. le produit, ne sont pas diagonalisables.

Solution :
1) A = $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, avec $a \neq b$, est diagonalisable mais non diagonale.

N = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et T = $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ sont trigonalisables, et même trigonales, mais non diagonalisables.
Si le corps est algébriquement clos, toute matrice est trigonalisable…
A = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ($b \neq 0$), ne sont pas trigonalisables dans $M_2(\mathbf{R})$.

A = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ne sont pas trigonalisables dans $M_2(\mathbf{Q})$, resp. $M_3(\mathbf{Q})$.

A = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ne sont pas trigonalisables dans $M_2(\mathbf{Z/5Z})$, resp. $M_3(\mathbf{Z/5Z})$.

Si $a \neq b$, A = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, considérée comme endomorphisme de $\mathbf{K}^2$, admet 4 sous-espaces stables.

A = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ a pour sous-espaces stables tous les sev de $\mathbf{K}^2$; il y en a une infinité si **K** est infini.

2) Le type même de matrice non diagonalisable est N = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il suffit de trouver deux matrices diagonalisables A et B telles que A + B = N, resp. A.B = N.

Dans le premier cas, il suffit de prendre A = $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, avec $a \neq b$.

Dans le second cas, il suffit de prendre A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ou $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ avec $a \neq b$, et B = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Exercice 7</u> : <u>Lemme de Schur</u>. Soient E un **C**-espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{L}(E)$.
On suppose que {0} et E sont les seuls sous-espaces stables par tous les endomorphismes de $\mathfrak{R}$.
Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $\forall h \in \mathfrak{R} \quad f \circ h = h \circ f$. Montrer que f est une homothétie.

<u>Solution</u> : Le corps **C** étant algébriquement clos, f admet au moins une valeur propre λ.
Comme f commute avec tous les éléments de $\mathfrak{R}$, Ker($f - \lambda I$) est stable par tous les éléments h de $\mathfrak{R}$.
Comme il est non réduit à {0}, il est égal à E, et f est l'homothétie λI . cqfd.
<u>Remarque</u> : ce résultat tombe en défaut si le corps n'est pas clos.

Ainsi, dans $\mathbf{R}^2$, A = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'a pas d'autres sous-espaces stables que {0} et $\mathbf{R}^2$.

Mais son commutant est leplan $\left\{ \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \right\}$. Idem en prenant $\mathfrak{R} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \right\}$

<u>Exercice 8</u> : Soient **K** un corps algébriquement clos, E un **K**-ev de dimension finie, et $u \in \mathfrak{L}(E)$.
Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ Sp P(u) = P(Sp u).
Ce résultat reste-il vrai si **K** est quelconque ?

<u>Solution</u> :

1) Si **K** est clos, u est trigonalisable dans une base $\mathfrak{B}$ de E :

Mat(u, $\mathfrak{B}$) = $\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$. Alors Mat(P(u), $\mathfrak{B}$) = $\begin{bmatrix} P(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\lambda_2) & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{bmatrix}$.

Ce résultat reste vrai si u est trigonalisable.

2) <u>Dans le cas général, on a seulement P(Sp u) ⊂ Sp P(u)</u>.

En effet, si $\lambda \in$ Sp u et si $x \neq 0$ est tel que $u(x) = \lambda x$, alors $[P(u)](x) = P(\lambda).x$.

Cela se montre d'abord pour $P = X^k$ par récurrence, puis pour P quelconque par linéarité.

Soit maintenant $u \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^2)$ de matrice A = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; alors u^2 a pour matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

De sorte que : Sp u = ∅, tandis que Sp u^2 = { −1 }.

<u>Exercice 9</u> : Soit $n \geq 2$. Existe-t-il une forme linéaire f sur $M_n(\mathbf{K})$ telle que, pour toute A, f(A) soit valeur propre de A ?

<u>Solution</u> :
<u>Réponse</u> : non, sinon cela se saurait !

Supposons $n = 2$; soient A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. On a A = B + C.

On aurait $f(A) = f(B) + f(C)$. Or $f(A) = \pm 1$, $f(B) = f(C) = 0$, car B et C ont 0 pour seule valeur propre.
[Cela reste vrai même en caractéristique 2]

Dans le cas général, soient A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

B et C étant nilpotentes, on aurait $f(B) = f(C) = 0$. Or A étant inversible, $f(A)$ est non nul.

Autre solution, plus savante : si f existait, f serait non nulle, car $f(I) = 1$.

L'hyperplan H d'équation $f(M) = 0$ et le groupe linéaire $Gl_n(\mathbf{K})$ ne se rencontreraient pas.
Or tout le monde sait qu'ils se rencontrent !!!

Exercice 10 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall(i, j)$ $a_{ij} \geq 0$ et $\forall i$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$. Montrer que $\det(I - A) > 0$.

Solution : [Oral Mines 1992]
Si l'on munit $\mathbf{C}^n$ de la norme $\|X\| = \max |x_i|$, alors $\|AX\| < \|X\|$ pour tout $X \neq 0$.
On en déduit que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ $|\lambda| < 1$.
Le polynôme caractéristique de A, $P(X) = \det(X.I - A)$ est unitaire et sans racine réelle dans $[1, +\infty[$.
Par conséquent, $P(1) = \det(I - A) > 0$.

Remarque : tout ceci se rattache à la localisation des valeurs propres : disques de Gershgorine, etc.

Exercice 11 : Calculer les déterminants : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & n & \dots & \dots & 3 \\ 3 & \dots & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -n & 1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & -n & \dots & \dots & 3 \\ -3 & \dots & \dots & 1 & 2 \\ -2 & -3 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix}$.

Solution : Ce sont des déterminants cycliques que l'on va calculer par diagonalisation de matrices.
Les deux matrices s'écrivent $P(\Omega) = I + 2.\Omega + 3.\Omega^2 + \dots + n.\Omega^{n-1}$, où :

$$P(X) = 1 + 2.X + 3.X^2 + \dots + n.X^{n-1} = D(1 + X + \dots + X^n) = D\left(\frac{X^{n+1}-1}{X-1}\right) = \frac{nX^{n+1}-(n+1)X^n+1}{(X-1)^2}.$$

Et $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dans le premier cas , $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dans le second cas.

La première matrice vérifie $\Omega^n = I$ et a pour valeurs propres $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$, où $\omega = \exp\frac{2i\pi}{n}$.

Elle est diagonalisable, et l'on a : $D_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n(\omega^k-1)}{(\omega^k-1)^2} = \frac{n^n.(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\omega^k-1}$.

Or $\prod_{k=1}^{n-1}(\omega^k-1) = (-1)^{n-1} Q'(1) = n$, où $Q(X) = X^n - 1$. Finalement $D_n = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}.(n+1)}{2}$.

La seconde matrice vérifie $\Omega^n = -I$ et a pour valeurs propre $\omega_k = \exp\frac{i\pi(2k+1)}{n}$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

Du coup , $\Delta_n = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n+2-n\omega_k}{(\omega_k-1)^2}$. Or $X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$ implique :

$\prod_{k=0}^{n-1}(n+2-n\omega_k) = n^n \prod_{k=0}^{n-1}(\frac{n+2}{n}-\omega_k) = (n+2)^n + n^n$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k-1)^2 = 4$. Finalement $\Delta_n = \frac{(n+2)^n+n^n}{4}$.

> Conclusion : $D_n = (-1)^{n-1}\, \frac{n^{n-1}.(n+1)}{2}$ et $\Delta_n = \frac{(n+2)^n+n^n}{4}$.

Remarque : On peut calculer D_n par une méthode plus élémentaire. En revanche, je ne vois pas d'autre méthode de calcul de Δ_n.

> **Exercice 12** : Soit p premier, $M = M(a_0, ..., a_{p-1}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & ... & ... & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_2 & ... & ... & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_{p-1} & a_0 \end{bmatrix} \in M_p(\mathbf{Z})$.
>
> Montrer que $\det M \equiv a_0 + ... + a_{p-1} \pmod p$.

Solution :

M est une matrice cyclique, ainsi que sa réduction modulo p, qui est cyclique dans $M_p(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

$M = P(\Omega)$, où $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{p-1}X^{p-1}$.

On a bien sûr $\Omega^p = I$; autrement dit Ω annule le polynôme $\Phi(X) = X^p - 1$, qui est d'ailleurs à la fois son polynôme caractéristique et son polynôme minimal. Mais, tandis que dans **C**, Φ est scindé à racines simples, dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, Φ n'a qu'une racine $\Phi = (X-1)^p$, autrement dit $\Omega - I$ est nilpotente.

Soit $Q \in Gl_p(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ telle que $Q^{-1}.\Omega.Q = \begin{bmatrix} 1 & * & ... & ... & * \\ 0 & 1 & * & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 1 & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix} = T$.

Alors $Q^{-1}.M.Q = Q^{-1}.P(\Omega).Q = P(T) = \begin{bmatrix} P(1) & * & ... & ... & * \\ 0 & P(1) & * & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & P(1) & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & P(1) \end{bmatrix}$.

Du coup, $\det M = P(1)^p = P(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (petit théorème de Fermat). CQFD.

Remarque : $\Omega - I$ étant nilpotente d'indice p, on peut choisir Q telle que $Q^{-1}.\Omega.Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

> **Exercice 13** : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^N = I_n$ avec $N \in \mathbf{N}^*$. Montrer $\dim \mathrm{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} tr(A^k)$.

Solution : cet exercice classique peut se traiter de deux façons bien différentes.

A noter qu'on peut supposer sans dommage $A \in M_n(\mathbf{C})$.

1ère méthode : je dis que $P = \frac{1}{N}(I_n + A + A^2 + \dots + A^{N-1}) = \frac{1}{N}(A + A^2 + \dots + A^N)$

est un projecteur tel que $\text{Im } P = \text{Ker}(A - I_n)$. En effet :
$AP = P = PA$, donc $A^k.P = P$ pour tout k, et finalement $P.P = P$.
De plus, $(A - I_n).P = 0$, donc $\text{Im } P \subset \text{Ker}(A - I_n)$.
Enfin, si $X \in \text{Ker}(A - I_n)$, $AX = X$, donc $A^k.X = X$ pour tout k, et finalement $P.X = X$.
Il reste à passer à la trace : $\text{tr } P = \text{rg } P = \dim \text{Ker}(A - I_n)$.

2ème méthode : A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$ et $\text{Sp } A \subset U_N$, groupe des racines N-èmes de l'unité.
A est donc semblable à $\text{diag}(I_h, z_1, \dots, z_m)$, où $z_1, \dots, z_m$ sont des racines N-ièmes de l'unité $\neq 1$.
Mais alors $(\forall k)$ $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_k)^i = 0$, donc P est semblable à $\text{diag}(I_h, 0, \dots, 0)$.
On retrouve ce qui précède !
Remarque : l'exercice 12 généralise tout ceci.

Exercice 14 : Si E est un espace vectoriel et G est un sous-groupe de Gl(E), un sous-espace F de E est dit G-stable si $(\forall g \in G)$ $g(F) \subset F$. Soit $E = \mathbf{R}^n$ et G le groupe des matrices de permutation.
Montrer que les seuls sous-espaces G-stables de E sont {0}, D, H et E, où D est la droite engendrée par le vecteur (1, 1, …, 1) et H l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

Solution : Soit F un sous-espace G-stable non inclus dans D. Il contient alors un vecteur x ayant deux coordonnées distinctes $x_i \neq x_j$. Par G-stabilité, il contient $(x_i, x_j, x_1, \dots, x_n)$ et $(x_j, x_i, x_1, \dots, x_n)$, donc leur différence $(x_i - x_j, x_j - x_i, 0, \dots, 0)$, et finalement $(1, -1, 0, \dots, 0)$.
Par G-stabilité, F contient aussi $(0, 1, -1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$, …, $(0, \dots, 0, 1, -1)$. Ces vecteurs forment une base de l'hyperplan H. Par suite F contient H, donc F = H ou E.
Ainsi, F = {0}, D, H ou E. Réciproque facile. cqfd.

Exercice 15 : Soit $(G, \times)$ un groupe à N éléments, $\varphi : G \to Gl_n(\mathbf{R})$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que $\pi = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\varphi(g)$ est un projecteur.

b) Montrer que $\text{tr } \pi = \dim X$, où $X = \{ x \in \mathbf{R}^n ; \forall g \in G \ \ \varphi(g)(x) = x \}$.
En déduire que $\sum_{g\in G} tr(\varphi(g)) = 0 \Rightarrow \sum_{g\in G}\varphi(g) = 0$.

c) Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$?

Solution :
a) Soit $h \in G$. On a $\pi \circ \varphi(h) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\varphi(g) \circ \varphi(h) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G}\varphi(g.h) = \frac{1}{N}\sum_{g'\in G}\varphi(g') = \pi$,

car, lorsque g décrit G, $g' = gh$ décrit G. Du coup $\pi \circ \pi = \pi \circ \frac{1}{N}\sum_{h\in G}\varphi(h) = \pi$.

b) Montrons que $\text{Im } \pi = X$.
$(\forall h \in G)$ $\varphi(h) \circ \pi = \pi \Rightarrow (I - \varphi(h)) \circ \pi = 0 \Rightarrow \text{Im } \pi \subset \text{Ker}(I - \varphi(h))$. Donc $\text{Im } \pi \subset X$.
Soit $x \in X$. On a $\forall g \in G$ $\varphi(g)(x) = x$, donc $\pi(x) = x$ en passant à la moyenne. Ainsi $x \in \text{Im } \pi$.
Conséquence : $\sum_{g\in G} tr(\varphi(g)) = 0 \Leftrightarrow \text{tr } \pi = 0 \Leftrightarrow \pi = 0 \Leftrightarrow \sum_{g\in G}\varphi(g) = 0$.
En effet, si π est un projecteur, $\text{tr } \pi = 0 \Rightarrow \pi = 0$.

c) Soit φ le morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $Gl_n(\mathbf{R})$ qui à σ associe sa matrice de permutation.
$\text{Tr } \varphi(\sigma) = F(\sigma)$, nombre de points fixes de σ

$X = \{ x \in \mathbf{R}^n ; \forall\sigma \in \mathbb{S}_n \ \varphi(\sigma)(x) = x \} = \mathbf{R}.e$, où $e = (1, 1, \dots, 1)$..

$\mathrm{Tr}\,\pi = \frac{1}{N}\sum_{\sigma\in S_n} F(\sigma)$ est le nombre moyens de points fixes des permutations. Ce nombre est dim X = 1.

Remarques : 1) a) et b) restent vraies en caractéristique nulle.
2) On peut aussi trouver c) par combinatoire, ainsi que l'écart-type de la distribution des points fixes.

Exercice 16 : Trouver les matrices $M \in M_2(\mathbf{R})$ d'ordre fini dans $Gl_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire telles qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^n = I_2$.

Solution :

Exercice 17: Soit $M \in M_2(\mathbf{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Solution : Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une telle matrice.

1) Elle annule le polynôme scindé sans facteur carré $X^n - 1$, donc elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{Sp}\,M \subset U_n$, ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
2) Comme M est réelle, ses valeurs propres sont toutes deux réelles, ou complexes conjugués.
• Dans le premier cas, $\mathrm{Sp}\,M \subset \mathbf{R} \cap U_k \subset \{+1, -1\}$, et $\exists P \in Gl_2(\mathbf{C})\ P^{-1}.M.P = \mathrm{diag}(\pm1, \pm1)$.
Donc $M = I$, $-I$, ou $M^2 = I$.
• Dans le second cas, $\exists P \in Gl_2(\mathbf{C})\ \ P^{-1}.M.P = \mathrm{diag}(\alpha, \overline{\alpha})$, où $\alpha = \exp\frac{2ik\pi}{n}$ $(1 \le k \le n-1)$.
De plus tr $M = a + d = 2.\cos\frac{2k\pi}{n} \in \mathbf{Z} \cap]-2, +2[= \{-1, 0, +1\}$.
Donc $\alpha \in \{ \omega, i, j \}$ où $\omega = \exp\frac{i\pi}{3}$.
♦ Si $P^{-1}.M.P = \mathrm{diag}(\omega, \overline{\omega})$, $M^2 - M + I = 0$, donc $M^3 = -I$ et $M^6 = I$.
♦ Si $P^{-1}.M.P = \mathrm{diag}(i, -i)$, $M^2 = -I$, donc $M^4 = I$.
♦ Si $P^{-1}.M.P = \mathrm{diag}(j, \overline{j})$, $M^2 + M + I = 0$, donc $M^3 = I$.
Dans tous les cas, $M^{12} = I$.

Exercice 18 : Soit A une matrice carrée d'ordre n. Montrer l'équivalence des propriétés :
i) A est inversible ;
ii) Le polynôme minimal de A est de valuation nulle ;
iii) Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ de valuation nulle tel que P(A) = O.

Solution :
i) ⇒ ii) par contraposition. Si le polynôme minimal de A était divisible par X, $\mu_A(X) = P(X).X$, alors on aurait P(A).A = 0, donc P(A) = 0, puisque A est inversible. Contredisant la minimalité de $\mu_A(X)$.
ii) ⇒ iii) est évident.
iii) ⇒ i) Ce polynôme P est premier avec X. Par Bezout, il existe U et V tels que UX + VP = 1, donc, après substitution de A à X, I = U(A).A. Cela montre que A est inversible, et a pour inverse un polynôme de A.

Exercice 19 : Soient A une matrice carrée de polynôme minimal $\mu_A(X)$, et d = deg $\mu_A(X)$.
1) Montrer que $E = \{P(A) ; P\in\mathbf{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbf{K})$ de dimension d.

2) Soit $B = P(A) \in E$. Montrer que B est inversible ssi $P \wedge \mu_A = 1$, et qu'alors $B^{-1} \in E$. Comment trouver Q tel que $B^{-1} = Q(A)$?

Solution : Il s'agit de décrire l'algèbre **K**[A] des polynômes de A.

1) Je dis que $(I, A, A^2, \dots, A^{d-1})$ est une base de E.

En effet, si R est le reste euclidien de P par $\mu_A(X)$, on a $P(A) = R(A)$ après substitution.
Donc $E = \mathrm{Vect}(I, A, A^2, \dots, A^{d-1})$. Et $(I, A, A^2, \dots, A^{d-1})$ est libre par minimalité de $\mu_A(X)$.

2) Caractérisation des inversibles de **K**[A].

Si $P \wedge \mu_A = 1$, par Bezout, il existe (U, V) tel que $U.P + V.\mu_A = 1$.
Après substitution, il vient $U(A).P(A) = 1$, donc B est inversible et $B^{-1} = U(A) \in E$.
On peut d'ailleurs supposer U de degré < d quitte à le diviser par $\mu_A = 1$.
Le polynôme U se détermine via l'algorithme d'Euclide étendu.
Réciproquement, si B est inversible, son inverse est un polynôme de B, donc de A (cf. exercice précédent). $P(A).Q(A) = I$ implique que $\mu_A(X)$ divise $P(X).Q(X) - 1$, donc que $P \wedge \mu_A = 1$.

Remarque : Au fond, **K**[A] est isomorphe à l'algèbre quotient $\mathbf{K}[X]/(\mu_A(X))$.

Exercice 20 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie *n*, u un endomrophisme de E.
1) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$;

ii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où $A \in Gl_r(\mathbf{K})$, $0 \le r \le n$;

iii) Le polynôme minimal de u n'est pas divisible par X^2 ;

iv) $u \in \mathrm{Vect}(u^2, u^3, \dots)$.

2) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces conditions, ne les vérifiant pas.

Solution : Cet exercice reprend et approfondit un exercice antérieur.
i) $\Rightarrow$ ii). Supposons $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$.
Je dis que Im u est un sous-espace u-stable et que u induit un automorphisme de Im u.
Im u est toujours u-stable, car $u(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Im}\, u$. Soit v l'endomorphisme induit.
$\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$, donc v est injectif.
$\mathrm{Im}\, v = u(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}\, u^2 = \mathrm{Im}\, u$ en vertu de ii) ; donc v est surjectif.
[Comme nous sommes en dimension finie, l'injectivité seule concluait.]
Soient alors $\mathcal{B}'$ une base de Im u, $\mathcal{B}''$ une base de Ker u, et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$.
La matrice de u relativement à cette base est de la forme $\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où $A \in M_r(\mathbf{K})$, $0 \le r \le n$, puis que Im u est u-stable. Et A est inversible, comme matrice de v relativement à $\mathcal{B}'$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Supposons que u ait pour matrice $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où $A \in Gl_r(\mathbf{K})$.

Le polynôme minimal de M est le ppcm des minimaux de A et de O_{n-r}.
Si $0 < r < n$, le minimal de A n'est pas divisible par X, celui de O_{n-r} est X : leur ppcm est divisible par X, et non par X^2. Si $r = n$, le minimal de M n'est pas divisible par X. Si $\mathbf{r} = 0$, c'est X.
iii) $\Rightarrow$ iv). Ecrivons $\mu_u(X) = a + bX + \text{etc.}$
Soit $a \ne 0$ et alors $I \in \mathrm{Vect}(u, u^2, \dots)$, donc a fortiori $u \in \mathrm{Vect}(u^2, u^3, \dots)$.
Soit $a = 0$ et $b \ne 0$, et alors $u \in \mathrm{Vect}(u^2, u^3, \dots)$.
iv) $\Rightarrow$ i). En effet, iv) implique aisément $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$, condition qui, on le sait, équivaut à i).

2) Exemples et contre-exemples.

Diagonalisables et bijectifs vérifient ces conditions. Les nilpotents non nuls ne la vérifient pas.

Exercice 21 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme de E.

1) Montrer que les suites (Ker u^k) et (Im u^k) sont, l'une croissante, l'autre décroissante, et stationnaires à partir d'un même indice p.

2) Montrer que cet indice p n'est autre que la valuation du polynôme minimal de u.

Solution : Oral ENS 1997, RMS juin 98, n° 13.

Exercice 22 : Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X] \quad P(X + n + 1) = \sum_{k=0}^{n} a_k.P(X+k).$$

Solution : [Oral Mines MP 2010, RMS n° 423].

Considérons l'endomorphisme T : P(X) → P(X + 1) de $\mathbf{R}_n[X]$.

La relation demandée s'écrit $T^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k.T^k$.

Autrement dit, on cherche un polynôme de degré $n + 1$ annulant T.

Or T annule son polynôme caractéristique. Les a_k ne sont autres que les coefficients de ce polynôme caractéristique. Pour les obtenir concrètement, il suffit de calculer la matrice de T relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. Or cette matrice est trigonale et n'a que des 1 sur la diagonale.

Le polynôme caractéristique de T est $(x - 1)^{n+1}$. Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k.T^k = 0$, et

$$T^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k} C_{n+1}^k.T^k.$$

Ainsi : $$P(X + n + 1) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k} C_{n+1}^k.P(X+k).$$

Autre solution, plus dogmatique : Considérons l'opérateur Δ = T – I. Il abaisse le degré de 1 lorsque ce degré est ≥ 1. Par conséquent, $\Delta^{n+1} = 0$, et l'on retombe sur ses pattes.

Remarque : Attention, les a_k dépendent de n. Il vaudrait mieux les noter $(a_{0,n}, a_{1,n}, \dots, a_{n,n})$. Si l'on passe de n à $n + 1$, il faut changer la liste.

Exercice 23 : Soit f une fonction de **R** dans **R** vérifiant : $(\forall x) \quad f(x + 2) + f(x + 1) - 2.f(x) = 0$.

Montrer que $(\forall x) \quad 512.f(x) = 341.f(x + 9) + 171.f(x + 10)$.

Solution : Belle application de la notion de polynôme d'endomorphisme !

Soit T l'endomorphisme de $\mathfrak{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ qui à f associe $T(f)$ définie par $T(f)(x) = f(x + 1)$.

Il s'agit de montrer que $\mathrm{Ker}(T^2 + T - 2.I) \subset \mathrm{Ker}(171.T^{10} + 341.T^9 - 512.I)$.

Cela découle de ce que le polynôme $B = X^2 + X - 2$ divise le polynôme $A = 171.X^{10} + 341.X^9 - 512$. Comme $B = (X - 1)(X + 2)$, il suffit de vérifier que $A(1) = A(-2) = 0$.

Maple fait très bien cela :

```
> A:=x^2+x-2;B:=171*x^10+341*x^9-512;
```

$$A := x^2 + x - 2$$

$$B := 171\,x^{10} + 341\,x^9 - 512$$

```
> rem(B,A,x);quo(B,A,x);
```

$$0$$

$$171\,x^8 + 170\,x^7 + 172\,x^6 + 168\,x^5 + 176\,x^4 + 160\,x^3 + 192\,x^2 + 128\,x + 256$$

Remarque : Déterminons l'expression générale des fonctions considérées.
En vertu du théorème des noyaux, $\mathrm{Ker}(T^2 + T - 2.I) = \mathrm{Ker}(T - I) \oplus \mathrm{Ker}(T + 2.I)$.
Les fonctions f s'écrivent g + h où g est 1-périodique et $(\forall x)\ h(x + 1) = -2.h(x)$.
J'ai cherché à décrire ces dernières fonctions plus en détail dans un problème d'algèbre linéaire.

Exercice 24 : Soient **K** un corps commutatif, E un **K**-espace vectoriel.
Soient A et B deux polynômes de **K**[X], de pgcd D et de ppcm M, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\,D(u) = \mathrm{Ker}\,A(u) \cap \mathrm{Ker}\,B(u) \qquad \mathrm{Im}\,D(u) = \mathrm{Im}\,A(u) + \mathrm{Im}\,B(u)$$
$$\mathrm{Ker}\,M(u) = \mathrm{Ker}\,A(u) + \mathrm{Ker}\,B(u) \qquad \mathrm{Im}\,M(u) = \mathrm{Im}\,A(u) \cap \mathrm{Im}\,B(u)$$

Généraliser à r polynômes.
Montrer que si A et B sont premiers entre eux et tels que $(A.B)(u) = 0$, alors :

$$E = \mathrm{Ker}\,A(u) \oplus \mathrm{Ker}\,B(u)\ ,\ \ \mathrm{Ker}\,A(u) = \mathrm{Im}\,B(u)\ ,\ \ \mathrm{Ker}\,B(u) = \mathrm{Im}\,A(u)\ .$$

Solution : Cet exercice généralise le théorème des noyaux. En effet, lorsque A et B sont premiers entre eux, D = 1 et M = AB, et l'on retrouve $\mathrm{Ker}\,(AB)(u) = \mathrm{Ker}\,A(u) \oplus \mathrm{Ker}\,B(u)$.

1) Notons $A = DA'$, $B = DB'$, $1 = A'P + B'Q$ (Bezout).
Alors $A(u) = A'(u) \circ D(u) = D(u) \circ A'(u)$ et $B(u) = B'(u) \circ D(u) = D(u) \circ B'(u)$.
On en déduit aussitôt $\mathrm{Ker}\,D(u) \subset \mathrm{Ker}\,A(u)$, $\mathrm{Ker}\,D(u) \subset \mathrm{Ker}\,B(u)$,
$\mathrm{Im}\,D(u) \supset \mathrm{Im}\,A(u)$ et $\mathrm{Im}\,D(u) \supset \mathrm{Im}\,B(u)$.
Donc $\mathrm{Ker}\,D(u) \subset \mathrm{Ker}\,A(u) \cap \mathrm{Ker}\,B(u)$ et $\mathrm{Im}\,D(u) \supset \mathrm{Im}\,A(u) + \mathrm{Im}\,B(u)$.
Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}\,A(u) \cap \mathrm{Ker}\,B(u)$. Alors $x = [A'(u) \circ P(u)](x) + [B'(u) \circ Q(u)](x)$.
Or $[A'(u) \circ P(u)](x) \in \mathrm{Ker}\,D(u)$ car $[D(u) \circ A'(u) \circ P(u)](x) = [P(u) \circ A(u)](x) = 0$.
Et de même $[B'(u) \circ Q(u)](x) \in \mathrm{Ker}\,D(u)$.
Enfin, soit $y \in \mathrm{Im}\,D(u)$. Alors $(\exists x)\ \ y = D(u)(x) = [A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)](x) \in \mathrm{Im}A(u) + \mathrm{Im}B(u)$.

2) On sait qu'avec les notations précédentes, $M = A.B' = B.A'$.
Du coup $M(u) = A(u) \circ B'(u) = B'(u) \circ A(u) = B(u) \circ A'(u) = A'(u) \circ B(u)$.
On en déduit aussitôt $\mathrm{Ker}\,A(u) \subset \mathrm{Ker}\,M(u)$, $\mathrm{Ker}\,B(u) \subset \mathrm{Ker}\,M(u)$,
$\mathrm{Im}\,A(u) \supset \mathrm{Im}\,M(u)$ et $\mathrm{Im}\,B(u) \supset \mathrm{Im}\,M(u)$.
Donc $\mathrm{Ker}\,M(u) \supset \mathrm{Ker}\,A(u) + \mathrm{Ker}\,B(u)$ et $\mathrm{Im}\,M(u) \subset \mathrm{Im}\,A(u) \cap \mathrm{Im}\,B(u)$.
Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}\,M(u)$. On a $x = [A'(u) \circ P(u)](x) + [B'(u) \circ Q(u)](x)$.
Or $[A'(u) \circ P(u)](x) \in \mathrm{Ker}\,B(u)$ car $[B(u) \circ A'(u) \circ P(u)](x) = [M(u) \circ P(u)](x) = 0$
Et de même $[B'(u) \circ Q(u)](x) \in \mathrm{Ker}\,A(u)$. Finalement $x \in \mathrm{Ker}\,A(u) + \mathrm{Ker}\,B(u)$.
Enfin, soit $y \in \mathrm{Im}\,A(u) \cap \mathrm{Im}\,B(u)$. Alors $y = A(u)(z) = B(u)(t)$.
Alors $y = [A'(u) \circ P(u)](y) + [B'(u) \circ Q(u)](y) = [A'(u) \circ P(u) \circ B(u)](t) + [B'(u) \circ Q(u) \circ A(u)](z)$
$= [M(u) \circ P(u)](t) + [M(u) \circ Q(u)](z) \in \mathrm{Im}\,M(u)$. cqfd.

3) Soient A et B premiers entre eux et tels que $(A.B)(u) = 0$. Alors $E = \mathrm{Ker}\,A(u) \oplus \mathrm{Ker}\,B(u)$ en vertu du théorème des noyaux. De plus $\mathrm{Im}\,B(u) \subset \mathrm{Ker}\,A(u)$ et $\mathrm{Im}\,A(u) \subset \mathrm{Ker}\,B(u)$.
Soient P et Q tels que $1 = A.P + B.Q$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,A(u)$; alors $x = [P(u) \circ A(u)](x) + [B(u) \circ Q(u)](x) = [B(u) \circ Q(u)](x) \in \mathrm{Im}\,B(u)$. cqfd.

Exercice 25 : Soit $E = C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Pour $f \in E$, soit $T(f) : x \to f(x) + \int_0^x f$.
1) L'endomorphisme T est-il un automorphisme de E ?
2) Existe-t-il un sous-espace de E de dimension finie impaire stable par T ? [Oral Mines 2008]

Solution : 1) T est un automorphisme de E.
Soit en effet $g \in E$. Cherchons $f \in E$ tel que $T(f) = g$.
Posant $F(x) = \int_0^x f$, il vient $F'(x) + F(x) = g(x)$, $F(0) = 0$.

Réciproquement, si $F'(x) + F(x) = g(x)$ et $F(0) = 0$, alors F est C^1, et $F' = f$ vérifie $T(f) = g$.

Cette équation différentielle s'écrit aussi $(F'(x) + F(x)).e^x = g(x).e^x$, i.e. $\frac{d}{dx}(F(x).e^x) = g(x).e^x$.

D'où $F(x) = e^{-x}\int_0^x g(t).e^t.dt$, $\boxed{f(x) = g(x) - e^{-x}\int_0^x g(t).e^t.dt}$.

2) Analysons cette hypothèse un peu étrange :
S'il y a un sous-espace H de dimension finie impaire de E stable par T, le polynôme caractéris-tique de l'endomorphisme induit T_H est de degré impair, donc a une racine réelle. Autrement dit, T aurait une valeur propre réelle. Réciproquement, d'ailleurs, si T a une valeur propre réelle, T admet une droite stable, donc un sous-espaces stable de dimension impaire.

Or $T(f) = \lambda.f$, $f \neq 0$, s'écrit $\int_0^x f = (\lambda - 1).f(x)$.

$\lambda = 1$ donne $\int_0^x f = 0$, donc $f = 0$ en dérivant : impossible.

$\lambda \neq 1$ donne $f(x) = (\lambda - 1).f'(x)$, donc $f(x) = C.\exp(\alpha x)$, avec $\alpha = \frac{1}{\lambda-1}$.

Comme $f(0) = 0$, $C = 0$, ce qui est derechef impossible.

Remarque : La RMS juin 2009 montre que T n'admet pas non plus de sev stable de dimension paire.

Exercice 26 : Polynôme caractéristique de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$.

Solution : Cet exercice est important, car ces matrices jouent un grand rôle : elles sont associées aux endomorphismes monogènes.

$\chi_A(X) = \det(A - X.I) = \begin{bmatrix} -X & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & -X & 0 & \dots & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-X \end{bmatrix}$ peut se calculer par plusieurs méthodes :

1) développer par rapport à la première ligne et aboutir à un calcul récurrent.
2) développer par rapport à la dernière colonne, à condition d'avoir la patience d'écrire les cofacteurs !
3) Cependant, la méthode la plus efficace est celle-ci : faire $L_1 \to L_1 + X.L_2 + \dots + X^{n-1}.L_n$.

$\chi_A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -P(X) \\ 1 & -X & 0 & \dots & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}-X \end{bmatrix}$, où $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + \dots + a_{n-1}.X^{n-1} + X^n$.

Il reste à développer par rapport à la première ligne : $\chi_A(X) = (-1)^n.P(X)$.

Remarque : ceci montre au passage que tout polynôme P de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$ est le polynôme caractéristique d'une matrice : la matrice A est appelée **matrice-compagnon** de P.

Exercice 27 : Polynôme caractéristique de $A = \begin{bmatrix} 0 & \dots\dots & 0 & 1 \\ \dots & & \dots & 2 \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 \dots & n-1 & n \end{bmatrix}$.

Solution : Des méthodes de calcul direct sont possibles, mais mieux vaut réduire A.

1) Cherchons les couples d'éléments propres (λ, X), $X \neq 0$, $AX = \lambda X$.

$$x_n = \lambda x_1 \ , \ 2x_n = \lambda x_2 \ , \ \dots \ , \ (n-1)x_n = \lambda x_{n-1} \ , \ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \lambda x_n .$$

• Si $\lambda = 0$, il vient $x_n = 0$, $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0$: espace de codimension 2.

• Si $\lambda \neq 0$, $x_n \neq 0$, sans quoi $X = 0$. Prenons $x_n = \lambda$; alors $X = {}^t(1, 2, \dots, n-1, \lambda)$

Et $1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n\lambda = \lambda^2$, autrement dit $\lambda^2 - n\lambda - \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} = 0$.

Ce trinôme a deux racines réelles simples, donnant naissance à deux droites stables.

Conclusion : le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^{n-2}\left(X^2 - nX - \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)$.

2) Seconde méthode.
A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Elle est de rang 2, donc 0 est une valeur propre et dim Ker A = $n - 2$.
Il reste deux valeurs propres réelles, dont la somme est n par un argument de trace.

On sait donc que $\chi_A(X) = X^{n-2}\left(X^2 - n X + b\right)$, où $n^2 \geq 4b$.

On peut même achever cette preuve, si l'on note que, A étant diagonalisable, $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$.
Or Im A a pour base (a, b), où a est la première colonne de A, et b la dernière.

On a aussitôt $Aa = b$ et $Ab = na + \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} b$.

La matrice de l'endomorphisme induit est donc $\begin{bmatrix} 0 & n \\ 1 & \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} \end{bmatrix}$. Le caractéristique s'en déduit.

3) Des méthodes directes sont également possibles. Les érudits savent que

$$\chi_A(X) = (-1)^n [X^n - \tau_1(A).X^{n-1} + \tau_2(A).X^{n-2} - \tau_3(A).X^{n-3} + \dots + (-1)^n \tau_n(A)]$$

où $\tau_k(A)$ est la somme des mineurs diagonaux d'ordre k de A.

Or $\tau_1(A) = n$, $\tau_2(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & n \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = -\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, $\tau_3(A) = \dots = \tau_n(A) = 0$.

On peut aussi développer le polynôme caractéristique selon la dernière ligne.

Remarque : un exercice ultérieur sera consacré aux matrices symétriques de rang 2.

Exercice 28 : Soit $m \in \mathbf{R}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$, $n \geq 2$, définie par $a_{ij} = m^{j-i}$ pour $j \neq i$, $a_{ii} = 0$.
Polynôme minimal de A ? Montrer que A est inversible. Calculer A^k pour $k \in \mathbf{Z}$.

Solution : Bel exemple d'inversion de matrice par méthode polynomiale.

On constate que $A^2 = (n-1).I + (n-2).A$.

A annule le polynôme $P = X^2 + (2-n).X + 1 - n = (X + 1)(X + 1 - n)$.
Comme A n'est pas une homothétie, P est le polynôme minimal de A.

On déduit que $A.(A + (2-n).I)) = (n-1).I$, donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{A+(2-n)I}{n-1}$.

Comme P est scindé sans facteur carré, A est diagonalisable et Sp A = $\{-1, n-1\}$ (P est le minimal).

$A = -P + (n-1).Q$, où P et Q sont les deux projecteurs propres de A, qui sont aussi les polynômes de Lagrange associé au spectre : $P = \dfrac{(n-1)I - A}{n}$, $Q = \dfrac{A+I}{n}$.

Par suite $(\forall k \in \mathbf{Z})$ $A^k = (-1)^k.P + (n-1)^k.Q = (-1)^k.\dfrac{(n-1)I-A}{n} + (n-1)^k.\dfrac{A+I}{n}$.

Variante : diviser X^k par $(X + 1)(X + 1 - n)$ …

---

5. *Endomorphismes diagonalisables.*

Exercice 1 : polynômes de Bernstein.

Soit n un entier ≥ 1, $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$.

1) Montrer que les polynômes $P_k(X) = X^k (1-X)^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$, forment une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Quelle est la matrice de passage de $(1, X, \dots, X^n)$ à $(P_0, P_1, \dots, P_n)$?

Quelle est la matrice de passage de $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ à $(1, X, \dots, X^n)$?

2) Soient a et b deux entiers > 0, $\varphi : P(X) \in \mathbf{R}[X] \rightarrow (a + bX).P(X) + X(1-X).P'(X)$.

Montrer que φ est linéaire, et qu'il existe un unique entier n tel que $\mathbf{R}_n[X]$ soit stable par φ.

Soit φ_n l'endomorphisme induit.

3) Pour cette valeur de n, écrire la matrice de φ_n relativement à la base $(1, X, \dots, X^n)$.

Montrer que φ_n est un automorphisme.

4) Valeurs et vecteurs propres de φ_n ? Pourquoi φ_n est-il diagonalisable ?

Solution : 1) Prenons $n = 4$, et laissons le lecteur généraliser.

La matrice de passage de $(1, X, \dots, X^4)$ à $(P_0, P_1, \dots, P_4)$ est $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Elle est triangulaire inférieure inversible, donc $(P_0, P_1, \dots, P_4)$ est une base de $\mathbf{R}_4[X]$.

La matrice de passage de $(P_0, P_1, \dots, P_4)$ à $(1, X, \dots, X^4)$ est $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Noter, par le binôme, que :

$$X^k = X^k (X + 1 - X)^{n-k} = X^k \sum_{h=0}^{n-k} C_{n-k}^h X^h (1-X)^{n-k-h} = \sum_{h=0}^{n-k} C_{n-k}^h . P_{h+k}(X) = \sum_{m=k}^{n} C_{n-k}^{m-k} . P_m(X) .$$

2) φ est évidemment linéaire, et pour tout k, $\varphi(X^k) = (b-k).X^{k+1} + (a+k).X^k$.

Le seul entier n tel que $\mathbf{R}_n[X]$ soit stable par φ est $n = b$. Soit φ_n l'endomorphisme induit.

3) Pour $n = b$, la matrice de φ_n relativement à $(1, X, \dots, X^n)$ est $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & a+1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & n-1 & a+2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & n-2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a+n-1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a+n \end{bmatrix}$.

A est inversible, donc φ_n est un automorphisme.

4) A a $n + 1$ valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

Au vu de l'énoncé, on devine que $(P_0 , \dots, P_n)$ est une base propre de φ_n .

En effet, un calcul montre que $\varphi_n(P_k) = (a + k)P_k$.

On peut aussi chercher directement les vecteurs propres de φ_n en résolvant l'équation différentielle

$$(a + nX).P + X(1 - X).P' = (a + k).P.$$

Elle s'écrit $(nX - k).P + X(1 - X).P' = 0$, $\frac{P'}{P} = \frac{k-nX}{X(1-X)} = \frac{k}{X} + \frac{k-n}{1-X}$.

La dérivée logarithmique permet de conclure.

<u>Exercice 2</u> : Soit A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Trouver un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dont A est la matrice.

En déduire les éléments propres de A. Calculer det(A + xI). A est-elle diagonalisable ?

<u>Solution</u> : [Oral Centrale 1996]

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ de matrice A relativement à la base $(1 , X , X^2 , \dots, X^n)$
[ou, ce qui revient au même, dans la base $(X^n , \dots , X^2, X , 1)$, car A est centrosymétrique.]

On a, pour tout $k \in [0, n]$: $f(X^k) = k.X^{k-1} + (n - k).X^{k+1}$.

On en déduit par linéarité, que $(\forall P)$ $f(P) = (1 - X^2).P' + n.XP$.

Les éléments propres sont les couples (λ, P), où $P \neq 0$ et $(1 - X^2).P' + n.XP = \lambda.P$.

2) Considérons alors l'équation différentielle $(1 - x^2).y'(x) + n\, x\, y(x) = \lambda y(x)$.

Elle s'écrit aussi $(1 - x^2).y'(x) + (n\, x - \lambda).y(x) = 0$.

C'est une équation linéaire du premier ordre et homogène.

Intégrons-la sur un intervalle ne contenant pas ±1, par la méthode du logarithme :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{nx-\lambda}{x^2-1} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) .$$

$$\ln | y(x) | = \frac{n}{2} \ln | (x + 1)(x - 1) | + \frac{\lambda}{2} \left| \ln \frac{x+1}{x-1} \right| + \text{Cte} .$$

Finalement, il vient $y(x) = C\, |x-1|^{\frac{n-\lambda}{2}}\, |x+1|^{\frac{n+\lambda}{2}}$.

3) Si l'on cherche des solutions polynomiales, on est amené à supposer $k = \frac{n-\lambda}{2}$ entier, ou encore $\lambda = n - 2k$, et à introduire les polynômes $y(x) = C\, (x - 1)^k\, (x + 1)^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$.

Il y a $n + 1$ entiers tels que $-n \le \lambda = n - 2k \le n$, ou encore $0 \le k \le n$.

Le calcul fait en 2) montre que $P_k(x) = (x - 1)^k\, (x + 1)^{n-k}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $n - 2k$. On peut d'ailleurs le vérifier directement.

Finalement f et A sont diagonalisables, ayant $n + 1$ valeurs propres distinctes.

Enfin, $\det(A + xI) = \prod_{k=0}^{n}(x-n+2k)$.

En particulier, $\det A = \prod_{k=0}^{n}(2k-n)$, et donc det A = 0 si n est pair…

Calcul fait dans mes exercices sur les déterminants.

<u>Remarque</u> : Le détour par l'analyse s'est avéré indispensable. Il ne choquera que les puristes, hélas nombreux en France (j'en suis). Pour les russes au contraire, il n'y a pas de barrière étanche entre les branches du savoir : algèbre et analyse, mathématiques et physique…

<u>Exercice 3</u> : 1) Pour $0 \le k \le n$, soit $f_{n,k} : t \to \mathrm{ch}^{n-k}\, t \,.\, \mathrm{sh}^k\, t$.

Montrer que la famille ($f_{n,0}$, $f_{n,1}$, … , $f_{n,n}$) est libre. Soit E_n l'espace vectoriel engendré.
2) Pour tout $p \in \mathbf{Z}$, soit $e_p : t \to e^{pt}$. Montrer que $E_n = \text{Vect}(e_{-n} , e_{-n+2} , \dots , e_{n-2} , e_n)$.

3) Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Trouver un endomorphisme de E_n dont A est la matrice.

En déduire les éléments propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Solution : cet exercice est une variante du précédent.

1) La liberté de ($f_{n,0}$, $f_{n,1}$, … , $f_{n,n}$) peut se montrer de bien des façons.

• Par échelle de comparaison en 0 : $f_{n,k}(t) \sim t^k$.

• Ou noter que $f_{n,k}(t) = \text{ch}^n\, t \,.\, \text{th}^k\, t$; donc $\sum_{k=0}^{n} a_k.f_{n,k}(t) = (ch^n t)\sum_{k=0}^{n} a_k.th^k t = 0$ implique $\sum_{k=0}^{n} a_k.th^k t = 0$.

Comme la fonction th prend une infinité de valeurs, tous les a_k sont nuls.

• Notons $e_n(t) = e^{nt}$ ($n \in \mathbf{Z}$). On sait que cette famille est libre.

Développant par le binôme $f_{n,k}(t) = (\frac{e^t+e^{-t}}{2})^{n-k}(\frac{e^t-e^{-t}}{2})^k$, on s'aperçoit que $f_{n,k}$ est combinaison linéaire des $e_{2p-n} : t \to e^{(-n+2p)t}$ ($0 \le p \le n$).

Or les fonctions (e^{-nt} , $e^{(-n+2)t}$, … , $e^{(n-2)t}$, e^{nt}) sont libres. L'espace F_n qu'elles engendrent est de dimension $n + 1$.

Inversement, $e_{2p-n}(t) = e^{(-n+2p)t} = e^{-(n-p)t}\, e^{pt} = (\text{ch } t - \text{sh } t)^{n-p} (\text{ch } t + \text{sh } t)^p$ est combinaison linéaire de ($f_{n,0}$, $f_{n,1}$, … , $f_{n,n}$) (développer par le binôme).

Ainsi, $\text{Vect}(f_{n,0} , f_{n,1} , \dots , f_{n,n}) = \text{Vect}(e_{-n} , e_{-n+2} , \dots , e_{n-2} , e_n)$.

3) On constate que $D(f_{n,k}) = (n-k)\, f_{n,k+1} + k\, f_{n,k-1}$.

Il en résulte que E_n est stable par dérivation, et que A est la matrice de l'endomorphisme D_n induit relativement à la base ($f_{n,0}$, $f_{n,1}$, … , $f_{n,n}$).

Par ailleurs, il est évident que les fonctions e_n , e_{-n+2} , … , e_{n-2} , e_n sont des vecteurs propres de D_n associées aux valeurs propres respectives $-n$, $-n+2$, … , $n-2$, n.
Comme elles sont au nombre de $n + 1$, il est inutile d'en chercher d'autres, et A est diagonalisable.

Exercice 4 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det A > 0$.
[Oral X 1991, Centrale 1996]

Solution : A annule le polynôme $P(X) = X^3 - X - 1$.

L'étude des variations de ce polynôme montre qu'il admet une racine réelle $a > 1/\sqrt{3} > 0$.

Du coup, P a aussi deux racines complexes conjuguées b et $\bar{b}$.

P étant scindé à racines simples, A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$ et $\text{Sp } A \subset \{ a , b, \bar{b} \}$.

$$\exists \Omega \in Gl_n(\mathbf{C}) \quad \Omega^{-1} A\, \Omega = \text{diag}(a\, I_p , b\, I_q , \bar{b}\, I_r) = D \quad (p + q + r = n).$$

De plus, A étant réelle, q = r, car le polynôme caractéristique de A est réel et b et $\bar{b}$ ont même ordre de multiplicité en tant que racines de ce polynôme. Par suite $\det A = a^p (b\bar{b})^q > 0$. cqfd.

<u>Remarque</u> : en fait, det A ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, car $a\, b\bar{b} = 1$:
$\det A = a^{p-q}$, où $p + 2q = n$, donc $\det A = a^{n-3q}$, avec $0 \le q \le \frac{n}{2}$.

Exercice 5 : 1) Trouver une équation algébrique vérifiée par $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2) Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

3) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I = 0$ et tr $A \in \mathbf{Q}$. Montrer que 4 divise n.

4) Réciproquement, si 4 divise n, montrer qu'existe $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I = 0$ et tr $A \in \mathbf{Q}$.

Solution : [Oral X PC 2009, RMS n° 320]

1) et 2) Ecrire $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 - 2X.\cos\frac{2\pi}{5} + 1).(X^2 - 2X\cos\frac{4\pi}{5} + 1)$ et identifier.

On obtient la somme et le produit de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$: ils sont racines de $u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} = 0$.

On en déduit $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

3) A annule $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X - \omega)(X - \varpi)(X - \omega^2)(X - \varpi^2)$, où $\omega = \exp\frac{2i\pi}{5}$.

P est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$ et Sp $A \subset \{ \omega, \varpi , \omega^2, \varpi^2 \}$.
A étant réelle, ω et ϖ ont même ordre de multiplicité p, ω^2 et ϖ^2 même ordre de multiplicité q.

On a $n = 2p + 2q$ et tr $A = p.(\omega + \varpi) + q.(\omega^2 + \varpi^2) = 2p.\cos\frac{2\pi}{5} + 2q\cos\frac{4\pi}{5}$

$= 2p.\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 2q.\frac{-\sqrt{5}-1}{4} \in \mathbf{Q}$ implique p = q. Par conséquent $n = 4p$.

4) Réciproquement si $n = 2p$, $A = \mathrm{diag}(H, H, \dots, H)$, formée de p blocs H, où H est la matrice-compagnon de P, répond à la question.

Exercice 6 : Soient $A, B, M \in M_n(\mathbf{C})$, λ et μ deux complexes tels que :

$$M = \lambda A + \mu B \quad , \quad M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B \quad , \quad M^3 = \lambda^3 A + \mu^3 B .$$

Montrer que M est diagonalisable et que $\forall k \geq 1 \quad M^k = \lambda^k A + \mu^k B$.

Solution : Des méthodes polynomiales semblent ici indiquées.

• M est diagonalisable.
Par linéarité, $P(M) = P(\lambda).A + P(\mu).B$ pour tout polynôme $P(X) = X (a + bX + cX^2)$.
Or je dis que, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}\times\mathbf{C}$, il existe un polynôme scindé sans facteur carré de cette forme et tel que $P(\lambda) = P(\mu) = 0$: il suffit de poser $P(X) = \mathrm{ppcm}(X , X - \lambda , X - \mu)$!
Alors $P(M) = 0$. En vertu du théorème de Schreier, M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, \lambda, \mu\}$.

Remarque : Si λ, μ et 0 sont distincts, $P(X) = X.(X - \lambda).(X - \mu)$.
Si $\lambda = 0 \neq \mu$, $P(X) = X.(X - \mu)$; si $\mu = 0 \neq \lambda$, $P(X) = X.(X - \lambda)$; si $\lambda = \mu \neq 0$, $P(X) = X.(X - \lambda)$.
Si $\lambda = \mu = 0$, $P(X) = X$.

• Montrons que, pour tout polynôme $Q(X) = X.R(X)$, on a $Q(M) = Q(\lambda).A + Q(\mu).B$.
Notons $P(X) = X.S(X)$, $0 \leq \deg S \leq 2$.
Diviser Q par P revient à diviser R par S : $R(X) = S(X).T(X) + U(X)$, où $\deg U < \deg S$.
Alors $Q = P.T + X.U$, et $Q(M) = M.U(M) = \lambda.U(\lambda).A + \mu.U(\mu).B = Q(\lambda).A + Q(\mu).B$. cqfd.

Exercice 7 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $3A^2 = {}^tA + A + I_n$. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers la matrice d'une projection.

Solution : [Oral Mines MP 2011, RMS n° 457]
${}^tA = 3A^2 - A - I_n = P(A)$, où $P(X) = 3X^2 - X - 1$, donc $A = P({}^tA) = (P \circ P)(A)$

A annule le poynôme Q(X) = (P o P(X) – X, qui est de degree 4 est est divisible par P(X) – X.
On trouve $Q(X) = (P \circ P)(X) - X = (3X^2 - 2X - 1).(3X^2 - 1)$.

$$= (X-1)(3X+1)(X\sqrt{3}+1)(X\sqrt{3}-1).$$

Ce polynôme est scindé à racines simples. Donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$, et

$$\mathrm{Sp}\, A \subset \{ 1, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \}.$$

Conclure est alors facile.

<u>Exercice 8</u> : On se propose de résoudre l'équation $A^2 + I = 0$ dans $M_n(\mathbf{R})$.

1) Si cette équation a une solution, que dire de la parité de n ?

2) On suppose $n = 2m$. Que dire de la matrice A considérée comme élément de $M_n(\mathbf{C})$?

Montrer qu'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}.A.P = \mathrm{diag}(H, H, \dots, H)$, où $H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3) Conclure.

4) <u>Application</u> (Maple) : Soient $A = \begin{bmatrix} -14686 & -9077 \\ 23761 & 14686 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1602 & 107 & 22731 & -1425 \\ -35 & 0 & 84 & 15 \\ 90 & 6 & 1275 & -80 \\ 3234 & 216 & 45899 & -2877 \end{bmatrix}$.

Vérifier que $A^2 + I = 0$ et $B^2 + I = 0$.
Trouver P réelle inversible telle que $P^{-1}.A.P = H$, resp. $P^{-1}.B.P = \mathrm{diag}(H, H)$.

<u>Solution</u> :
Il existe de nombreuses solutions de cet important exercice, qui est une introduction à la notion d'endomorphisme « semi-simple », mais aussi à la décomposition monogène. Aucune n'est triviale.

1) Si $A^2 = -I$ dans $M_n(\mathbf{R})$, $(\det A)^2 = (-1)^n$. Comme $(\det A)^2 \geq 0$, n est pair.

2) Supposons $n = 2m$.

La matrice A annule le polynôme $X^2 + 1$, qui est scindé sans facteur carré dans $\mathbf{C}[X]$. Donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$. Il existe une matrice inversible $Q \in Gl_n(\mathbf{C})$ telle que

$$Q^{-1}.A.Q = \begin{bmatrix} iI_a & O \\ O & -iI_b \end{bmatrix}, \text{ avec } a + b = n.$$

Comme A est réelle, son polynôme caractéristique est réel, et i et $-i$ ont même ordre de multiplicité, donc $a = b = m$. Ainsi $Q^{-1}.A.Q = \begin{bmatrix} iI_m & O \\ O & -iI_m \end{bmatrix}$.

Si $(Z_1, \dots, Z_m)$ est une $\mathbf{C}$-base de $\mathrm{Ker}(A - i.I)$, il est clair que $(\overline{Z_1}, \dots, \overline{Z_m})$ est une $\mathbf{C}$-base de $\mathrm{Ker}(A + i.I)$. Posons $Z_k = X_k + i.Y_k$, X_k et Y_k étant les parties réelle et imaginaire du vecteur Z_k.
Alors $(X_1, -Y_1, \dots, X_m, -Y_m)$ est une $\mathbf{C}$-base de $\mathbf{C}^n$ donc une $\mathbf{R}$-base de $\mathbf{R}^n$.
Et la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A relativement à cette base est

$$\mathrm{diag}(H, H, \dots, H), \text{ où } H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) <u>Conclusion</u> : Si n est impair, l'équation $A^2 + I = 0$ est sans solution dans $M_n(\mathbf{R})$.
Si n est pair, l'équation $A^2 + I = 0$ a, à similitude près, une seule solution dans $M_n(\mathbf{R})$, à savoir la classe de similitude de $\mathrm{diag}(H, H, \dots, H)$, où $H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4) <u>Exemples</u> :

```
> with(linalg):A:=matrix(2,2,[-14686,-9077,23761,14686]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -14686 & -9077 \\ 23761 & 14686 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(A^2+1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Z:=op(kernel(A-I));
```

$$Z := \left[\frac{-14686}{23761} + \frac{1}{23761} I, 1 \right]$$

```
> X:=map(Re,Z);Y:=scalarmul(map(Im,Z),-1);
```

$$X := \left[\frac{-14686}{23761}, 1 \right] \qquad Y := \left[\frac{-1}{23761}, 0 \right]$$

```
> P:=transpose(matrix([X,Y]));multiply(inverse(P),A,P);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{-14686}{23761} & \frac{-1}{23761} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix(4,4,[1602,107,22731,-1425,-35,0,84,15,90,6,1275,-80,3234,216,
45899,-2877]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1602 & 107 & 22731 & -1425 \\ -35 & 0 & 84 & 15 \\ 90 & 6 & 1275 & -80 \\ 3234 & 216 & 45899 & -2877 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(B^2+1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> K:=[op(kernel(B-I))];
```

$$K := \left[\left[\frac{132879}{268303} + \frac{12}{268303} I, 0, \frac{1065}{38329} + \frac{5}{268303} I, 1 \right], \left[\frac{-2592}{268303} - \frac{6557}{268303} I, 1, \frac{-1080}{268303} + \frac{66}{38329} I, 0 \right] \right]$$

```
> Z1:=op(1,K);X1:=map(Re,Z1);Y1:=scalarmul(map(Im,Z1),-1);
Z2:=op(2,K);X2:=map(Re,Z2);Y2:=scalarmul(map(Im,Z2),-1);
```

$$Z1 := \left[\frac{132879}{268303} + \frac{12}{268303} I, 0, \frac{1065}{38329} + \frac{5}{268303} I, 1 \right]$$

$$X1 := \left[\frac{132879}{268303}, 0, \frac{1065}{38329}, 1 \right] \qquad Y1 := \left[\frac{-12}{268303}, 0, \frac{-5}{268303}, 0 \right]$$

$$Z2 := \left[\frac{-2592}{268303} - \frac{6557}{268303} I, 1, \frac{-1080}{268303} + \frac{66}{38329} I, 0 \right]$$

$$X2 := \left[\frac{-2592}{268303}, 1, \frac{-1080}{268303}, 0 \right] \qquad Y2 := \left[\frac{6557}{268303}, 0, \frac{-66}{38329}, 0 \right]$$

```
> P:=transpose(matrix([X1,Y1,X2,Y2]));multiply(inverse(P),B,P);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{132879}{268303} & \frac{-12}{268303} & \frac{-2592}{268303} & \frac{6557}{268303} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1065}{38329} & \frac{-5}{268303} & \frac{-1080}{268303} & \frac{-66}{38329} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 9 : endomorphismes de translation.

Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. On considère les endomorphismes $f : M \to AM$ et $g : M \to MA$ de $M_n(\mathbf{K})$.

a) Montrer que Sp f = Sp A ; exprimer dim Ker($f - \lambda$I) à l'aide de n et dim Ker(A – λI).

b) En déduire que f est diagonalisable ⇔ A est diagonalisable.

c) Retrouver ce résultat en comparant les polynômes minimaux de f et A.

d) Exprimer le déterminant, la trace, le polynôme caractéristique de f à l'aide de ceux de A.

e) Montrer que f est trigonalisable ⇔ A est trigonalisable.

f) Énoncer des résultats analogues pour g.

Solution :

Si M est carrée d'ordre n dont les colonnes sont notées $x_1, x_2, \dots, x_n$, on notera $M = (x_1 | x_2 | \dots | x_n)$.

a) Espaces propres de f et A.

Soient (λ, M) un couple d'éléments propres de f, $x_1, x_2, \dots, x_n$ les colonnes de M.

A.M = λ.M se traduit par $(\forall j)\ Ax_j = \lambda x_j$. Comme l'un au moins des vecteurs-colonnes x_j est non nul, λ est une valeur propre de A.

Réciproquement, si λ est une valeur propre de A, il existe un vecteur non nul tel que Ax = λx. La matrice $M = (x | 0 | \dots | 0)$ est non nulle est telle que $f(M) = \lambda M$.

Plus précisément : $\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda I) = n \times \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.

En effet : $M = (x_1 | x_2 | \dots | x_n) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda I) \Leftrightarrow (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^n$.

b) Diagonalisabilité, 1ère approche.

Supposons A diagonalisable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres.

Alors $\sum_{j=1}^{r} \dim Ker(f-\lambda_j I) = \sum_{j=1}^{r} n.\dim Ker(A-\lambda_j I) = n\sum_{j=1}^{r} \dim Ker(A-\lambda_j I) = n^2$,

donc $M_n(\mathbf{K})$ est somme directe des espaces propres de f, et f est diagonalisable.

Réciproquement, si f est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$,

$$n^2 = \sum_{j=1}^{r} \dim Ker(f-\lambda_j I) = \sum_{j=1}^{r} n.\dim Ker(A-\lambda_j I) = n\sum_{j=1}^{r} \dim Ker(A-\lambda_j I),$$

donc $\sum_{j=1}^{r} \dim Ker(A-\lambda_j I) = n$ et A est diagonalisable.

c) Diagonalisabilité, 2$^{\text{ème}}$ approche.

On a $f^k(M) = A^k.M$ pour tout k, et $[P(f)](M) = P(A).M$ pour tout polynôme P.
Du coup, $P(f) = 0 \Leftrightarrow (\forall M)\ P(A).M = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$ [pour ⇒, prendre $M = I^n$.]
Ainsi f et A ont même polynômes annulateurs ; en particulier, ils ont même polynôme minimal.
En vertu du théorème de Schreier, f est diagonalisable ssi A l'est.

Remarque : de même, A est nilpotente ssi f est nilpotente.

d) Déterminant, trace et polynôme caractéristique de f .

Rapportons $M_n(\mathbf{K})$ à sa base $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots , E_{n2}, \dots, E_{1n}, E_{2n}, \dots, E_{nn})$.

Notons $X_1, \dots , X_n$ les colonnes de M. Le vecteur-colonne des coordonnées de M relativement à $\mathcal{B}$ s'écrit ${}^t(X_1, \dots , X_n)$, celui des coordonnées de A.M s'écrit ${}^t(A.X_1, \dots , A.X_n)$.

$$\begin{bmatrix} AX_1 \\ AX_2 \\ \dots \\ AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O & \dots & O \\ O & A & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & O \\ O & \dots & O & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

Du coup, diag(A, A, …, A) est la matrice de f : M $\to$ AM , et :

$$\mathrm{tr}\, f = n.\mathrm{tr}\, A \quad , \quad \det f = (\det A)^n \quad , \quad \chi_f(X) = \chi_A(X)^n \ .$$

e) <u>Montrons que *f* est trigonalisable $\Leftrightarrow$ A est trigonalisable</u>.

En effet, il découle de ce qui précède que $\chi_f(X)$ est scindé ssi $\chi_A(X)$ l'est.

f) <u>L'endomorphisme g : M $\to$ MA</u> possède les mêmes propriétés que *f*, car il est conjugué de *f* via la transposition. Travailler sur les lignes plutôt que sur les colonnes.

<u>**Exercice 10**</u> : Soient **K** = **R** ou **C**, A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$, $\varphi : M \in M_2(\mathbf{K}) \to A.M - M.A \in M_2(\mathbf{K})$.

1) Ecrire la matrice de φ relativement à la base (E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21}) de $M_2(\mathbf{K})$.
2) Donner le polynôme caractéristique de φ sous forme factorisée.
3) On suppose **K** = **C**. Montrer que : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ φ est diagonalisable.
4) On suppose **K** = **R**. Montrer que : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ φ est diagonalisable.

<u>**Solution**</u> : [d'après écrit CCP 2012]

1) On constate que φ a pour matrice, relativement à la base (E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21}) :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{bmatrix}.$$

2) M a pour polynôme caractéristique : $P(X) = X^2 (X^2 - (a - d)^2 - 4bc) = X^2 (X^2 - \Delta)$,
où $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$.

3) <u>Supposons **K** = **C**</u>. A a pour polynôme caractéristique $Q(X) = X^2 - (a + d).X + ad - bc$.
Ce polynôme caractéristique a pour discriminant Δ.

• A est diagonalisable ssi $\Delta \neq 0$ ou ($\Delta = 0$, $a = d$, $b = c = 0$).
En effet, si $\Delta \neq 0$, et alors A a deux valeurs propres distinctes. Si $\Delta = 0$, A a une seule valeur propre λ ; elle doit alors être semblable à diag(λ, λ), donc égale à diag(λ, λ).

• M est diagonalisable ssi $\Delta \neq 0$ ou ($\Delta = 0$, $a = d$, $b = c = 0$).
En effet, si $\Delta \neq 0$, $\Delta = \delta^2$; M a trois valeurs propres distinctes 0, $+\delta$, $-\delta$. On constate qu'elle annule le polynôme scindé sans carré $X (X^2 - \Delta)$, donc elle est diagonalisable.
Si $\Delta = 0$, M n'a qu'une valeur propre, 0 ; M est diagonalisable ssi M est nulle, i.e. ssi $a = d$, $b = c = 0$.

4) <u>Supposons **K** = **R**</u>.

• A est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$ ssi $\Delta > 0$ ou ($\Delta = 0$, $a = d$, $b = c = 0$).
En effet, si $\Delta > 0$, A a deux valeurs propres réelles distinctes ;
Si $\Delta = 0$, A a une valeur propre λ ; elle doit alors être semblable à diag(λ, λ), donc égale à diag(λ, λ).
Si $\Delta < 0$, A est sans valeurs propres réelles.

• M est diagonalisable ssi $\Delta > 0$ ou ($\Delta = 0$, $a = d$, $b = c = 0$).
En effet, si $\Delta > 0$, $\Delta = \delta^2$; M a trois valeurs propres réelles distinctes 0, $+\delta$, $-\delta$; elle annule le polynôme scindé sans carré $X (X^2 - \Delta)$, donc elle est diagonalisable.
Si $\Delta = 0$, 0 est seule valeur propre ; M est diagonalisable ssi elle est nulle, i.e. ssi $a = d$, $b = c = 0$.
Si $\Delta < 0$, M n'a qu'une valeur propre réelle, 0 ; elle est diagonalisable ssi elle est nulle : impossible.

<u>Remarque</u> : L'équivalence A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ φ est diagonalisable est valable dans $M_n(\mathbf{K})$, mais il faut récourir à la décomposition de Dunford ou à d'autres outils (cf. pb CCP 2012).
Avec Maple :

```
> with(linalg):
> M:=matrix(4,4,[0,0,-c,b,0,0,c,-b,-b,b,a-d,0,c,-c,0,d-a]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{bmatrix}$$

```
> C:=factor(charpoly(M,x));
```

$$C := -x^2\,(-x^2 - 2\,a\,d + d^2 + a^2 + 4\,b\,c)$$

```
> P:=X*(X^2-a^2-d^2+2*a*d-4*b*c);
```

$$P := X\,(X^2 - a^2 - d^2 + 2\,a\,d - 4\,b\,c)$$

```
> simplify(evalm(subs(X=M,P)));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 11 : Soient E un **R**-espace vectoriel de dimension n, p un projecteur de E de rang r. Pour tout u ∈ $\mathcal{L}$(E), on pose F(u) = $\frac{1}{2}$(p o u + u o p). Valeurs propres, espaces propres, diagonalisabilité de F. Montrer que la suite (F^k) converge vers un projecteur à préciser.

Solution : [Oral Mines 1995]

Les cas r = 0 et n étant faciles, nous supposerons 0 < r < n.

1ère solution : matricielle. Choisissons une base de E telle que p ait pour matrice P = $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

Si u a pour matrice M = $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, F(u) a pour matrice Φ(M) = $\begin{bmatrix} A & B/2 \\ C/2 & O \end{bmatrix}$.

F(u) = λ.u , u ≠ 0, se traduit par Φ(M) = λ.M , M ≠ 0.

♣ Si λ ∉ {0, ½, 1}, A, B, C et D sont nulles : impossible.

♦ Si λ = 1, B, C et D sont nulles, A est quelconque : espace propre de dimension r^2.

♥ Si λ = ½, A et D sont nulles, B et C sont quelconques : espace propre de dimension 2r(n – r).

♠ Si λ = 1, A, B et C sont nulles, D est quelconques : espace propre de dimension $(n - r)^2$

La somme des dimensions est n^2 : on en déduit que Φ et F sont diagonalisables.

En réalité, Φ a pour base propre la base canonique (E_{ij}) de M_n(**R**).

De plus, F^k(u) a pour matrice Φ^k(M) = $\begin{bmatrix} A & B/2^k \\ C/2^k & O \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$ quand k → +∞.

Revenant à u, on voit que F^k(u) → π(u) = p o u o p.

2ème méthode, purement linéaire.

On montre que 2 F^3 – 3 F^2 + F = 0 ; F annule le polynôme X(X – 1)(2X – 1) qui est scindé sans carrés. On vérifie que 0, ½ et 1 sont bien valeurs propres de F. Je laisse le lecteur terminer.

Remarque : F est demi-somme de u → u o p et u → p o u ; ce sont deux projecteurs qui commutent, donc simultanément diagonalisables.

Exercice : calculer exp F.

Exercice 12 : matrices symétriques.

1) Montrer que toute matrice symétrique réelle A = $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans M_2(**R**).

2) Montrer que ce résultat tombe en défaut si l'on remplace **R** par **C**, **Q**, **Z**/5**Z**. Généraliser.

Solution : 1) Le polynôme caractéristique de A est scindé sur **R**, car il a pour discriminant

$$\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Si $a = c$ et $b = 0$, A est diagonale.
Sinon, $\Delta > 0$, A a deux valeurs propres réelles distinctes, donc est diagonalisable.
Il est de plus facile de vérifier que les vecteurs propres associés sont orthogonaux ; si on les norme, on voit que A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$.

2) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ est symétrique, nilpotente et non nulle ; elle n'est pas diagonalisable.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{Q})$ est symétrique ; son polynôme caractéristique $X^2 - 2$ n'est pas scindé dans **Q**.

$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{Z/5Z})$ est symétrique ; son polynôme caractéristique $X^2 + X + 1$ n'est pas scindé dans **Z**/5**Z** car son discriminant $\Delta = 2$ n'est pas un carré dans **Z**/5**Z**.

3) <u>Généralisons</u> : nous dirons qu'un corps commutatif **K** est *pythagoricien* s'il est de caractéristique $\neq 2$ et si la somme de deux carrés de **K** est un carré de **K**.
Alors toute matrice $A \in S_2(\mathbf{K})$ est diagonalisable.
En effet, $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$ est, soit nul (et alors $a = c$, et $b = 0$), soit un carré.
Récirpoquement, si **K** est de caractéristique $\neq 2$ et si toute matrice $A \in S_2(\mathbf{K})$ est diagonalisable, alors $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ est diagonalisable de trace nulle, donc semblable à $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$.
Passant au déterminant, il vient $-a^2 - b^2 = -c^2$, ce qui signifie que **K** est pythagoricien.

Exercice 13 : Cns pour que les matrices suivantes soient diagonalisables : $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Solution : Les méthodes polynomiales (th. de Schreier) sont ici nettement supérieures aux méthodes valeurs propres-espaces propres-dimension des espaces propres, qui sont néanmoins praticables.

♣ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ a pour seule valeur propre a. Elle est diagonalisable ssi $A = a\mathrm{I}$, *i.e.* $b = c = d = 0$.

♦ $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ a pour spectre $\{1, c\}$, donc une ou deux valeurs propres selon que $c = 1$ ou $c \neq 1$.

Si $c = 1$, B est diagonalisable ssi B = I, ce qui est impossible.
Si $c \neq 1$, B est diagonalisable ssi B annule le polynôme $(X-1)(X-c)$. Un rapide calcul montre que cela a lieu ssi $a = 0$.

<u>Conclusion</u> : B est diagonalisable ssi $c \neq 1$ et $a = 0$.

```
> B:=matrix(3,3,[1,a,1,0,1,b,0,0,c]);P:=(X-1)*(X-c);
evalm(subs(X=A,P));factor(minpoly(A,X));
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$P := (X-1)(X-c)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a\,(1-c) & a\,b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-(X-1)^2\,(-X+c)$$

<u>NB</u> : La dernière assertion de Maple est trompeuse. Elle donne à penser que B n'est jamais diagonalisable. Elle ne l'est pas dans $M_3(\mathbf{Q}(a, b, c))$, car dans le corps $\mathbf{Q}(a, b, c)$, automatiquement $c \neq 1$.

♥ C = $\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est triangulaire supérieure, de valeurs propres, 1 et 2.

Elle est diagonalisable ssi elle annule le polynôme (X – 1)(X – 2).

Un rapide calcul montre que C est diagonalisable ssi $a = f = 0$.

```
> with(linalg):
> C:=matrix(4,4,[1,a,b,c,0,1,d,e,0,0,2,f,0,0,0,2]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> P:=(X-1)*(X-2);evalm(subs(X=C,P));
```

$$P := (X-1)\,(X-2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & a\,d & a\,e+b\,f \\ 0 & 0 & 0 & d\,f \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> factor(minpoly(C,X));
```

$$(X-1)^2\,(X-2)^2$$

<u>Remarques</u> : 1) Cette dernière affirmation de Maple appelle les mêmes commentaires que ci-dessus.

2) Une tout autre approche consiste à écrire que Ker(C – I) et Ker(C – 2I) sont des plans.

♠ D = $\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X-1)^2\,(X-2)^2$.

Elle est diagonalisable ssi elle annule le polynôme (X – 1)(X – 2). Un rapide calcul montre que :
D est diagonalisable ssi $c = a + b$.

```
> with(linalg):M:=matrix(4,4,[1,a,b,c,0,1,0,0,0,-1,2,0,0,1,0,2]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> factor(charpoly(M,X));Q:=(X-1)*(X-2);evalm(subs(X=M,Q));
```

$$(X-1)^2\,(X-2)^2$$

$$Q := (X-1)\,(X-2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -a-b+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• $M = \begin{bmatrix} 1 & a & p & q \\ 0 & 1 & r & s \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X-1)^2\,(X-b)^2$.

Si $b = 1$, M est diagonalisable ssi M annule $X - 1$, donc ssi $M = I$, donc ssi $a = p = q = r = s = c = 0$.
Si $b \neq 1$, M est diagonalisable ssi M annule $(X-1)(X-b)$. Un rapide calcul montre que cela a lieu ssi $a = c = 0$.
Conclusion : M est diagonalisable ssi $b = 1$ et $a = p = q = r = s = c = 0$, ou $b \neq 1$ et $a = c = 0$.

Ce résultat généralise le ♥.

```
> with(linalg):
> M:=matrix(4,4,[1,a,p,q,0,1,r,s,0,0,b,c,0,0,0,b]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & a & p & q \\ 0 & 1 & r & s \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

```
> P:=(X-1)*(X-b);evalm(subs(X=M,P));
```

$$P := (X-1)\,(X-b)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a\,(1-b) & a\,r & a\,s+p\,c \\ 0 & 0 & 0 & r\,c \\ 0 & 0 & 0 & (b-1)\,c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 14 : Montrer que $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 2 & c & 0 \\ 0 & 0 & 3 & d \end{bmatrix}$ est diagonalisable ssi a, b, c et d sont distincts deux à deux.

Solution élémentaire :

1) a, b, c, d sont les valeurs propres de la matrice A. Si elles sont distinctes, on sait que A est diagonalisable (condition suffisante classique).

2) Les espaces propres associés à a, b, c, d sont des droites. Tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(A - a\,I) &= \mathbf{K}.((a-b)(a-c)(a-d)\,,\,(a-c)(a-d)\,,\,2(a-d)\,,\,6) \\ \operatorname{Ker}(A - b\,I) &= \mathbf{K}.(0\,,\,(b-c)(b-d)\,,\,2(b-d)\,,\,6) \\ \operatorname{Ker}(A - c\,I) &= \mathbf{K}.(0\,,\,0\,,\,c-d\,,\,3) \\ \operatorname{Ker}(A - d\,I) &= \mathbf{K}.(0\,,\,0\,,\,0\,,\,1) \end{aligned}$$

Ces vecteurs forment base ssi a, b, c, d sont deux à deux distincts.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[a,0,0,0,1,b,0,0,0,2,c,0,0,0,3,d]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 2 & c & 0 \\ 0 & 0 & 3 & d \end{bmatrix}$$

```
> ka:=kernel(A-a);kb:=kernel(A-b);kc:=kernel(A-c);kd:=kernel(A-d);
> P:=transpose(matrix([op(ka),op(kb),op(kc),op(kd)]));factor(det(P));
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(-c+a)(-d+a)(a-b) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6}(-c+a)(-d+a) & \frac{1}{6}(-c+b)(-d+b) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}d+\frac{1}{3}a & -\frac{1}{3}d+\frac{1}{3}b & -\frac{1}{3}d+\frac{1}{3}c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{108}(-c+a)(-d+a)(a-b)(-c+b)(-d+b)(-d+c)$$

<u>Solution plus savante et plus expéditive</u> :

A = $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 2 & c & 0 \\ 0 & 0 & 3 & d \end{bmatrix}$ est monogène, car (e_1, Ae_1, A^2e_1, A^3e_1) est une base de $\mathbf{K}^4$.

Elle est diagonalisable ssi elle a 4 valeurs propres distinctes.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[a,0,0,0,1,b,0,0,0,2,c,0,0,0,3,d]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 2 & c & 0 \\ 0 & 0 & 3 & d \end{bmatrix}$$

```
> x:=array([1,0,0,0]):y:=multiply(A,x):z:=multiply(A,y):t:=multiply(A,z):
P:=transpose(matrix([x,y,z,t]));F:=map(simplify,multiply(inverse(P),A,P));
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a+b & a^2+b(a+b) \\ 0 & 0 & 2 & 2a+2b+2c \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad F := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -abcd \\ 1 & 0 & 0 & abc+dab+dac+dbc \\ 0 & 1 & 0 & -ab-ac-bc-da-db-dc \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c+d \end{bmatrix}$$

<u>Remarque</u> : A est une matrice de Hessenberg triangulaire inférieure. Les termes situés sous la diagonale, 1, 2, 3, peuvent être remplacés par tous scalaires non nuls.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[a,0,0,0,1,b,0,0,0,1,c,0,0,0,1,d]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

```
> frobenius(A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -abcd \\ 1 & 0 & 0 & dca+dcb+dab+abc \\ 0 & 1 & 0 & -da-db-dc-ca-cb-ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c+d \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 15</u> : 1) CNS pour que $\begin{bmatrix} a & ab & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & cd \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$ soit diagonalisable.

2) Montrer que $\begin{bmatrix} a & ab & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & cd \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$ n'est jamais diagonalisable.

Solution : 0) Notons resp. A et B ces deux matrices ; A est diagonale-blocs, B trigonale-blocs.

Elles ont même polynôme caractéristique : $P(X) = X^2 (X - a - b) (X - c - d)$.

Donc Sp A = Sp B = $\{ 0 , a + b , c + d \}$ a au plus trois éléments.

1) Etude de A.

Ker A = $\{ (- by , y , - dt , t) ; (y, t) \in \mathbf{K}\times\mathbf{K} \}$ est le plan vectoriel engendré par les vecteurs

$(- b , 1 , 0 , 0)$ et $(0 , 0 , - d , 1)$.

Ker(A – $(a + b)$.I) contient $(a, 1, 0, 0)$, Ker(A – $(c + d)$.I) contient $(0, 0, c, 1)$.

Si A est diagonalisable, dim Ker A doit être égal à l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P : cela impose que $a + b$ et $c + d$ soient non nuls.

Réciproquement, si $a + b$ et $c + d$ sont non nuls, on dispose d'une base propre :

$$P = \begin{bmatrix} -b & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ vérifie } P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c+d \end{bmatrix}.$$

2) Etude de B.

Ker B = $\mathbf{K}.(0, 0, - d, 1)$ est une droite. Sa dimension n'est jamais égale à l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P, ordre qui est ≥ 2. Donc B n'est jamais diagonamlisable.

Autre solution : On constate que le polynôme $Q(X) = X (X - a - b) (X - c - d)$ vérifie $Q(B) \neq 0$.

$$\text{En effet, } Q(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & ad & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si B était diagonalisable, B aurait pour minimal $M(X) = \text{ppcm}(X, X - a - b, X - c - d)$, qui divise Q. $Q(B) \neq 0$ impliquerait $M(B) \neq 0$. Impossible !

Conclusion : A est diagonalisable ssi $a + b$ et $c + d$ sont non nuls. B n'est jamais diagonalisable.

Remarque : A et B sont des cas particuliers d'exercices ultérieurs.

En effet, A est diagonalisable ssi les matrices $\begin{bmatrix} a & ab \\ 1 & b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c & cd \\ 1 & d \end{bmatrix}$ le sont.

Or ce sont des matrices de rang 1, et une matrice de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace est $\neq 0$.

En vertu de l'ex. ?, B est diagonalisable ss'il existe X telle que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & cd \\ 1 & d \end{bmatrix}.X - X.\begin{bmatrix} a & ab \\ 1 & b \end{bmatrix}$.

Or cela est impossible.

Exercice 16 : **réduction des matrices de rang 1.**

1) Soit $J \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice carrée dont tous les éléments sont égaux à 1.
Montrer que J est diagonalisable. La diagonaliser.

2) Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer que A est de rang 1 si et seulement s'il existe des matrices-colonnes $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ non nulles et telles que $A = X.{}^tY$; le couple (X, Y) est-il unique ?

Exprimer A^2 à l'aide de A et de sa trace.

Indiquer une cns portant sur tr A pour que A soit diagonalisable.

3) Soient A et B dans $M_n(\mathbf{R})$ telles que rg(AB – BA) = 1. Calculer $(AB - BA)^2$.

4) La matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbf{R})$ est dite **équitable** si $\forall (i, j, k)\ \ a_{i,j} > 0$ et $a_{i,j}\, a_{j,k} = a_{i,k}$.

a) Calculer $a_{i,i}$; exprimer $a_{i,j}$ à l'aide de $a_{i,1}$ et de $a_{j,1}$.

b) Montrer que A est de rang 1, et que $A^2 = n.A$.

c) Montrer que toutes les matrices équitables sont semblables à la matrice J définie en 1), ainsi qu'à la matrice diag(n, 0, …, 0).

5) Réduire la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbf{R})$, où $a_{i,j} = 1$ si $1 \le i \le q$ et $1 \le j \le p$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

<u>**Solution**</u> :

1) J est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.
Le mieux est de chercher ses éléments propres (λ, X).

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \dots = \lambda x_n .$$

$\lambda = 0$ donne l'hyperplan $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$;
$\lambda \neq 0$ donne la droite $\mathbf{R}$ (1, 1, …, 1), et $\lambda = n$.
J est orthogonalement semblable à la matrice diag(n, 0, …, 0).

2) La première affirmation a déjà été établie dans un exercice antérieur.

$$A^2 = (X.{}^tY).(X.{}^tY) = X.({}^tY.X).{}^tY = ({}^tY.X).(X.{}^tY) = (\sum x_i\, y_i)\ A = (\text{tr } A).A.$$

Si tr A = 0, A est nilpotente et non nulle, donc n'est pas diagonalisable.
Si tr A ≠ 0, A annule le polynôme scindé sans facteurs carrés X.(X – tr A), donc est diagonalisable.
Ses valeurs propres sont 0 et tr A.

Ker(A) est l'hyperplan d'équation ${}^tY.Z = 0$, $y_1.z_1 + \dots + y_n.z_n = 0$.
Ker(A – tr A.I) est la droite $\mathbf{K}$.X.

3) [Oral Mines PC 2010, RMS n° 606].
La matrice C = AB – BA étant de rg 1 vérifie $C^2 = (\text{tr } C).C$. Comme elle est de trace nulle, $C^2 = O$.

4) <u>**Matrices équitables**</u>.
$(a_{i,i})^2 = a_{i,i}$, donc $a_{i,i} = 0$ ou 1, mais les $a_{i,j}$ sont > 0, donc $a_{i,i} = 1$. Du coup $a_{i,j} = 1/a_{j,i}$.

Si $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1/b & 1 \end{bmatrix}$, si $n = 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 1/b & 1 & c/b \\ 1/c & b/c & 1 \end{bmatrix}$.

Dans le cas général, notons $b_k = a_{1k}$ pour $2 \le k \le n$. Alors $a_{ij} = a_{i1}.a_{1j} = \dfrac{b_j}{b_i}$.

Donc $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/b_2 \\ \dots \\ 1/b_n \end{bmatrix} [1 , b_2 , \dots , b_n]$ est de rang 1 et de trace n. Le reste s'ensuit.

5) Ici $A = X.{}^tY$, où $X = {}^t(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 q fois) et $Y = {}^t(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 p fois).
tr A = min(p, q) …

<u>Référence</u> : H. Eves, *Elementary matrix theory*, Dover, p. 274.

<u>**Exercice 17**</u> : Soient (a_1, …, a_n) et (b_1, …, b_n) deux vecteurs indépendants de $\mathbf{R}^n$.
Réduire la matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$, où $m_{ij} = a_i.b_j + a_j.b_i$.
Réduire la matrice $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$, où $p_{ij} = a_i.b_j - a_j.b_i$.

<u>**Solution**</u> :

1) <u>M est symétrique réelle</u>, donc diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.

Si l'on équipe $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire canonique $(x \mid y) = {}^t x.y = \sum x_i y_i$, il vient :

$$M = a.{}^t b + b.{}^t a \qquad\qquad M.x = (x \mid a).b + (x \mid b).a .$$

2) <u>Cherchons les éléments propres (λ, x), $x \neq 0$, de M : $(x \mid a).b + (x \mid b).a = \lambda x$</u>.

• Si $\lambda = 0$, il vient $(x \mid a) = (x \mid b) = 0$: Ker M = Vect$(a, b)^{\perp}$, sous-espace de dimension $n - 2$.
Le fait que M soit de rang 2 découle aussi d'un exercice antérieur sur les matrices de rang r.

• Si $\lambda \neq 0$, il vient $x \in$ Vect(a, b). Posons $x = \alpha a + \beta b$. En identifiant par liberté de (a, b), il vient :

$$(a \mid b).\alpha + (b \mid b).\beta = \lambda.\alpha$$
$$(a \mid a).\alpha + (a \mid b).\beta = \lambda.\beta$$

Donc $(\lambda, {}^t(\alpha, \beta))$ sont éléments propres de la matrice $\begin{bmatrix} p & q \\ r & p \end{bmatrix}$, où $p = (a \mid b)$, $q = (b \mid b)$ et $r = (a \mid a)$.

On trouve $\lambda = (a \mid b) \pm \|a\|.\|b\|$. En vertu de Cauchy-Schwarz, une valeur propre est > 0, l'autre < 0.
Vecteur propre associé à $(a \mid b) \pm \|a\|.\|b\|$: $\|b\|.a \pm \|a\|.b$.

3) <u>Application</u> : On retrouve la réduction de la première matrice de l'exercice précédent.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} = a.{}^t b + b.{}^t a \ , \text{ où } \ a = {}^t(\tfrac{1}{2}, 1, \dots, 1, \tfrac{1}{2}) \ \text{ et } \ b = {}^t(1, 0, \dots, 0, 1) .$$

4) <u>La matrice B est antisymétrique réelle</u>.

Dans $\mathbf{R}^n$ euclidien standard : $B = a.{}^t b - b.{}^t a \qquad B.x = (x \mid a).b - (x \mid b).a$.
Cherchons les éléments propres (λ, x), $x \neq 0$, de B : $(x \mid a).b - (x \mid b).a = \lambda x$.

• Si $\lambda = 0$, il vient $(x \mid a) = (x \mid b) = 0$: Ker B = Vect$(a, b)^{\perp}$, sous-espace de dimension $n - 2$.
Le fait que B soit de rang 2 découle aussi d'un exercice antérieur sur les matrices de rang r.

• Complétons une base orthonormée (e_1, e_2) de Vect(a, b) en une base orthonormée de E.
La matrice de l'endomorphisme associé à B relativement à cette base s'écrit diag$\left(\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, O\right)$.

<u>Exercice 18</u> : Soient $E = \mathbf{K}_n[X]$, A et B deux éléments de $\mathbf{K}[X]$, B étant de degré $n + 1$.

1) Montrer que f : P $\to$ AP mod B (reste euclidien de AP par B), est un endomorphisme de E.
Quel est son rang ? Donner une cns pour que f soit inversible.

2) On suppose que B est scindé à racines simples. Eléments propres de f ? f est-il diagonalisable ?

3) Exemple : $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $B = X^{n+1} - 1$, $A = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. Quelle est la matrice de f ?

<u>Solution</u> :

1) L'application u : P $\to$ AP mod B est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$, comme composée de P $\to$ AP et de Q $\to$ Q mod B qui est un projecteur (projecteur de $\mathbf{K}[X]$ sur $\mathbf{K}_n[X]$ parallèlement à $B.\mathbf{K}[X]$).
De plus Im u $\subset \mathbf{K}_n[X]$, donc u laisse stable $\mathbf{K}_n[X]$. On note $f = u_E$.
Notons $D = A \wedge B$, $A = D.A'$, $B = D.B'$.
Alors $P \in \text{Ker} f \iff B \mid AP \iff B' \mid A'P \iff B' \mid P$ (en vertu du théorème dit de Gauss)
$\iff P = B'Q$, où $\deg Q \leq n - \deg B'$.

Il en résulte que $\dim \text{Ker} f = n - \deg B' + 1$, et que $\text{rg} f = \deg B'$.
Par suite, f est inversible ssi $\deg B' = n + 1 = \deg B$, *i.e.* ssi A et B sont premiers entre eux.

2) Notons $B(X) = (X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_n)$.

<u>1^{ère} méthode</u> : Soit $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ la base de Lagrange associée aux a_i .

Alors $f(P) = \sum_{i=0}^{n} A(a_i)P(a_i).L_i(X)$. La matrice de f relativement à $\mathcal{L}$ est diag$(A(a_0), A(a_1), \dots, A(a_n))$.

Ainsi, les éléments propres de f sont les couples $(A(a_i), L_i(X))$ $(0 \le i \le n)$.

2ème méthode : directe. Soit (λ, P) un couple d'éléments propres.

$f(P) = \lambda P$, $P \neq 0 \Rightarrow$ B(X) divise $(A(X) - \lambda).P(X) \Leftrightarrow (\forall i)\ (A(a_i) - \lambda).P(a_i) = 0$.

• Si $(\forall i)\ \lambda \neq A(a_i)$, alors $(\forall i)\ P(a_i) = 0$, et B(X) divise P(X), donc P est nul.

• Donc $(\exists i)\ \lambda = A(a_i)$, écrivons $A(X) - A(a_i) = (X - a_i)^k.Q(X)$, où $Q(a_i) \neq 0$.

Alors B(X) divise $(A(X) - A(a_i)).P(X) \Leftrightarrow \prod_{k\neq i}(X - a_k)$ divise Q(X).P(X).

Là, il y a une difficulté pour raisonner de manière parfaitement satisfaisante.

Prenons alors, dogmatiquement, $P(X) = P_i(X) = \prod_{k\neq i}(X - a_k)$.

On voit que P_i est non nul, et que B(X) divise $(A(X) - A(a_i)).P_i(X)$.

Ainsi, $(A(a_i), P_i)$ est un couple d'éléments propres de f. Et l'on dispose bien d'une base propre de f.

3) f a pour matrice dans la base canonique $\begin{bmatrix} a_0 & a_n & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_0 & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$. C'est une matrice cyclique.

Remarque : Cet exercice ouvre sur la théorie du résultant d'Hermite. Le résultant de A et B n'est autre que le déterminant de f (cf. mes problèmes d'algèbre linéaire).

Exercice 19 : Soient **K** un corps fini commutatif à q éléments, E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable $\Leftrightarrow u^q = u$.

Solution :

Le polynôme $P(X) = X^q - X$ est scindé à racines simples, car en réalité $P(X) = \prod_{\alpha\in K}(X - \alpha)$ en vertu du petit théorème de Fermat relatif au corps **K**.

• Si $u^q = u$, u annule un polynôme scindé à racines simples, donc il est diagonalisable.

• Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat(u, \mathcal{B}) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Et alors $Mat(u^q, \mathcal{B}) = diag((\lambda_1)^q, (\lambda_2)^q, \dots, (\lambda_n)^q) = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = Mat(u, \mathcal{B})$ en vertu du PTF, donc $u^q = u$.

Exercice 20 : Si $(A, B) \in M_p(\mathbf{K})\times M_q(\mathbf{K})$, cns pour que $M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \in M_{p+q}(\mathbf{K})$ soit diagonalisable.

Solution : La cns est facile à conjecturer :

$$\boxed{\text{M est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{A et B sont diagonalisables.}}$$

Le sens $\Leftarrow$ est élémentaire : Si $P^{-1}.A.P = D_A$ et $Q^{-1}.B.Q = D_B$ sont diagonales, alors la matrice R = diag(P, Q) est inversible et $R^{-1}.M.R = diag(D_A , D_B)$ est diagonale.

La réciproque est beaucoup moins évidente. Comme souvent, trois types d'approches sont possibles :

– l'approche par les espaces propres ;

– l'approche par les polynômes annulateurs, minimaux, et le théorème de Schreier ;

– l'approche plus savante par la décomposition additive, dite « de Dunford », sera laissée au lecteur.

Première approche, polynomiale.

Si M est diagonalisable, elle annule un polynôme scindé $\Phi(X)$ sans facteurs carrés.

Comme $\Phi(M) = diag(\Phi(A), \Phi(B))$, Φ annule A et B, donc A et B sont diagonalisables.

D'une façon plus générale, pour tout polynôme $F \in \mathbf{K}[X]$, on a $F(M) = \mathrm{diag}(F(A), F(B))$.
Il en résulte aussitôt que le polynôme minimal de M est le ppcm des polynômes minimaux de A et B
Or, pour que le ppcm de deux polynômes soit scindé sans facteurs carrés, il faut et il suffit que chacun d'un soit scindé sans facteurs carrés. La CNS tombe aussitôt.

Deuxième approche, par les espaces propres.

Le polynôme caractéristique de M est le produit des polynômes caractéristiques de A et B.
Il est scindé ssi chacun d'eux l'est, et l'on a de plus $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$.
Cherchons les éléments propres de M.

$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre de M ss'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $AX = \lambda X$ et $BY = \lambda Y$.

L'un des vecteurs X ou Y est non nul, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$.
Réciproquement si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$, $\exists Z \neq 0$ $MZ = \lambda Z$, donc $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$.
Plus précisément :

- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) - \mathrm{Sp}(B)$, $Y = 0$ et $\mathrm{Ker}(M - \lambda I) = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} ; X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \right\}$;
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B) - \mathrm{Sp}(A)$, $X = 0$ et $\mathrm{Ker}(M - \lambda I) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} ; Y \in \mathrm{Ker}(B - \lambda I) \right\}$;
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I) = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} ; X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \text{ et } Y \in \mathrm{Ker}(B - \lambda I) \right\}$.

Tout cela est toujours vrai.
M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme caractéristique est scindé et $\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim Ker(M - \lambda I) = p + q$

$\Leftrightarrow$ les polynômes caractéristiques de A et B sont scindés et

$$\sum_{\lambda \in Sp(A)-Sp(B)} \dim Ker(A-\lambda I) + \sum_{\lambda \in Sp(B)-Sp(A)} \dim Ker(B-\lambda I) + \sum_{\lambda \in Sp(A)\cap Sp(B)} (\dim Ker(A-\lambda I) + \dim Ker(B-\lambda I)) = p + q$$

$\Leftrightarrow$ les polynômes caractéristiques de A et B sont scindés et

$$\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim Ker(A-\lambda I) + \sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim Ker(B-\lambda I) = p + q$$

$\Leftrightarrow$ les polynômes caractéristiques de A et B sont scindés et

$$\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim Ker(A-\lambda I) = p \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim Ker(B-\lambda I) = q$$

$\Leftrightarrow$ A et B sont diagonalisables.

Exercice 21 : Soient $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{R})$ et $B = \begin{bmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{bmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Solution : [Oral Mines 2009 PC, RMS n° 634]

1) Traitons le cas $n = 1$, avec Maple.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[a,a^3,1/a,a]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a & a^3 \\ \frac{1}{a} & a \end{bmatrix}$$

```
> c:=factor(charpoly(A,x));
```

$$c := -x(-x + 2a)$$

```
> k1:=kernel(A);k2:=kernel(A-2*a);
P:=transpose(matrix([op(k1),op(k2)]));multiply(inverse(P),A,P);
```

$$k1 := \{[-a^2, 1]\} \qquad k2 := \{[a^2, 1]\}$$

$$P := \begin{bmatrix} -a^2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$$

On voit que B est diagonalisable.

2) Revenons au cas général, en nous inspirant de ce que nous venons de trouver.

Soit P = $\begin{bmatrix} -A^2 & A^2 \\ I & I \end{bmatrix}$. On vérifie que P^{-1} = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -A^{-2} & I \\ A^{-2} & I \end{bmatrix}$, et que P^{-1} B P = $\begin{bmatrix} O & O \\ O & 2A \end{bmatrix}$.

Par conséquent, B est semblable à diag(O, 2A).
En vertu de l'exercice précédent, B est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

Exercice 22 : Si (A, B) $\in$ $M_p(\mathbf{K})\times M_q(\mathbf{K})$ ont des polynômes caractéristiques premiers entre eux, Montrer que les matrices qui commutent à M = $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \in M_{p+q}(\mathbf{K})$ sont de la forme $\begin{bmatrix} X & O \\ O & Y \end{bmatrix}$, où X commute à A et Y commute à B.

Solution : Soit N = $\begin{bmatrix} X & U \\ V & Y \end{bmatrix}$; M.N = N.M $\Leftrightarrow$ A.X = X.A, B.Y = Y.B, A.U = U.B et B.V = V.A.

Or A.U = U.B implique, pour tout P $\in$ $\mathbf{K}$[X] : P(A).U = U.P(B).
Prenons pour P le polynôme caractéristique de A. Alors 0 = U.P(B) (*).
Si Q est le polynôme caractéristique de B, par Bezout, $\exists$(R, S) $\in$ $\mathbf{K}[X]\times\mathbf{K}[X]$ 1 = P.R + Q.S.
Du coup, I = P(B).R(B), et P(B) est inversible. Reportant en (*), on en déduit que U = 0.
En échangeant les rôles de A et B on voit que V = 0. CQFD.

Remarque : On aurait pu supposer les polynômes minimaux de A et B premiers entre eux. D'ailleurs, on peut montrer que le caractéristique et le minimal ont les mêmes diviseurs irréductibles : les deux conditions sont alors équivalentes.

Exercice 23 : Soient $a_1, \dots, a_n$ n scalaires. Cns pour que A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ soit diagonalisable.

Solution : Les plans Vect(e_k, e_{n+1-k}) sont stables par l'endomorphisme f canoniquement associé à A.

Du coup, dans la base $\mathfrak{B}$ = (e_1, e_n, e_2, e_{n-1}, etc.), f a pour matrice B = diag ($\begin{bmatrix} 0 & a_n \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & a_{n-1} \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$, etc.).

Autrement dit A et B sont semblables.

En vertu de l'exercice 48, A est diagonalisable ssi chacune des matrices $\begin{bmatrix} 0 & a_{n+1-k} \\ a_k & 0 \end{bmatrix}$ l'est.

Or il est facile d'établir que $\begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable ssi $a = b = 0$ ou $a.b \neq 0$.

On en conclut que si $n = 2m$ ou $2m+1$, A est diagonalisable ssi pour tout $1 \le k \le m$, $a_k = a_{n+1-k} = 0$ ou bien $a_k.a_{n+1-k} \neq 0$.

Exercice 24 : CNS pour que M = $\begin{bmatrix} O & I \\ A & O \end{bmatrix}$ $\in$ $M_{2n}(\mathbf{C})$ soit diagonalisable.

Solution : Soit (λ, Z) un couple d'éléments propres de M, Z = $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$.

On a Y = λX et AX = λY. Nécessairement X $\neq$ 0, et AX = λ^2 X ; λ^2 est donc une valeur propre de A.

- Soient μ une valeur propre non nulle de A, λ et $-\lambda$ ses deux racines carrées.

μ donne naissance à deux espaces propres de M, de même dimension dim Ker(A $-$ μI).

- Si 0 est valeur propre de A, 0 est valeur propre de M, et dim Ker M = dim Ker A.

Donc si 0 n'est pas valeur propre de A, la somme des dimensions de espaces propres de M est : $\sum_{\mu\in Sp(A)} 2.\dim Ker(A-\mu I)$. Elle vaut $2n$ ssi $\sum_{\mu\in Sp(A)} \dim Ker(A-\mu I) = n$, donc ssi A est diagonalisable.

Si 0 est valeur propre de A, la somme des dimensions de espaces propres de M est :

$$\sum_{\mu\in Sp(A)-\{0\}} 2.\dim Ker(A-\mu I) + \dim \text{Ker } A < 2 \sum_{\mu\in Sp(A)} \dim Ker(A-\mu I) < 2n.$$

Par conséquent M est diagonalisable ssi A est diagonalisable et inversible.

<u>Solution polynomiale</u>. Le calcul des puissances de M donne : P(M) = $\begin{bmatrix} Q(A) & R(A) \\ A.R(A) & Q(A) \end{bmatrix}$,

où P(X) = Q(X) + X.R(X) , Q(X) = $\frac{P(X)+P(-X)}{2}$ et R(X) = $\frac{P(X)-P(-X)}{2X}$, polynômes pairs.

Donc P(M) = O $\Leftrightarrow$ Q(A) = R(A) = 0 . Suite laissée au lecteur…

<u>Exercice 25</u> : Soient E un **C**-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E.

1) Montrer que f diagonalisable $\Rightarrow f^2$ diagonalisable, que la réciproque est fausse, mais qu'elle est vraie sous l'hypothèse supplémentaire que f est inversible.

2) Montrer plus précisément que f diagonalisable $\Leftrightarrow$ f^2 diagonalisable et Ker f = Ker f^2 .

3) <u>Applications</u> :

i) CNS pour que la matrice A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ soit diagonalisable.

ii) CNS pour que M = $\begin{bmatrix} O & I \\ A & O \end{bmatrix}$ soit diagonalisable. iii) Idem pour M = $\begin{bmatrix} O & A \\ A & O \end{bmatrix}$.

<u>Solution</u> :

1) Si f est diagonalisable, f^2 est diagonalisable, car le carré d'une matrice diagonale est diagonale.

La réciproque est fausse si $n \geq 2$: N = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est de carré nul mais n'est pas diagonalisable.

Plus généralement diag(N, O_{n-2}) est de carré nul, mais n'est pas diagonalisable.
Si f^2 est diagonalisable et si f est inversible, alors f^2 est aussi inversible.
Son polynôme minimal est de la forme Q(X) = (X − β_1) … (X − β_r), où les β_k sont non nuls et distincts. f annule le polynôme P(X) = Q(X^2) = ($X^2 - \beta_1$) … ($X^2 - \beta_r$), polynôme qui est scindé sans facteurs carrés.

2) <u>Montrons l'équivalence : f diagonalisable $\Leftrightarrow$ f^2 diagonalisable et Ker f = Ker f^2</u>.

Si f est diagonalisable, Mat(f, $\mathcal{B}$) = diag(λ_1, …, λ_r, 0, … , 0).
Alors Mat(f^2, $\mathcal{B}$) = diag(λ_1^2 , …, λ_r^2, 0, … , 0) et Ker f = Ker f^2 = Vect(e_{r+1}, …, e_n).
Supposons f^2 diagonalisable et Ker f = Ker f^2.
Si f est inversible, on a déjà vu que f est diagonalisable.
Sinon, le polynôme minimal de f^2 est Q(X) = X.(X − β_1) … (X − β_r), où les β_k sont non nuls et distincts. f annule le polynôme P(X) = X^2 ($X^2 - \beta_1$) … ($X^2 - \beta_r$) = X^2.R(X^2).
En vertu du théorème des noyaux, $\mathbf{C}^n$ = Ker $f^2 \oplus$ Ker R(f^2) = Ker f $\oplus$ Ker R(f^2).
Donc f annule le polynôme X.($X^2 - \beta_1$) … ($X^2 - \beta_r$) qui est scindé sans carrés. Cqfd.

3) i) est facile.

ii) $M^2 = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$, Ker M = $\{ \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}$; X ∈ Ker A$\}$ est de dimension dim Ker A, Ker $M^2 = \{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$; AX = AY = 0 $\}$ est de dimension 2.dim Ker A.

On déduit de ce qui précède que M est diagonalisable ssi A est diagonalisable et inversible.

iii) $M^2 = \begin{bmatrix} A^2 & O \\ O & A^2 \end{bmatrix}$, Ker M = $\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$; AX = AY = 0$\}$ est de dimension 2.dim Ker A, Ker M^2 = $\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$; $A^2X = A^2Y = 0$ $\}$ est de dimension 2.dim Ker A^2.

M est diagonalisable ssi A^2 l'est et dim Ker A = Ker A^2, donc ssi A est diagonalisable.

Remarque : Le lecteur pourra montrer en exercice le résultat suivant :

Soit A∈ $Gl_n(\mathbf{C})$ diagonalisable. Toute matrice M∈ $M_n(\mathbf{C})$ telle que $M^p = A$ (p ≥ 1) est diagonalisable.

Exercice 26 : Montrer que si $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ et A ∈ $M_n(\mathbf{K})$ sont diagonalisables, il en est de même de M = $\begin{bmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbf{K})$. Application : diagonaliser $\begin{bmatrix} ac & ad & bc & bd \\ ad & ac & bd & bc \\ bc & bd & ac & ad \\ bd & bc & ad & ac \end{bmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$.

Solution : Voici l'idée.

1) Si U = $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre α et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors U ⊗X = $\begin{bmatrix} pX \\ qX \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre αλ.

Cela découle de ce que M.(U ⊗ X) = (B.U) ⊗ (A.X) = (α.U) ⊗ (λ.X) = (α.λ)(U ⊗ X) et U ⊗ X ≠ 0.

2) Si (U , V) est une base de $\mathbf{K}^2$ et $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathbf{K}^n$, alors je dis que :

$$(U \otimes X_1, \dots, U \otimes X_n , V \otimes X_1, \dots, V \otimes X_n) \text{ est une base de } \mathbf{K}^{2n} .$$

Il suffit de montrer la liberté. Supposons donc :

$$\lambda_1.(U \otimes X_1) + \dots + \lambda_n.(U \otimes X_n) + \mu_1.(V \otimes X_1) + \dots + \mu_n.(V \otimes X_n) = 0.$$

Posons U = $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ et V = $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$. Identifiant le haut et le bas du vecteur, il vient :

$$\lambda_1.p.X_1 + \dots + \lambda_n.p.X_n + \mu_1.r.X_1 + \dots + \mu_n.r.X_n = 0 \qquad (1)$$
$$\lambda_1.q.X_1 + \dots + \lambda_n.q.X_n + \mu_1.s.X_1 + \dots + \mu_n.s.X_n = 0 \qquad (2)$$

Soit $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}^{-1}$. On a αp + βq = 1 , αr + βs = 0 , etc.

Multiplions (1) par α et (2) par β et additionnons, puis (1) par γ et (2) par δ et additionnons.

Il vient : $\lambda_1.X_1 + \dots + \lambda_n.X_n = 0$ et $\mu_1.X_1 + \dots + \mu_n.X_n = 0$. Donc tous les λ_i et μ_j sont nuls.

3) Si donc on dispose d'une base propre de B et d'une base propre de A, alors on dispose d'une base propre de M. En d'autres termes, si $P^{-1}.B.P$ et $Q^{-1}.A.Q$ sont diagonales, la matrice P⊗Q a pour colonnes une base propre de B ⊗ A, et $(P \otimes Q)^{-1}.(B \otimes A).(P \otimes Q)$ est diagonale. CQFD.

Remarques : i) Tout cela relève de la théorie générale des produits tensoriels ou kroneckériens ; cf. mes problèmes d'algèbre linéaire.

ii) On trouvera une réciproque partielle dans la RMS mai-juin 1995, p. 736.

4) Application : M = $\begin{bmatrix} ac & ad & bc & bd \\ ad & ac & bd & bc \\ bc & bd & ac & ad \\ bd & bc & ad & ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$.

Or P = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ diagonalise les matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$, donc P ⊗ P diagonalise $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$.

Exercice 27 : Soit A ∈ $M_n(\mathbf{K})$. CNS pour que M = $\begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix}$ ∈ $M_{2n}(\mathbf{K})$ soit diagonalisable.

Solution : M est un produit tensoriel : M = T ⊗ A, où T = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Le cas $n = 1$ est facile. On voit aisément que M = $\begin{bmatrix} a & a \\ O & a \end{bmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Nous allons montrer plus généralement que M est diagonalisable ssi M est nulle.
Ici encore, plusieurs approches sont possibles.

Première approche, polynomiale.

Une récurrence facile montre que, pour tout entier naturel k : $M^k = \begin{bmatrix} A^k & kA^k \\ O & A^k \end{bmatrix}$.

On en déduit par linéarité que pour tout polynôme P : P(M) = $\begin{bmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ O & P(A) \end{bmatrix}$.

Si M est diagonalisable, elle annule un polynôme scindé sans facteur carré Φ.
On a aussitôt Φ(A) = A.Φ'(A) = O. Le polynôme minimal de A divise Φ(X) et X.Φ'(X).
Mais comme Φ est sans facteurs carrés, Φ et Φ' sont premiers entre eux dans **K**[X].
Le pgcd de Φ(X) et X.Φ'(X) est aussi le pgcd de Φ et X.
Comme il est de degré ≥ 1, ce ne peut être que X. Donc A = O. Réciproque immédiate.

Remarque : De manière plus synthétique, comparons les polynômes minimaux de A et M :

$P(M) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ et } A.P'(A) = 0 \Leftrightarrow \mu_A \mid P \text{ et } \mu_A \mid X.P'$

$\Leftrightarrow P = \mu_A.Q \text{ et } \mu_A \mid X.P' = X.(\mu_A.Q' + \mu_A'.Q)$

$\Leftrightarrow P = \mu_A.Q \text{ et } \mu_A \mid X.\mu_A'.Q$. En vertu du théorème de Gauss :

$\Leftrightarrow P = \mu_A.Q \text{ et } \dfrac{\mu_A}{\mathrm{pgcd}(\mu_A, X\mu_A')} \mid Q \Leftrightarrow \dfrac{(\mu_A)^2}{\mathrm{pgcd}(\mu_A, X\mu_A')} \mid P$

Conclusion : $\mu_M = \mu_A.\dfrac{\mu_A}{\mathrm{pgcd}(\mu_A, X\mu_A')}$.

M est diagonalisable ⇔ μ_M est scindé sans facteur carré

⇔ μ_A est scindé sans facteur carré et $\dfrac{\mu_A}{\mathrm{pgcd}(\mu_A, X\mu_A')}$ est premier avec μ_A … or il le divise !

⇔ μ_A est scindé sans facteur carré et $\dfrac{\mu_A}{\mathrm{pgcd}(\mu_A, X\mu_A')} = 1$

⇔ μ_A est scindé sans facteur carré et $\mu_A \mid X.(\mu_A)'$ ⇔ $\mu_A = X$ ⇔ A = 0 derechef.

Deuxième approche, par les espaces propres.

Supposons M diagonalisable ; alors A est diagonalisable, car le minimal de A divise celui de M.
De plus, le polynôme caractéristique de M est le carré de celui de A.
Il est scindé ssi celui de A l'est et Sp M = Sp A.
Cherchons les éléments propres de M.

$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \neq 0$ est un vecteur propre de M ss'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $AX + AY = \lambda X$ et $AY = \lambda Y$, ou encore $(A - \lambda I).X = -\lambda Y$ et $AY = \lambda Y$.

1er cas : $\lambda \neq 0$. Alors $X \neq 0$ (sans quoi $Z = 0$), et $X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda.I)^2$, $Y = -\frac{1}{\lambda}(A - \lambda.I).X$.

Ainsi, $\dim \operatorname{Ker}(M - \lambda.I) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda.I)^2$.

Mais, si A est diagonalisable, pour toute valeur propre de A, $\operatorname{Ker}(A - \lambda.I)^2 = \operatorname{Ker}(A - \lambda.I)$.

2ème cas : $\lambda = 0$. Alors cela s'écrit $A.X = A.Y = 0$. Donc $\dim \operatorname{Ker} M = 2.\dim \operatorname{Ker} A$.

On veut que $\sum_{\lambda \in SpM} Ker(M - \lambda.I) = 2n$ ... Cela impose que Sp A = {0} ; A étant diagonalisable, A = 0.

Troisième approche, plus matricielle.

Si M est diagonalisable, A aussi. Soit P telle que $P^{-1}.A.P = D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Alors $\begin{bmatrix} P^{-1} & O \\ O & P^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & O \\ O & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & D \\ O & D \end{bmatrix}$. Or cette matrice met en évidence des plans stables

$\operatorname{Vect}(e_i, e_{n+i})$ ($1 \leq i \leq n$). Elle est donc semblable à un tableau diagonal $\operatorname{diag}(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_n & \alpha_n \\ 0 & \alpha_n \end{bmatrix})$.

En vertu de l'exercice 1 ci-dessus, cette matrice est diagonalisable ssi chacune des matrices $\begin{bmatrix} \alpha_k & \alpha_k \\ 0 & \alpha_k \end{bmatrix}$ l'est, c'est-à-dire ssi tous les α_k sont nuls.

Quatrième approche, via la décomposition additive. Elle est beaucoup plus courte.

Si M est diagonalisable, A l'est, et $\begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & A \\ O & O \end{bmatrix}$ est la décomposition additive de M.

M est diagonalisable ssi sa composante nilpotente est nulle, *i.e.* si A = O.

Exercice 28 : Montrer que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{K})$, où $A \in M_p(\mathbf{K})$, est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$.

Solution : 1) Supposons A diagonalisable et $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$.

On peut écrire B = AC (théorème de factorisation).

Si $P^{-1}AP = D$ est diagonale, alors $\begin{bmatrix} P^{-1} & P^{-1}C \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & -C \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1}A & P^{-1}B \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & -C \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

2) Si M est diagonalisable, A aussi en tant que restriction de M à un sous-espace stable.

Soit P telle que $P^{-1}.A.P = D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0) = \operatorname{diag}(\Delta, O)$, où les a_k sont non nuls.

On a posé $\Delta = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_r)$.

Alors $M' = \begin{bmatrix} P^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & O \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1}AP & P^{-1}B \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & O & H \\ O & O & K \\ O & O & O \end{bmatrix}$,

où K est de format $(p - r)\times(n - p)$. Il faut montrer que K est nulle.

Si M' est diagonalisable, 0 est valeur propre d'ordre $n - r$ de son polynôme caractéristique, donc Ker M' est de dimension $n - r$.

Par ailleurs $\operatorname{Ker} M' = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} ; \Delta.X + H.Z = 0 , K.Z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\Delta^{-1}HZ \\ Y \\ Z \end{bmatrix} ; K.Z = 0 \right\}$

est de dimension $\dim \operatorname{Ker} K + p - r = n - p - \operatorname{rg} K + p - r = n - \operatorname{rg} K - r$.

Finalement, K = O, ce qui montre que $\operatorname{Im} C \subset \operatorname{Im} D$, donc que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$.

Variante : $\begin{bmatrix} \Delta & O & H \\ O & O & K \\ O & O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & O & H \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O & O \\ O & O & K \\ O & O & O \end{bmatrix}$ est une décomposition ADN, donc K = O.

Remarques : 1) Une méthode polynomiale me semble praticable : calculez P(M) …
2) L'exercice suivant généralise celui-ci.

Source : Mneimné, *Réduction des endomorphismes*, p. 59 et 77 (Calvage et Mounet).

Exercice 29 : Soient $A \in M_p(\mathbf{K})$, $B \in M_q(\mathbf{K})$, et $M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{K})$, avec $n = p + q$.

a) Montrer que si M est diagonalisable, A et B le sont.

b) Montrer que si M est diagonalisable, il existe $(P_1, P_2, P_3) \in M_p(\mathbf{K})\times M_{p,q}(\mathbf{K})\times M_q(\mathbf{K})$ telles que la matrice $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ O & P_3 \end{bmatrix}$ soit telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

En déduire qu'il existe $X \in M_n(\mathbf{K})$ telle que $C = AX - XB$.

c) Donner une cns sur A, B, C pour que M soit diagonalisable.

Solution : [d'après Oral Centrale PC 2008, Oral Mines MP 2013, RMS n° 478]

a) Pour tout polynôme $f \in \mathbf{K}[X]$, $f(M) = \begin{bmatrix} f(A) & * \\ O & f(B) \end{bmatrix}$. Si M est diagonalisable, M annule un polynôme scindé sans facteur carré f ; ce polynôme annule A et B, donc A et B sont diagonalisables.

b) Si M est diagonalisable, le sous-espace $F = \text{Vect}(e_1, e_2 , \dots, e_p)$ est M-stable, et toute base propre de l'endomorphisme induit M_F peut être complétée en une base propre de M.
Ce théorème de la base incomplète pour les familles libres de vecteurs propres est le point délicat de la preuve. Arrétons-nous un instant pour bien le justifier.
Si M a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et pour espaces propres $E_1, \dots, E_r$, et si F est un sous-espace M-stable, on a $F = \oplus\, (F \cap E_i)$: il suffit pour cela d'appliquer le théorème des noyaux à l'endomorphisme induit. Toute base de $F \cap E_i$ peut être complétée en une base de E_i .

Si $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ O & P_3 \end{bmatrix}$ vérifie $P^{-1} M P$ diagonale, alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & Q_2 \\ O & P_3^{-1} \end{bmatrix}$, où $Q_2 = -P_1^{-1}.P_2.P_3^{-1}$.

Et $P^{-1} M P = \begin{bmatrix} D_A & O \\ O & D_B \end{bmatrix}$, donc $P_1^{-1}.A.P_2 + P_1^{-1}.C.P_3 - P_1^{-1}.P_2.P_3^{-1}.B.P_3 = O$, donc $C = A.X - X.B$, où $X = -P_2.P_3^{-1}$. cqfd.

c) Réciproquement, supposons A et B diagonalisables, et $C = AX - XB$.
Soient $P_1 \in Gl_p(\mathbf{K})$ et $P_3 \in Gl_q(\mathbf{K})$ telles que $P_1^{-1}.A.P_1 = D_A$ et $P_3^{-1}.B.P_3 = D_B$ sont diagonales.
Posons $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ O & P_3 \end{bmatrix}$, où P_2 reste à déterminer. Alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & Q_2 \\ O & P_3^{-1} \end{bmatrix}$, où $Q_2 = -P_1^{-1}.P_2.P_3^{-1}$.

$P^{-1} M P = \begin{bmatrix} D_A & * \\ O & D_B \end{bmatrix}$, et le calcul montre que $P^{-1} M P = \begin{bmatrix} D_A & O \\ O & D_B \end{bmatrix}$ si l'on choisit $P_2 = -X P_3$.

En conclusion, on a montré le théorème :

Théorème : Soient $A \in M_p(\mathbf{C})$, $B \in M_q(\mathbf{C})$, et $M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{C})$ ($n = p + q$). M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont, et s'il existe $X \in M_{n,p}(\mathbf{C})$ telle que $C = AX - XB$.

Exercice 30 : Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Cns pour que $M = \begin{bmatrix} O & I \\ 2A & A \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbf{C})$ soit diagonalisable.

Solution : le lecteur montrera que :

M est diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable, et 0 et -8 ne sont pas valeurs propres de A.

Exercice 31 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que A^2 soit triangulaire supérieure de diagonale $(1, 2, \dots, n)$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

Solutions : [Oral Mines 2004, etc .]

1ère méthode : elle repose sur un résultat simple et général :

Lemme : Soit $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots \\ \dots & & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ triangulaire supérieure, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires distincts. Si A commute à B, A est triangulaire supérieure.

En effet, si l'on égale les 1ère colonnes de AB et de BA, on voit que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & & \\ \dots & A' & \\ 0 & & \end{bmatrix}$.

Si B' est la sous-matrice de B obtenue en barrant les premières lignes et colonnes, on a $A'^2 = B'$, et une récurrence conclut.

De manière plus savante, B est diagonalisable et monogène, donc si A commute à B, A est un polynôme de B.

2ème méthode : $B = A^2$ ayant n valeurs propres distinctes, est diagonalisable :

$$\exists P \in Gl_n(\mathbf{R}) \quad P^{-1}.B.P = \text{diag}(1, 2, \dots, n) = D.$$

Comme A commute à B, $P^{-1}.A.P$ commute à D, donc est diagonale.

Et comme son carré est D, $P^{-1}.A.P = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{2}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{n})$, où $\varepsilon_k = \pm 1$.

De plus, je dis que P, matrice des vecteurs propres de B, est triangulaire supérieure.

Cela se voit lorsqu'on forme et résout le système triangulaire BX = kX.

En remontant, il vient $x_n = \dots = x_{k+1} = 0$. Du coup A est triangulaire supérieure.

En conclusion, si B est triangulaire supérieure de diagonale $(1, 2, \dots, n)$, B a 2^n racines carrées, qui sont toutes triangulaires supérieures.

Exercice 32 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, Sp A son spectre dans **C**. Montrer l'équivalence :

A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$ et Sp A $\subset$ **R** $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$.

Solution : Le sens $\Leftarrow$ est immédiat. Montrons $\Rightarrow$ à l'aide du théorème de Schreier.

Soit Sp A = $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$. Le polynôme minimal de A est $M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_r)$.

Il est réel, donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$.

Autre solution à l'aide des espaces propres.

Le polynôme caractéristique de A est scindé dans **C**[X], et même dans **R**[X] car ses racines sont réelles. De plus, $n = \sum_{i=1}^{r} \dim_C Ker(A-\lambda_i I)$ implique $n = \sum_{i=1}^{r} \dim_R Ker(A-\lambda_i I)$.

En effet si A est une matrice réelle et si l'on note

$\text{Ker}_{\mathbf{C}} A = \{ Z \in \mathbf{C}^n ; AZ = 0 \}$ et $\text{Ker}_{\mathbf{R}} A = \{ X \in \mathbf{R}^n ; AX = 0 \}$, je dis que $\dim_{\mathbf{C}} (\mathrm{Ker}_{\mathbf{C}}\, A) = \dim_{\mathbf{R}} (\mathrm{Ker}_{\mathbf{R}}\, A)$, car ces deux entiers sont égaus à $n - \mathrm{rg}\, A$. Or le rang de A est indépendant du corps de base.

Remarque : tout ceci reste vrai si on remplace (**R**, **C**) par n'importe quel couple (**K**, **L**), où **K** est un sous-corps de **L**.

Exercice 33 : Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.
Montrer qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}.A.P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, A_1, \dots, A_q)$,
où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont réels, $A_1, \dots, A_q$ des matrices de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ et $p + 2q = n$.

Solution :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres réelles de A, $\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_q, \overline{\mu_q}$ ses valeurs propres non réelles, groupées par deux. Ainsi, le polynôme minimal de A est :

$$M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_p).(X - \mu_1)(X - \overline{\mu_1})\dots(X - \mu_q)(X - \overline{\mu_q}).$$

Adoptons les notations et les remarques de l'exercice précédent.

1) Pour tout i : $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Ker}_{\mathbf{C}} (A - \lambda_i.I) = \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{Ker}_{\mathbf{R}} (A - \lambda_i.I)$.

Soit alors $C_i = (X_1, \dots, X_{n(i)})$ une **R**-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbf{R}} (A - \lambda_i.I)$.

2) Pour tout j : $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Ker}_{\mathbf{C}} (A - \mu_j.I) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Ker}_{\mathbf{C}} (A - \overline{\mu_j}\, I)$,

car si $B_j = (Z_1, \dots, Z_{m(j)})$ est une **C**-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbf{C}} (A - \mu_j.I)$, il est facile d'établir que :

$\overline{B_j} = (\overline{Z_1}, \dots, \overline{Z_{m(j)}})$ est une **C**-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbf{C}} (A - \overline{\mu_j}\, I)$.

Ecrivons $Z_h = L_h + i.M_h$, $\overline{Z_h} = L_h - i.M_h$ (L_h et M_h réels).

Alors $(Z_1, \overline{Z_1}, \dots, Z_{m(j)}, \overline{Z_{m(j)}})$ est une **C**-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbf{C}} (A - \mu_j.I) \oplus \mathrm{Ker}_{\mathbf{C}} (A - \overline{\mu_j}\, I)$.

Donc $(L_1, M_1, \dots, L_{m(j)}, M_{m(j)})$ aussi… Mais c'est une **C**-base formée de vecteurs réels.
La matrice de l'endomorphisme associé à A relativement à cette base est un tableau diagonal de matrices $\begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$, où $\mu_j = \alpha_j - i\beta_j$.

Il suffit de recoller tous ces vecteurs en une **C**-base de $\mathbf{C}^n$ formée de vecteurs réels, qui est aussi une **R**-base de $\mathbf{R}^n$. Et la « matrice de A » relativement à cette base a la forme désirée.

En d'autres termes, les éléments propres de A sont deux types :
- Les (λ, X) où λ est valeur propre réelle et X un vecteur propre réel associé
- Les (μ, Z) où μ est valeur propre non réelle et Z un vecteur propre associé.

A un tel couple on peut aussitôt associer le couple $(\overline{\mu}, \overline{Z})$.

Posant alors $\mu = \alpha - i\beta$ et $Z = L + iM$, le couple $((\mu, Z), (\overline{\mu}, \overline{Z}))$ fournit le couple $((\alpha, \beta), (L, M))$, c'est-à-dire un plan **C**-stable et aussi **R**-stable.

Exercice 34 : Soit **K** un corps de caractéristique 0. Montrer que, pour qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ soit de trace nulle, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice de diagonale nulle.

Solution : Ce lemme est utile dans diverses questions : exercice suivant, rechercher des normes et semi-normes invariantes par similitude, théorème de Monge relatif aux coniques et quadriques…
En termes linéaires, ce lemme se formule ainsi :

Si E est un **K**-ev de dimension n, pour qu'un endomorphisme u de E soit de trace nulle, il faut et il suffit qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la diagonale de $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit nulle.

1) Si A est semblable à une matrice de diagonale nulle, A est de trace nulle.

2) Montrons la réciproque par récurrence sur n, dans sa version linéaire.
Si $n = 1$, il n'y a rien a montrer : u = 0. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$.
Soient alors dim E = n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle.

• Si u est une homothétie $u = \alpha Id_E$, alors tr u = $n\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ en vertu de l'hypothèse faite sur la caractéristique de **K**.

• Sinon, en vertu d'un lemme connu, il existe un vecteur e_1 tel que $u(e_1) \notin \mathbf{K}e_1$.

Complétons ce vecteur en une base provisoire $\mathcal{B}' = (e_1, u(e_1), a_3, \dots, a_n)$ de E.

Alors $\text{Mat}(u, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 1 & & & \\ 0 & & A' & \\ \dots & & & \end{bmatrix}$. La sous-matrice A' de A obtenue en barrant sa première ligne et sa première colonne est de trace nulle. A' est la matrice de l'endomorphisme $v = (p \circ u)_H$ de H = $\text{Vect}(u(e_1), a_3, \dots, a_n)$, où p est le projecteur de E sur H parallèlement à $\mathbf{K}e_1$.

En vertu de l'hypothèse de récurrence appliquée au couple (H, v), il existe une base $(e_2, e_3, \dots, e_n)$ de H telle que $\text{Mat}(v, (e_2, e_3, \dots, e_n)) = A''$ soit de diagonale nulle.

Alors la matrice de u relativement à $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est de diagonale nulle

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \dots & & A'' & \\ * & & & \end{bmatrix}.$$

<u>Remarque</u> : Si la caractéristique de **K** est non nulle, ce résultat tombe en défaut : ainsi toute matrice scalaire d'ordre p à éléments dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est de trace nulle. Or elle n'est semblable qu'à elle-même.

<u>Exercice 35</u> : <u>Sous-espaces vectoriels de</u> $M_n(\mathbf{R})$.

1) Indiquer un sev de $M_n(\mathbf{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ formé de matrices nilpotentes.

2) En déduire que si E est un sev de $M_n(\mathbf{R})$ formé de matrices diagonalisables, dim E $\leq \frac{n(n+1)}{2}$.

3) Indiquer un sev de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ de $M_n(\mathbf{R})$ formé de matrices diagonalisables.

<u>Solution</u> : 0) Notons d'abord que ni les matrices nilpotentes, ni les matrices diagonalisables, ne forment des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$, comme le montrent les exemples suivants :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) Les matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle, forment un sev de $M_n(\mathbf{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ formé de matrices nilpotentes. Soit T cet espace.

2) Soit E un sev de $M_n(\mathbf{R})$ formé de matrices diagonalisables, $E \cap T = \{0\}$, donc dim E + dim T $\leq n^2$ et dim E $\leq \frac{n(n+1)}{2}$.

3) On connaît un sev de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ formé de matrices diagonalisables : le sev $S_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques.

4) De même, si F est un sev de $M_n(\mathbf{R})$ formé de matrices nilpotentes, $F \cap S_n(\mathbf{R}) = \{0\}$, donc dim F $\leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : Dans la RMS mars 1992, B. Randé a montré que les sous-espaces de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ formés de matrices diagonalisables sont les conjugués de $S_n(\mathbf{R})$.

Exercice 36 : Déterminer Vect{$M \in M_n(\mathbf{C})$; M nilpotente} et Vect{$M \in M_n(\mathbf{C})$; M diagonalisable}.

Solution : [Oral ENS 2012, RMS n° 13, Centrale 2012, etc.]

1) Montrons que Vect{ $M \in M_n(\mathbf{C})$; M nilpotente } est l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Si M est nilpotente, M est de trace nulle, donc H = Vect{ $M \in M_n(\mathbf{C})$; M nilpotente } $\subset$ H' hyperplan des matrices de trace nulle.

Les E_{ij}, $i \neq j$, sont nilpotentes, donc appartiennent à H. Par linéarité, H contient toutes les matrices de diagonale nulle.

Enfin, si M' est semblable à une matrice appartenant à H, M' appartient à H. Du coup, H contient toutes les matrices semblables aux matrices de diagonale nulle : or l'exercice précédent montre que ce sont exactement les matrices de trace nulle.

2) Montrons que Vect{ $M \in M_n(\mathbf{C})$; M diagonalisable } = $M_n(\mathbf{C})$.

Vect{ $M \in M_n(\mathbf{C})$; M diagonalisable } contient les E_{ii}, qui sont diagonalisables, et les E_{ij}, $i \neq j$, qui sont sommes de deux diagonalisables : ainsi $E_{12} = E_{11} + E_{12} - E_{11}$; or $E_{11} + E_{12}$ est un projecteur.

Remarque : cela découle aussi de ce que les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbf{C})$. Le sous-espace vectoriel engendré est aussi dense : or le seul sous-espace dense de $M_n(\mathbf{C})$ est $M_n(\mathbf{C})$.

---

6. *Endomorphismes nilpotents.*

Exercice 1 : exemples.

1) Soit **K** de caractéristique 0. Montrer que E = $\mathbf{K}_n[X]$ est stable par les opérateurs $D : P \to P'$, $\Delta : P(X) \to P(X+1) - P(X)$, $\Delta_h : P(X) \to \frac{P(X+h)-P(X)}{h}$ pour $h \neq 0$, $D_q : P(X) \to \frac{P(qX)-P(X)}{(q-1)X}$ pour $q \neq 1$, et les endomorphismes induits sont nilpotents d'indice $n+1$.

Ecrire leurs matrices relativement à la base canonique de E.

2) Montrer qu'une matrice trigonale est nilpotente ssi sa diagonale principale est nulle.

3) Si u est nilpotent, $v = f^{-1} \circ u \circ f$ aussi, pour tout isomorphisme f, et ils ont même indice.

4) Le seul endomorphisme à la fois nilpotent et diagonalisable est l'endomorphisme nul.

5) Les matrices réelles $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & A \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$ sont nilpotentes ; indices ?

Solution :

Exercice 2 : le cône nilpotent.

Soient E un **K**-ev de dimension n, $\mathfrak{N}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E.

1) Montrer que : • $\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall u \in \mathfrak{N} \quad \lambda.u \in \mathfrak{N}$.

• $\forall (u, v) \in \mathfrak{N}\times\mathfrak{N} \quad u \circ v = v \circ u \Rightarrow u + v \in \mathfrak{N}$ et $u.v \in \mathfrak{N}$.

2) Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice r. Alors $r \leq n$.

En d'autres termes, $\mathfrak{N} = \{ u \in \mathcal{L}(E) ; u^n = 0 \}$.

Solution : 1) Si u est nilpotent d'indice r, et v nilpotent d'indice s, et si u et v commutent, $(u.v)^m = 0$, où m = min(r, s), et $(u + v)^p = 0$, où p = r + s, et même r + s − 1, en vertu du binôme.

2) Soit e un vecteur tel que $u^{r-1}(e) \neq 0$. Il est aisé de vérifier que $(u^{r-1}(e), u^{r-2}(e), \dots, u(e), e)$ est une famille libre. En effet, $\lambda_1.u^{r-1}(e) + \lambda_2.u^{r-2}(e) + \dots + \lambda_{r-1}.u(e) + \lambda_r.e = 0$

implique, par applications répétées de u : $\lambda_2.u^{r-1}(e) + \dots + \lambda_{r-1}.u^2(e) + \lambda_r.u(e) = 0$

. . . .

$\lambda_r.u^{r-1}(e) = 0.$

On en déduit par remontée que $\lambda_r = \lambda_{r-1} = \dots = \lambda_1 = 0$. On en déduit aussitôt que $r \leq n$.
On peut aussi noter que X^r est le polynôme minimal de u, et invoquer Hamilton-Cayley.

Commentaire : Il en résulte que l'ensemble $\mathfrak{N}$ des matrices nilpotentes est algébrique, intersection de n^2 hypersurfaces algébriques. La matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ est nilpotente ssi $A^2 = O$. Après calculs, cela équivaut à $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, où $a^2 + bc = 0$, ou à $A = \begin{bmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{bmatrix}$, où $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Géométriquement, les matrices nilpotentes de $M_2(\mathbf{R})$ forment un cône du second degré dans l'espace de dimension trois des matrices de trace nulle.

Exercice 3 : Si **K** est fini à q éléments, montrer que $M_2(\mathbf{K})$ contient q^2 matrices nilpotentes.

Solution : Deux approches :

1ère méthode, directe. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est nilpotente ssi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, avec $a^2 + bc = 0$.

On est ramené à dénombrer les points de ce cône.
Si $a = 0$, b ou $c = 0$: en tout $q - 1 + q - 1 + 1 = 2q - 1$ triplets (a, b, c) ;
Si $a \neq 0$, alors $b \neq 0$ et $c = -\dfrac{a^2}{b}$. En tout $(q-1)^2$ triplets (a, b, c). Au total, q^2 matrices.

2ème méthode : toute matrice nilpotente d'ordre 2 est semblable à O (elle est alors nulle) ou à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, le commutant de N est $C(N) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \neq 0 \right\}$; il a $q(q-1)$ éléments.

Il reste à appliquer le principe des bergers à l'application $P \to P^{-1}.N.P$.

Conclusion : $\boxed{N_2(\mathbf{K}) = 1 + \dfrac{(q^2-1)(q^2-q)}{q(q-1)} = q^2}$.

Remarque : On peut montrer que, pour tout n, $M_n(\mathbf{K})$ a q^{n^2-n} matrices nilpotentes.

Exercice 4 : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, D l'opérateur de dérivation. Existe-t-il $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T^2 = D$?

Solution :

Exercice 5 : Trigonaliser $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ dans R. Montrer qu'elle est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solution : A est nilpotente d'indice 3.
1) Trigonalisation. On trouve Ker(A) = Vect([−2, 1, 0]) , $\text{Ker}(A^2)$ = Vect([−2, 1, 0] , [−3, 0, 1]).

On obtient une matrice de passage par complétions successives, par exemple

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Alors } P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Jordanisation. Le vecteur $e = [1, 0, 0]$ n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(A^2)$. Donc $\mathcal{B} = (A^2(e), A(e), e)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Du coup, si $P = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, il vient $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 6 : Montrer que la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est semblable, dans $M_3(\mathbf{C})$, à la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$, ainsi qu'à la matrice antisymétrique $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$.

Solution :

Exercice 7 : Soit $D_q : P(X) \to \dfrac{P(qX)-P(X)}{(q-1)X}$ pour $q \neq 1$ l'endomophisme de $E = \mathbf{K}_n[X]$.
Matrice de D_q relativement à la base $P_0(X) = 1$, $P_k(X) = (X-1)(X-q)\dots(X-q^{k-1})$ pour $k \geq 1$.

Solution :

Exercice 8 : Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice n. Résoudre l'équation $v^2 = u$.

Solution : Si $n \geq 1$, cette équation est sans solution.
En effet, si $v^2 = u$, comme $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, $v^{2n} = 0$ et $v^{2n-2} \neq 0$. v serait nilpotent d'indice $2n$ ou $2n-1$, contredisant le fait que l'indice de nilpotence est toujours $\leq n$.
Autre solution : Si v existe, v commute à u, donc a pour matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \text{ dans une base où u a pour matrice } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Or le calcul de A^2 montre que l'on ne peut avoir $A^2 = J$.

Exercice 9 : 1) Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que u est d'indice n ssi $\mathrm{rg}\ u = n-1$.
2) Soit v un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :
Il existe une unique droite v-stable $\Leftrightarrow$ $(\exists\lambda \in \mathbf{K})$ $v - \lambda I$ est nilpotent d'indice n.

Solution :

Exercice 10 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E.

Montrer qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de E, f-stables, tels que f_F soit nilpotent et f_G soit inversible. A l'aide du logiciel Maple, trouver deux tels sous-espaces pour l'endomorphisme de $\mathbf{R}^5$ canoniquement associé à $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 19 & -4 & -4 & 9 & -8 \\ 8 & 4 & -1 & 0 & -2 \\ 22 & -4 & -5 & 10 & -9 \\ 25 & 2 & -4 & 7 & -8 \end{bmatrix}$.

Solution : [Oral Centrale 1999, RMS n° 283]
Procédons par analyse et par synthèse.

Exercice 11 : Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Que dire de l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P(A) est nilpotente ? Montrer que A est diagonalisable ssi $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ P(A) nilpotente $\Rightarrow$ P(A) = O.

Solution : [Oral X , Oral Mines PC 2010, RMS n° 634, Oral X PC 2009, RMS n° 327]
Soit $\mathfrak{N} = \{ P \in \mathbf{C}[X] ;$ P(A) est nilpotente $\} = \{ P \in \mathbf{C}[X] ; P(A)^n = O \}$.
1) $\mathfrak{N}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$.
En effet $0 \in \mathfrak{N}$; P et $Q \in \mathfrak{N} \Rightarrow P + Q \in \mathfrak{N}$, car P(A) et Q(A) sont nilpotentes et commutent.
Enfin $P \in \mathbf{C}[X]$ et $Q \in \mathfrak{N} \Rightarrow P.Q \in \mathfrak{N}$, car $[\, P(A).Q(A)\,]^n = P(A)^n .Q(A)^n = O$.
Comme tout idéal de $\mathbf{C}[X]$ est principal, nous allons chercher son générateur unitaire.

2) Le plus simple est de trigonaliser A. Si $Q^{-1}.A.Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \dots & * \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $Q^{-1}.P(A).Q = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & * & * \\ & \dots & * \\ O & & P(\lambda_n) \end{bmatrix}$.

P(A) est nilpotente si et seulement si $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre de A, autrement dit ssi P est multiple du polynôme scindé sans carré $\Phi(X) = \prod_{\lambda \in SpA} (X - \lambda)$. Voilà le générateur cherché !

3) Autre solution, valable dans un corps quelconque $\mathbf{K}$.
Soit $\mu_A(X)$ le polynôme minimal de A, factorisé en $\mu_A(X) = \prod_{1 \le i \le r} (P_i)^{k_i}$.
Or $P \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow \exists k \ge 1$ μ_A divise P^k $\Leftrightarrow$ $\prod_{1 \le i \le r} P_i$ divise P.
$\mathfrak{N}$ est l'idéal engendré par $\Phi = \prod_{1 \le i \le r} P_i$.
L'assertion finale se déduit aisément de ce qui précède.

Exercice 12 : Montrer que $A \in M_n(\mathbf{C})$ est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \dots = \operatorname{tr} A^n = 0$.

Solution : [Oral Mines MP 2012, RMS n° 435]
A étant trigonalisable, est nilpotente si et seulement toutes ses valeurs propres sont nulles.
Tout revient donc à montrer le résultat suivant :
Pour que le n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ soit nul, il faut et il suffit que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k = 0$.
La condition est bien sûr nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, la solution la plus consistante repose sur les formules de Newton, qui relient les sommes de Newton $N_k = \sum_{i=1}^{n} (X_i)^k$ aux fonctions symétriques élémentaires $S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} X_{i_1} \dots X_{i_k}$. Voici ces formules :

- Si $1 \le k \le n$, $N_k - S_1.N_{k-1} + S_2.N_{k-2} - \dots + (-1)^j.S_j.N_{k-j} + \dots + (-1)^k.k.S_k = 0$

• Si $n \leq k$, $\quad N_k - S_1.N_{k-1} + S_2.N_{k-2} - \dots + (-1)^j.S_j.N_{k-j} + \dots + (-1)^n.S_n.N_{k-n} = 0$

Elles sont établies dans les chapitres sur les polynômes à plusieurs indéterminées, et sur les séries entières formelles. Elles restent vraies si l'on substitue aux indéterminées X_i des scalaires λ_i .

$N_1 = \dots = N_n = 0$ implique par récurrence $S_1 = \dots = S_n = 0$. Les λ_i sont alors racines de $X^n = 0$, donc sont toutes nulles.

Cependant, ces formules n'étant plus au programme, nous allons proposer une solution administrativement plus juste. Supposons les λ_i non tous nuls et notons

$$\text{card } \{ \lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n \} = r \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \text{ étant deux à deux distincts.}$$

Groupant les λ_i par paquets, l'hypothèse $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k = 0$ s'écrit aussi :

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $\sum_{i=1}^{r} n_i.(\lambda_i)^k = 0$. Comme le Vandermonde $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ est non nul, tous les n_i sont nuls ; ce qui n'est pas possible. CQFD…

<u>Exercice 13</u> : Soient A et B dans $M_n(\mathbf{R})$ telles que AB – BA = B. Montrer que B est nilpotente.

<u>Solution</u> : [Oral Mines MP 2012, RMS n° 436]

<u>1ère méthode</u> : Par récurrence que k on montre que $A.B^k = B^k (A + k I)$.

On en déduit par linéarité que A.P(B) = P(B).A + B.P'(B) pour tout polynôme P.

Choisissons pour P le polynôme minimal de B, et supposons-le de degré d.

Alors B.P'(B) = 0, donc P(X) | X.P'(X), donc X.P'(X) = dP(X), donc $P = X^d$.

Par conséquent, B est nilpotente.

<u>2ème méthode</u> : via les traces.

Tr B = tr(AB) – tr(BA) = 0.

$Tr(B^2) = tr(BAB) - tr(BBA) = 0$ par invariance circulaire de la trace.

$Tr(B^k) = tr(AB^k) - tr(BAB^{k-1}) = 0$ itou. Et l'on conclut via l'exercice précédent.

<u>Exercice 14</u> : Soient A et B dans $M_n(\mathbf{C})$ telles que $AB^2 - B^2A = B$. Montrer que B est nilpotente d'indice impair.

<u>Solution</u> : [Oral X MP 2013, RMS n° 209]

<u>Exercice 15</u> : Soient A et B dans $M_n(\mathbf{C})$ telles que $AB^5 - B^3AB^2 = B$. Montrer que B = 0.

<u>Solution</u> : [Oral X MP 2013, RMS n° 210]

L'hypothèse s'écrit $AB^2 B^3 - B^3AB^2 = B$, i.e. $[AB^2 , B^3] = B$.

On en déduit que $\text{Ker } B \subset \text{Ker } B^2$, donc $\text{Ker } B = \text{Ker } B^2$.

Par suite $\text{Im } B \cap \text{Ker } B = \{0\}$ et $\mathbf{C}^n = \text{Im } B \oplus \text{Ker } B$.

Im B est B-stable et B induit un isomorphisme de Im B.

Par suite, dans une base adaptée à cette sormme directe, $P^{-1}.B.P = \begin{bmatrix} R & O \\ O & O \end{bmatrix}$, où $R \in Gl_r(\mathbf{C})$.

Comme Im A ⊂ Im B, on a $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} X & Y \\ O & O \end{bmatrix}$.

La relation $AB^5 - B^3AB^2 = B$ se traduit par Y = O et $X.R^3 - R^3.X = I_r$.

Passant à la trace, il vient r = 0, donc B = 0.

Exercice 16 : Soient A et B $\in$ $M_n(\mathbf{C})$. On suppose que C = AB – BA commute avec A ou avec B. Montrer que C est nilpotente.

Solution :
1ère méthode : Soit λ une valeur propre de C, F l'espace propre associé. En vertu du théorème de trigonalisation, il suffit de montrer que $\lambda = 0$. Or F est à la fois A-stable et B-stable.
Considérant les endomorphismes induits, il vient $\lambda.id_F = A_F.B_F - B_F.A_F$.
Il reste à passer à la trace.
2ème méthode : via les traces. Supposons que C commute avec A.
Si D commute avec A, $tr(CD) = tr(ABD - BAD) = tr(ABD) - tr(BDA) = 0$
par invariance circulaire de la trace. C'est vrai en particulier pour $D = C^k$ $(0 \le k \le n-1)$.
On a donc $tr\ C = tr\ C^2 = \ldots = tr\ C^n = 0$, et C est nilpotente en vertu de l'exercice 12.
Si C commute avec B, échanger A et B, et changer C en – C.
Remarque : les matrices A, B et C sont simultanément trigonalisables : cf. § 10.

Exercice 17 : Soient A et B $\in$ $M_n(\mathbf{C})$. Montrer l'équivalence :
i) B est nilpotente et BA = O ;
ii) Pour toute M $\in$ $M_n(\mathbf{C})$, les matrices AM + B et AM ont même polynôme caractéristique.

Solution : [Oral CCP 1995, RMS n° 430]

Exercice 18 : Soient A et B $\in$ $M_n(\mathbf{C})$. On suppose qu'il existe n+1 valeurs $\lambda \in \mathbf{C}$ telles que $A + \lambda.B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Solution : [Oral X MP 2005, RMS n° 131]
En d'autres termes, si une droite affine de $M_n(\mathbf{C})$ rencontre le cône nilpotent en $n + 1$ points, elle est toute entière incluse dans ce cône.
L'hypothèse se traduit par $(A + \lambda.B)^n = 0$ pour $n + 1$ valeurs de λ.
Or, pour tout k, $(A + \lambda.B)^k$ est une matrice dont les éléments sont des polynômes de λ de degré $\le k$.
Cela se montre aisément par récurrence sur k.
Par conséquent, $(A + \lambda.B)^n = (P_{ij}(\lambda))$ où $P_{ij}(\lambda) = 0$ pour $n + 1$ valeurs de λ.
Donc $P_{ij}(\lambda) = 0$ pour tout λ, et $(A + \lambda.B)^n = 0$ pour tout λ.
Si l'on fait $\lambda = 0$, il vient $A^n = 0$. Si l'on fait $\lambda = p$, il vient $(A + p.B)^n = 0$ pour tout entier $p > 0$, donc $(\frac{1}{p} A + B)^n = 0$ pour tout p, et, à la limite, $B^n = 0$.

Exercice 19 : Pour tout entier $m \ge 1$, on note J(m) la matrice :

$$J(m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_m(\mathbf{C}) \quad ; \quad \text{en particulier } J(1) = [\ 0\ ] .$$

Soit A la matrice diagonale par blocs $A = diag(J(p_1), J(p_2), \ldots, J(p_k))$.
Pour tout entier i $\in \mathbf{N}$ on note m_i le nombre de blocs de taille i, et $n_i = \dim Ker\ A^i$.
Exprimer les n_i à l'aide des m_k. En déduire que $m_i = 2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}$ $(1 \le i \le n)$.
Montrer que deux matrices de la forme A sont semblables si et seulement si, pour tout i, elles ont le même nombre de blocs de taille i.

Solution résumée : $n_i = \dim \operatorname{Ker} A^i = \sum \dim Ker J(p_h)^i$.

On a $n_1 = k = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots$

$n_2 = m_1 + 2.(m_2 + m_3 + m_4 + \dots)$

$n_3 = m_1 + 2.m_2 + 3 (m_3 + m_4 + \dots)$, etc.

On en déduit facilement que $m_i = 2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}$ $(1 \le i \le n)$.
Le reste est laissé au lecteur.

Exercice 20 : Soit $N \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une matrice $X \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $X^2 = I + N$. [On pourra utiliser le développement limité de $\sqrt{1+x}$].

Solution :

1) Rappelons qu'au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}x^n + O(x^{n+1}) \qquad (1)$$

Considérons le polynôme $P_n(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}X^n$.

Si l'on élève (1) au carré, il vient $1 + x = P_n(x)^2 + O(x^{n+1})$.
Mais $Q_n(x) = 1 + x - P_n(x)^2$ est un polynôme, donc dire que $Q_n(x) = O(x^{n+1})$ au voisinage de 0 implique que $Q_n(X)$ est multiple de X^{n+1} dans $\mathbf{Q}[X]$.
Nous avons montré que $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists P_n \in \mathbf{Q}[X] \quad X^{n+1} \mid 1 + X - P_n(X)^2$.
Ecrivons :

$$1 + X = P_n(X)^2 + X^{n+1}.R_n(X) \qquad (2)$$

2) Soit alors N une matrice nilpotente.
Si l'on substitue N à X dans (2) à l'indice $n - 1$, il vient

$$I + N = P_{n-1}(N)^2 + N^n.R_{n-1}(N) = P_{n-1}(N)^2 .$$

3) Variante par remontée modulaire.
Montrons que $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists P \in \mathbf{Q}[X] \quad X^{n+1} \mid 1 + X - P(X)^2$ par récurrence sur n.
Il s'agit de résoudre le système de congruences $P(X)^2 \equiv 1 + X \pmod{X^{n+1}}$ dans $\mathbf{Q}[X]$,
ou encore de chercher les racines carrées de $1 + X$ dans $\mathbf{Q}[X]/(X^{n+1})$.
Nous allons montrer, que pour tout n, il existe exactement deux tels polynômes P, modulo X^{n+1}.
- Pour $n = 0$, écrivons $P = a + bX + \dots$ Alors $P(X)^2 \equiv 1 + X \pmod{X}$ signifie $a^2 = 1$, donc $a = \pm 1$.
- Supposons qu'il existe exactement deux polynômes $\pm A$ de degré $\le n$ vérifiant :

$$P(X)^2 \equiv 1 + X \pmod{X^n} .$$

Ecrivons $A(0) = 1$ et $A(X)^2 = 1 + X + X^n.Q(X)$.
Cherchons P tel que $P(X)^2 \equiv 1 + X \pmod{X^{n+1}}$.
Alors $P(X)^2 \equiv 1 + X \pmod{X^n}$, donc $P(X) \equiv \pm A(X) \pmod{X^{n+1}}$.
Si $P(X) = A(X) + a.X^{n+1}$, alors $P(X)^2 = A(X)^2 + 2aA(X)X^{n+1} \pmod{X^{n+1}}$

$$= 1 + X + X^n.Q(X) + 2a.A(X)X^{n+1} \pmod{X^{n+1}}.$$

Donc $P(X)^2 \equiv 1 + X \pmod{X^{n+1}} \Leftrightarrow X \mid Q(X) + 2aA(X) \Leftrightarrow Q(0) + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{Q(0)}{2}$.

Ainsi A donne naissance à un seul polynôme de degré $\le n + 1$ vérifiant $P(X)^2 \equiv 1 + X \pmod{X^{n+1}}$.
De même $-$ A donne naissance au polynôme opposé.
A chaque étape, seul le calcul de Q(0) est nécessaire.

Remarques : 1) Algorithmiquement, c'est le même problème que résoudre $x^2 \equiv 2 \pmod{7^n}$

2) Au fond, il n'y a que deux polynômes de degré $\leq n$ tels $X^{n+1} \mid 1 + X - P_n(X)^2$, à savoir $\pm P_n$.

---

7. Trigonalisation, décomposition de Dunford, réduction de Jordan.

Exercice 1 : Soient $n \geq 2$ et p un nombre premier. Montrer que $M_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ contient une matrice non trigonalisable.

Solution : [Oral ENS Ulm 2012, RMS n° 26]
Commençons par noter qu'une matrice est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé. Or il existe dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$ un polynôme P non scindé, sans quoi $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ serait algébriquement clos ; or un corps algébriquement clos est infini. Il suffit de prendre $P = X^p - X + 1$. La matrice-compagnon de ce polynôme est non trigonalisable.
Cela ne répond pas complètement à la question, car n doit être quelconque.
Supposons p impair. Il existe $\frac{p-1}{2}$ non carrés dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Si d est l'un d'eux, le polynôme $X^2 - d$ est non scindé et $\begin{bmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est non triagonalisable ; du coup, $\text{diag}(\begin{bmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, O_{n-2})$ également.
Si $p = 2$, considérer $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, puis $\text{diag}(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, O_{n-2})$.
Généralisation immédiate à tous les corps finis.

Exercice 2 : Résoudre les équations $X^2 = A$ dans $M_2(\mathbf{C})$, puis dans $M_2(\mathbf{R})$.

Solution :

1) <u>Commençons par</u> $M_2(\mathbf{C})$.

a) A est semblable à l'une des matrices $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq \mu)$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

b) Tout revient donc à résoudre les équations $Y^2 = B$. Or les solutions de cette équation sont à chercher parmi les matrices qui commutent à B.

c) ♣ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq \mu)$. Y commute à B ssi $Y = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$; $Y^2 = B \Leftrightarrow \alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$.
Donc l'équation $Y^2 = B$ a 4 solutions si λ et μ sont non nuls, 2 solutions si l'un d'eux est nul.

♦ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$. Si $Y^2 = \lambda I$, Y annule un polynôme scindé sans facteurs carrés, donc est diagonalisable. Soit δ une racine carrée de λ, Y est semblable à l'une des matrices :

$$\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}.$$

Donc $$Y \in \left\{ \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ P^{-1}.\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}.P \ ; \ P \in Gl_2(\mathbf{C}) \right\}.$$

L'équation admet donc une infinité de solutions (3 classes de similitude, dont deux singletons).

♥ Supposons $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si $Y^2 = 0$, Y est nilpotente, donc $Y = 0$ ou Y semblable à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Donc $$Y \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ P^{-1}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.P \ ; \ P \in Gl_2(\mathbf{C}) \right\}.$$

L'équation admet donc une infinité de solutions (2 classes de similitude, donc un singleton).

♠ Supposons B = $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$. Y commute à B ssi Y commute à $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, donc ssi Y = $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$.

$Y^2 = B \Leftrightarrow \alpha^2 = \lambda$ et $2\alpha\beta = 1$.

Si $\lambda \neq 0$, $\alpha = \varepsilon\delta$, $\beta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$, où $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ et δ est une racine carrée de λ. B a deux racines carrées.

Si $\lambda = 0$, $\alpha = 0$ et $1 = 0$: impossible.

<u>Conclusion</u> : Dans $M_2(\mathbf{C})$, l'équation $X^2 = A$ a 0, 2 ou une infinité de solutions.
Pour qu'elle ait au moins une solution, il faut et il suffit que A ne soit pas nilpotente d'indice 2, i.e. ne soit pas semblable à $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
Autrement dit, l'image de $M_2(\mathbf{C})$ par $X \to X^2$ est $M_2(\mathbf{C})$ privé de cette classe de similitude.
En particulier, $X \to X^2$ induit une surjection de $Gl_2(\mathbf{C})$.

2) <u>Limitons-nous à</u> $M_2(\mathbf{R})$.

a) A est semblable à l'une des matrices réelles

$$B = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix} (\lambda \neq \mu) \ , \ \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix} (\beta \neq 0) \ \text{ et } \ \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$

b) Tout revient donc à résoudre les équations $Y^2 = B$. Or les solutions de cette équation sont à chercher parmi les matrices qui commutent à B.

c) ♣ Supposons B = $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$ ($\lambda \neq \mu$). Y commute à B ssi Y = $\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$; $Y^2 = B \Leftrightarrow \alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$.

Donc l'équation $Y^2 = B$ a 4 solutions si λ et μ sont > 0, 2 solutions si l'un est > 0, l'autre nul, 0 solution si l'un est < 0.

♦ Supposons B = $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ ($\lambda > 0$) ; soit $\delta = \sqrt{\lambda}$. Si $Y^2 = \lambda I$, Y annule un polynôme scindé sans facteurs carrés, donc est diagonalisable, et semblable à l'une des matrices :

$$\begin{bmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta\end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix}\delta & 0\\ 0 & -\delta\end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix}-\delta & 0\\ 0 & -\delta\end{bmatrix}.$$

Donc $$Y \in \left\{\begin{bmatrix}\delta & 0\\ 0 & \delta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\delta & 0\\ 0 & -\delta\end{bmatrix}\right\} \cup \left\{ P^{-1}.\begin{bmatrix}\delta & 0\\ 0 & -\delta\end{bmatrix}.P \ ; P \in Gl_2(\mathbf{R}) \right\}.$$

L'équation admet donc une infinité de solutions (3 classes de similitude, dont deux singletons).

♦♦ Supposons B = $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ ($\lambda < 0$) ; soit $\delta = \sqrt{-\lambda}$. $Y^2 = B$ ssi Y est semblable à $\begin{bmatrix}0 & -\delta\\ \delta & 0\end{bmatrix}$.

Donc $$Y \in \left\{ P^{-1}.\begin{bmatrix}0 & -\delta\\ \delta & 0\end{bmatrix}.P \ ; P \in Gl_2(\mathbf{R}) \right\}.$$

L'équation admet donc une infinité de solutions (1 classe de similitude).

♦♦♦ Supposons B = $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Si $Y^2 = 0$, Y est nilpotente, donc Y = 0 ou Y semblable à $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Donc $$Y \in \left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\} \cup \left\{ P^{-1}.\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.P \ ; P \in Gl_2(\mathbf{R}) \right\}.$$

L'équation admet donc une infinité de solutions (2 classes de similitude, donc un singleton).

♥ Supposons B = $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$. Y commute à B ssi Y commute à $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, donc ssi Y = $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$.

$Y^2 = B \Leftrightarrow \alpha^2 = \lambda$ et $2\alpha\beta = 1$.

Si $\lambda > 0$, $\alpha = \varepsilon\delta$, $\beta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$, où $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ et δ est une racine carrée de λ. B a deux racines carrées.

Si $\lambda = 0$, $\alpha = 0$ et $1 = 0$: impossible. Si $\lambda < 0$, pas de solution.

♠ Supposons B = $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ($\beta \neq 0$). Y commute à B ssi Y commute à $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc ssi Y = $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Résoudre $Y^2 = B$ dans $M_2(\mathbf{R})$ équivaut à résoudre l'équation $(a + ib)^2 = \alpha + i\beta$ dans $\mathbf{C}$.

On sait que cette équation a deux solutions. On peut d'ailleurs poser B = $\rho\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, etc.

<u>Conclusion</u> : Dans $M_2(\mathbf{R})$, pour que l'équation $X^2 = A$ soit sans solution, il faut et il suffit que A soit semblable à $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda \neq \mu$, l'un d'eux au moins étant < 0, ou à $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \leq 0$.
Autrement dit, l'image de $M_2(\mathbf{R})$ par $X \to X^2$ est $M_2(\mathbf{R})$ privé de ces classes de similitude.

En particulier, si l'on note $Gl_2^+(\mathbf{R})$ le sous-groupe de formé des matrices de déterminant > 0, $X \to X^2$ envoie $Gl_2(\mathbf{R})$ dans $Gl_2^+(\mathbf{R})$, mais sans toutefois induire une surjection. Certaines matrices à déterminant > 0 ne sont pas des carrés, par exemple $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Remarque</u> : une autre approche serait d'observer que A est semblable à l'une des matrices :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

<u>Exercice 3</u> : Montrer que $A \to A^2$ de $Gl_n(\mathbf{C})$ dans $Gl_n(\mathbf{C})$ est surjective et non injective.
[Indication : Soit $B \in Gl_n(\mathbf{C})$; décomposer B = D + N, D diagonale, N nilpotente, D.N = N.D ; écrire B sous la forme B = D.(I + N'), et substituer N' à X dans la série formelle $\sqrt{1+X}$ = ...]

<u>Solution</u> : Cet exercice est inclus dans le précédent, mais peut être démontré directement avec les mêmes méthodes.

<u>Références</u> : pb ENS Lyon 1988.

<u>Exercice 4</u> : 1) Soient A et B deux matrices de $Gl_n(\mathbf{C})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement s'il existe X et Y dans $Gl_n(\mathbf{C})$ telles que A = X.Y et B = Y.X.
2) Soient A, B, C dans $Gl_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe X, Y, Z dans $Gl_n(\mathbf{C})$ telles que
A = X.Y , B = Y.Z , C = Z.X.

<u>Solution</u> : [Oral X MP 2010, RMS n° 182]
Cet exercice fait suite au précédent, qu'il suppose connu.

<u>Exercice 5</u> : Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{R})$ semblables dans $M_n(\mathbf{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbf{R})$.

<u>Solution</u> : Soit $P \in Gl_n(\mathbf{C})$ telle que $P^{-1}.A.P = B$; alors P.B = A.P.
Posons $P = R + i.S$, où $R, S \in M_n(\mathbf{R})$.
$(R + iS).B = A.(R + iS)$ implique R.B = A.R et S.B = A.S, en prenant partie réelle et imaginaire.
Du coup $\forall x \in \mathbf{C}$ $(R + x.S).B = A.(R + x.S)$. La fonction polynomiale $f(x) = \det(R + x.S)$ est non nulle, car $f(i) \neq 0$. Elle est donc non nulle sur $\mathbf{R}$ (sinon elle aurait une infinité de racines).
Donc $\exists x \in \mathbf{R}$ $\det(R + x.S) \neq 0$. Et A et B sont semblables dans $M_n(\mathbf{R})$.

Remarque : Ce résultat est un cas particulier du suivant : si **K** est un sous-corps de **L** et si A et B ∈ $M_n(\mathbf{K})$ semblables dans $M_n(\mathbf{L})$, alors elles sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$.

La démonstration de ce résultat général n'est pas simple. Dans le cas général, on peut invoquer la théorie des facteurs invariants. Lorsque **K** est infini, elle fait l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 6 : Soient **K** un corps commutatif infini, **L** un sur-corps commutatif de K. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbf{K})$ semblables dans $M_n(\mathbf{L})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$.

Solution : Soit $P = (p_{ij}) \in Gl_n(\mathbf{L})$ telle que $P^{-1}.A.P = B$.

On veut montrer que : $\exists Q \in Gl_n(\mathbf{K}) \quad Q^{-1}.A.Q = B$.

L'hypothèse s'écrit aussi : $\exists P \in Gl_n(\mathbf{L}) \quad A.P = P.B$ et $\det P \neq 0$.

La conclusion s'écrit de même : $\exists Q \in Gl_n(\mathbf{L}) \quad A.Q = Q.B$ et $\det Q \neq 0$.

$(S_{\mathbf{K}})$ A.P = P.B est un système linéaire de n^2 équations à n^2 inconnues à coefficients dans **K** et à inconnues dans **L**. Les solutions de ce système forment un **L**-espace vectoriel de dimension s, inclus dans $M_n(\mathbf{L})$. En vertu de l'invariance du rang, les solutions du système linéaire $(S_{\mathbf{L}})$ A.Q = Q.B à inconnues dans **K** forment un **K**-espace vectoriel de même dimension s.
Si donc $(Q_1, \dots, Q_s)$ est une **K**-base de cet espace, c'est aussi une **L**-base du précédent.

Soit alors $H \in \mathbf{L}[X_1, \dots, X_s]$ le polynôme défini par $H(X_1, \dots, X_s) = \det\left(\sum_{i=1}^{s} X_i Q_i\right)$.

Par hypothèse, $\exists (x_1, \dots, x_s) \in \mathbf{L}^s \quad P = \sum_{i=1}^{s} x_i Q_i$ et $\det\left(\sum_{i=1}^{s} x_i Q_i\right) \neq 0$. Donc $H(x_1, \dots, x_s) \neq 0$.

Comme **K** est infini, $\exists (y_1, \dots, y_s) \in \mathbf{K}^s \quad H(y_1, \dots, y_s) \neq 0$,
en vertu de l'injectivité de la correspondance entre polynômes et fonctions polynomiales.

Alors $Q = \sum_{i=1}^{s} y_i Q_i$ vérifie A.Q = Q.B et $\det Q \neq 0$. cqfd.

Références : Roger Godement, *Cours d'algèbre*, § 27-28, n° 22 p. 581 (Hermann).

Exercice 7 : Soit $A \in M_n(\mathbf{Z})$. Montrer que le polynôme minimal de A (générateur unitaire de l'idéal $N = \{ P \in \mathbf{R}[X] ; P(A) = 0 \}$) appartient à $\mathbf{Z}[X]$. [Oral ENS Ulm]

Solution :

0) Rappelons que si **K** est un sous-corps de **L**, et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de $\mathbf{K}^n$, $(x_i)_{i\in I}$ a le même rang dans $\mathbf{K}^n$ et dans $\mathbf{L}^n$. Car le rang se calcule par la méthode du pivot, qui se place dans le plus petit sous-corps de **K** contenant les coordonnées des x_i.

1) Commençons par montrer que le polynôme minimal est élément de $\mathbf{Q}[X]$.

Notons $N_{\mathbf{R}} = \{ P \in \mathbf{R}[X] ; P(A) = 0 \}$ et $N_{\mathbf{Q}} = \{ P \in \mathbf{Q}[X] ; P(A) = 0 \}$, $\mu_{\mathbf{R}}(X)$ et $\mu_{\mathbf{Q}}(X)$ leurs deux générateurs unitaires. Comme $N_{\mathbf{Q}} \subset N_{\mathbf{R}}$, on a $\mu_{\mathbf{R}}(X) \mid \mu_{\mathbf{Q}}(X)$ dans $\mathbf{R}[X]$.
Or ces deux polynômes ont même degré $m = rg(I , A , A^2 , A^3 , \dots)$, car le rang est indépendant du corps de base. Par suite, $\mu_{\mathbf{R}}(X) = \mu_{\mathbf{Q}}(X)$. Notons-le $\mu(X)$.

2) Montrons maintenant qu'il est élément de $\mathbf{Z}[X]$.
En vertu du th. de Hamilton-Cayley, $\mu(X)$ divise $\chi(X) = \det(X.I - A) \in \mathbf{Z}[X]$.
Nous voilà ramenés à un lemme bien connu :

Lemme : Si A, B, C sont trois polynômes unitaires de $\mathbf{Q}[X]$ tels que A = B.C, alors
$$A \in \mathbf{Z}[X] \ \Rightarrow\ B \text{ et } C \in \mathbf{Z}[X].$$

Remarque : Le 1) découle aussi de ce que le polynôme minimal d'une matrice est le quotient du polynôme caractéristique et du pgcd de ses cofacteurs. Or le pgcd est indépendant du corps de base.

Exercice 8 : Soient A et B $\in M_n(\mathbf{C})$, Sp A et Sp B leurs spectres.

1) Montrer que Sp ${}^tB$ = Sp B. En déduire que si A et B ont une valeur propre commune, il existe une matrice non nulle $M \in M_n(\mathbf{C})$ telle que A.M = M.B.

2) Réciproquement, on suppose qu'il existe $M \in M_n(\mathbf{C})$ non nulle vérifiant A.M = M.B. Montrer que $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ P(A).M = M.P(B). En choisissant pour P le polynôme caractéristique de A, montrer que A et B ont une valeur propre commune.

Solution : 1) B et ${}^tB$ ont même polynôme caractéristique, donc même spectre.

Soient λ une valeur propre commune de A et ${}^tB$, X et Y des vecteurs non nuls tels que $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \lambda Y$. La matrice $M = X.{}^tY$ est non nulle (et même de rang 1), et telle que :

$$A.M = A.X.{}^tY = \lambda.X.{}^tY = X.{}^tY.B = M.B.$$

2) Si A.M = M.B, on voit aussitôt, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k.M = M.B^k$, et par linéarité $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ A.P(M) = P(M).B.

Prenons pour P le polynôme caractéristique de A.

Alors P(A) = 0 (Hamilton-Cayley), d'où 0 = M.P(B).

Attention à ne pas dire que, comme M est non nulle, P(B) est nulle !

Mais, comme M est non nulle, la matrice P(B) est non inversible.

Or $\det P(B) = \prod_{i=1}^{n} P(\beta_i)$, où Sp B = $\{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \}$.

Cela découle de ce que B est trigonalisable et donc que Sp P(B) = $\{ P(\beta_1), P(\beta_2), \dots, P(\beta_n) \}$.

Comme det P(B) = 0, l'un des β_i annule P, donc A et B ont une valeur propre commune.

Conclusion :

Si Sp A $\cap$ Sp B $\neq \varnothing$, l'endomorphisme $\Phi : M \to A.M - M.B$ de $M_n(\mathbf{C})$ est non injectif.

Si Sp A $\cap$ Sp B $= \varnothing$, l'endomorphisme $\Phi : M \to A.M - M.B$ est injectif, donc bijectif. Cela signifie que, pour toute matrice Y, il existe une et une seule matrice X telle que A.X – X.B = Y.

Ce résultat découle aussi de la théorie des produits tensoriels (ou kroneckériens) de matrices (cf. mes problèmes d'algèbre linéaire).

Exercice 9 : Soient A et B $\in M_n(\mathbf{C})$, Φ l'endomorphisme : $M \to AM - MB$ de $M_n(\mathbf{C})$.

1) Montrer que ($\alpha \in$ Sp A et $\beta \in$ Sp B) $\Rightarrow \alpha - \beta \in$ Sp Φ.

2) Réciproquement, soient λ une valeur propre de Φ, et $M \in M_n(\mathbf{C})$ non nulle vérifiant $\Phi(M) = \lambda M$. Montrer que $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ P(A).M = M.P(λI + B). En choisissant convenablement P, montrer que λ s'écrit $\alpha - \beta$, où $\alpha \in$ Sp A et $\beta \in$ Sp B.

3) CNS pour que Φ soit bijectif.

Solution : cet exercice généralise le précédent.

1) Soient α une valeur propre A, X un vecteur non nul tel que $AX = \alpha X$, β une valeur propre de ${}^tB$, Y un vecteur non nul tel que ${}^tBY = \beta Y$. La matrice $M = X.{}^tY$ est non nulle (et même de rang 1), et telle que : $\Phi(M) = (\alpha - \beta).M$

2) Si λ est une valeur propre de Φ, et $M \in M_n(\mathbf{C})$ non nulle vérifiant $\Phi(M) = \lambda M$.

On voit par récurrence, que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k.M = M.(\lambda I + B)^k$,

et par linéarité, que $\forall P \in \mathbf{C}[X]$ P(A).M = M.P(λI + B).

Prenons pour P le polynôme caractéristique de A.

Alors P(A) = 0 (Hamilton-Cayley), d'où 0 = M. P(λI + B).

Attention à ne pas dire que, comme M est non nulle, P(λI + B) est nulle !

Mais, comme M est non nulle, la matrice P(λI + B) est non inversible.

Or det P(λI + B) = $\prod_{i=1}^{n} P(\lambda+\beta_i)$, où Sp B = { $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ }.

Cela découle de ce que B est trigonalisable et donc (exercice en début de chapitre)

Sp P(λI + B) = { P(λ + β_1), P(λ + β_2), …, P(λ + β_n) }.

Comme det P(λI + B) = 0, l'un des λ + β_i est une valeur propre de A. cqfd.

3) Noter que $0 \notin \text{Sp}\,\Phi$ équivaut à Sp A ∩ Sp B = ∅.

Remarques : 1) la théorie des produits tensoriels permet de retrouver cela.
2) On peut aussi noter que les endomorphismes M → AM et M → MB sont trigonalisables et commutent, donc sont simultanément trigonalisables.

Exercice 10 : On se place dans $M_n(\mathbf{C})$, et on pourra utiliser le théorème de Jordan.
1) Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.
2) Montrer que A est nilpotente si et seulement si A et 2A sont semblables.

Solution : Commençons par observer que les matrices N = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ${}^tN$ et 2N sont semblables.

Le théorème de Jordan stipule que A est semblable à un tableau diagonal de matrices de la forme λI + N. On en déduit aussitôt que A et ${}^tA$ sont semblables, et que si A est nilpotente, A et 2A sont semblables.
Réciproquement, si A et 2A sont semblables, elles ont même spectre, donc Sp A est stable par z → 2z. Comme Sp A est un ensemble fini, ce n'est possible que si Sp A = {0}, donc si A est nilpotente.

Remarques : 1) On peut montrer que A est nilpotente ssi la matrice nulle adhère à la classe de similitude de A. Or si A et 2A sont semblables, il en est de même de A et A/2, de A et $A/2^n$ … (cf. problème de topologie matricielle).
2) Le livre de Mneimné, *Réduction des endomorphismes*, donne une preuve sans Jordan de 2).

Exercice 11 : Soient E = $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, D l'opérateur de dérivation. Existe-t-il T ∈ $\mathcal{L}$(E) tel que $T^2 = D$?

Solution :
En somme, y a-t-il un opérateur plus fondamental et plus simple que la dérivation, dont le carré fonctionnel soit la dérivation ? Si c'était vrai, ça se saurait ! Le bon sens suggère que T n'existe pas.

1ère solution : Considérons F = $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ = Ker D^n . T commute à D, donc à D^n ; par suite F serait T-stable. D induit dans F un endomorphisme nilpotent d'indice n, de matrice N = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dans une base convenable, la base $\left(1, X, \frac{X^2}{2}, \dots, \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}\right)$. T induirait un endomorphisme de matrice A telle que $A^2 = N$. Or N n'est pas un carré matriciel. En effet, on aurait $A^{2n} = O$ et $A^{2n-2} \neq O$: A serait nilpotente d'indice 2n ou 2n−1. Or l'indice de nilpotence d'une matrice est toujours ≤ *n*.

2ème solution : T ne serait pas injectif, sans quoi D le serait.
On a donc {0} ≠ Ker T ⊂ Ker D = {ctes} , donc Ker T = {ctes}.
Mais alors Ker T = Ker T^2 = Ker T^3 = Ker T^4 = … . Or dim Ker T^{2n} = dim Ker D^n = *n*.

Remarques : 1) Emilien Courtine observe que ce résultat est faux si l'on considère E = $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ comme **R**-espace vectoriel. En effet, si f = g + *i*h, où g et h sont les parties réelle et imaginaire de f, l'opérateur T défini par T(f) = h + *i*g' est **R**-linéaire et tel que $T^2 = D$.

2) En revanche, l'opérateur intégral T : $f \to F$, où $F(x) = \int_0^x f(t).dt$ a bel et bien une racine carrée, l'opérateur d'Abel.

Exercice 12 : Soient E un **K**-espace vectoriel de dimension *n*, u ∈ $\mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences :

- Il existe un hyperplan vectoriel H tel que $u(H) \subset H \Leftrightarrow$ u admet une valeur propre ;
- Il existe un hyperplan affine H ne passant pas par O et tel que $u(H) \subset H \Leftrightarrow 1 \in \text{Sp } u$.

[Oral Mines 2002]

Solution : Cet exercice est susceptible de multiples traitements. Nous privilégions ici les méthodes matricielles pour sacrifier à l'air du temps. J'ai donné d'autres preuves dans la RMS juin 2002.

1) Hyperplans vectoriels stables.

Soit A la matrice de u relativement à une base quelconque.

Un hyperplan H a pour équation dans cette base :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \ , \ \text{où } (\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_n) \neq 0 \ , \quad \text{ou encore } {}^t\Lambda.X = 0 .$$

Il s'agit d'écrire que ${}^t\Lambda.X = 0 \Rightarrow {}^t\Lambda.A.X = 0$.

Or on sait que si *f* et *g* sont deux formes linéaires sur E, Ker $f \subset$ Ker $g \Leftrightarrow (\exists\alpha)\ g = \alpha f$.

${}^t\Lambda.X = 0 \Rightarrow {}^t\Lambda.A.X = 0$ équivaut à dire que $(\exists\alpha)\ {}^t\Lambda.A = \alpha\,{}^t\Lambda$, autrement dit que $(\exists\alpha)\ {}^tA.\Lambda = \alpha\Lambda$, ou encore que Λ est un vecteur propre de ${}^tA$.

Conclusion : La recherche des hyperplans A-stables équivaut à celle des vecteurs propres de ${}^tA$.

2) Hyperplans affines stables.

Soit H un hyperplan affine ne passant pas par O. Dans un certain repère, se traduit par :

$$\forall(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1} \quad a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn} = 1 .$$

Cela équivaut à $a_{n1} = \dots = a_{n,n-1} = 0$ et $a_{nn} = 1$.

Ainsi A = $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On en déduit aussitôt que $1 \in$ Sp A = Sp u.

Réciproquement, si $1 \in$ Sp u, il existe une base de E telle que u ait pour matrice :

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. L'hyperplan H d'équation $x_n = 1$ vérifie clairement $u(H) \subset H$.

---

8. *Exponentielles de matrices.*

Exercice 1 : Calculer les exponentielles de J = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, H = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, A = $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Solution : On peut diagonaliser J et H. Mais on peut aussi éviter de le faire.

Comme $J^2 = I$, $\exp J = I + \frac{J}{1!} + \frac{I}{2!} + \frac{J}{3!} + \dots = (\text{ch } 1).I + (\text{sh } 1).J = \begin{bmatrix} ch1 & sh1 \\ sh1 & ch1 \end{bmatrix}$.

Plus galt, $\exp(xJ) = \begin{bmatrix} chx & shx \\ shx & chx \end{bmatrix}$. Ces matrices forment un sous-groupe à 1 paramètre de $Gl_2(\mathbf{R})$.

Comme $H^2 = -I$, $\exp H = I + \frac{H}{1!} - \frac{I}{2!} - \frac{H}{3!} + \dots = (\cos 1).I + (\sin 1).H = \begin{bmatrix} ch1 & sh1 \\ sh1 & ch1 \end{bmatrix}$.

Plus galt, $\exp(xH) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$. Ces matrices forment un sous-groupe à 1 paramètre de $Gl_2(\mathbf{R})$.

$\exp(A) = \exp(aI + bJ) = \exp(aI).\exp(bJ) = \exp a.\begin{bmatrix} chb & shb \\ shb & chb \end{bmatrix}$.

$\exp(B) = \exp(aI + bH) = \exp(aI).\exp(bH) = \exp a.\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

<u>Exercice 2</u> : 1) Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$. Montrer que $\exp A = \begin{bmatrix} e^a & c.\frac{e^b - e^a}{b-a} \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$ si $a \neq b$.

Quel résultat obtient-on si $a = b$?

2) En déduire que l'application $A \in M_2(\mathbf{C}) \to \exp A \in Gl_2(\mathbf{C})$ est surjective.

3) Montrer que si $A \in M_2(\mathbf{C})$, A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ exp A est diagonalisable.

<u>Solution</u> : 1) Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$. Calculons exp A.

• <u>Si $a \neq b$</u>, A a deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

Un vecteur propre associé à a est ${}^t(1, 0)$, un vecteur propre associé à b est ${}^t(\frac{c}{b-a}, 1)$.

Donc $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c}{b-a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ vérifie $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Or $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c}{b-a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Donc $\exp A = P.\begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.P^{-1} = \begin{bmatrix} e^a & c.\frac{e^b - e^a}{b-a} \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$ (1).

• <u>Si $a = b$</u>, on peut écrire $A = a.I + N$, où $N = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; I et N commutent et N est nilpotente .

Donc $\exp A = \exp(aI).\exp N = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{bmatrix}$.

Une <u>autre solution</u> consisterait à faire tendre b vers a par valeurs $\neq a$ dans la formule (1), en prenant appui sur la continuité de l'exponentielle.

<u>Autres solutions, sans réduction, si $a \neq b$</u> :

On peut noter que $\exp A = \begin{bmatrix} e^a & u \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$. En écrivant que A commute à exp A, on trouve u (C. Rifflart).

Enfin, on peut calculer $A^2, A^3, \dots$, et montrer par récurrence que $A^k = \begin{bmatrix} a^k & c.\frac{b^k - a^k}{b-a} \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$ si $a \neq b$.

On conclut aussitôt via $\exp A = \sum_k \frac{A^k}{k!}$.

On peut retrouver ce résultat en divisant X^k par $(X - a)(X - b)$ et en substituant A à X, via les polynômes de Lagrange.

Remarque : Bien entendu, A = D + N, où D = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ et N = $\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Et exp D.exp N = $\begin{bmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$.

Si $a \neq b$ et $c \neq 0$, exp A = exp D.exp N $\Leftrightarrow$ $\dfrac{e^b - e^a}{b-a} = e^a$ $\Leftrightarrow$ $e^{b-a} = 1 + (b - a)$ $\Leftrightarrow$ $b - a$ est solution de l'équation $e^z = 1 + z$. Or on démontre que cette équation a une infinité de solutions.
Ainsi, le théorème « A et B commutent $\Rightarrow$ exp(A + B) = exp A.exp B » est donc sans réciproque.

2) **L'application** $A \in M_2(\mathbf{C}) \to \exp A \in Gl_2(\mathbf{C})$ **est surjective**.
Soit $B \in Gl_2(\mathbf{C})$. B est trigonalisable, semblable à $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ ou à $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, λ et μ étant non nuls.

Comme $z \to \exp z$ est surjective de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$, il existe a et b tels que $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$.

De même, il existe a et c tels que $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & a \end{bmatrix}$: prendre $\lambda = \exp a$, et $c = \exp(-a)$.

Il reste à conclure à similitude près.

3) Montrons que exp A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable.

Le sens $\Leftarrow$ est évident. Montrons $\Rightarrow$, en supposant A de la forme $\begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$, ce qui ne restreint rien.

Si $a = b$, et si $\begin{bmatrix} e^a & ce^a \\ 0 & e^a \end{bmatrix}$ est diagonalisable, alors c = 0, est A est diagonale.

Si $a \neq b$, A est diagonalisable.

Exercice 3 : Comparer $\exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ à $\exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et $\exp \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ à $\exp \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.\exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer exp A, où A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Que remarque-t-on ?

Solution :

Exercice 4 : Calculer exp J, où J = $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in M_n(\mathbf{C})$.

Solution : $J = \lambda I + N$. Comme I et N commutent, $\exp J = (\exp \lambda I).(\exp N) = \exp(\lambda).\exp N$.

$$\exp J = \exp(\lambda).\begin{bmatrix} 1 & 1/1! & 1/2! & \dots & 1/(n-1)! \\ 0 & 1 & 1/1! & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1/2! \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1/1! \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5 : Calculer les exponentielles des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution :

Exercice 6 : Calculer l'exponentielle d'un quaternion A = $\begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix}$, (u, v) ∈ $\mathbf{C}^2$ (Ivan Marin).

Solution :

Exercice 7 : Calculer cos A et sin A, où A = $\begin{bmatrix} \pi/3 & \pi/2 \\ 0 & -\pi/3 \end{bmatrix}$, puis A = $\begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ -\pi/2 & \pi/2 & 0 \\ \pi/2 & -\pi/2 & -\pi/2 \end{bmatrix}$.

Solution : Les deux matrices proposées sont diagonalisables.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(2,2,[Pi/3,Pi/2,0,-Pi/3]);
B:=exponential(evalm(I*A));C:=map(Re,op(B));S:=map(Im,op(B));
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\pi & \frac{1}{2}\pi \\ 0 & -\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3} & \frac{3}{4}I\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad S := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{4}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> A:=matrix(3,3,[Pi, 0,0,-Pi/2,Pi/2,0,Pi/2,-Pi/2,-Pi/2]);
B:=exponential(evalm(I*A));C:=map(Re,op(B));S:=map(Im,op(B));
```

$$A := \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi & 0 \\ \frac{1}{2}\pi & -\frac{1}{2}\pi & -\frac{1}{2}\pi \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1+I & I & 0 \\ \frac{-2}{3}-\frac{1}{3}I & -I & -I \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 8 : Résoudre les équations exp X = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, resp. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Solution : Autrement dit, on cherche les « logarithmes » de ces matrices.

♣ La matrice A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible, donc ne saurait être une exponentielle.

♦ La matrice B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 3 et –1. Si P = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}.B.P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ = D.

Posons $P^{-1}.X.P = Y$; alors exp X = B ⇔ exp Y = D.

Y est à chercher parmi les matrices qui commutent à D, donc Y = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Alors exp Y = D ⇔ exp a = 3 et exp b = –1 ⇔ $a = \ln 3 + 2ik\pi$, $b = i\pi + 2il\pi$, où $(k, l) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Au final, B a une infinité de logarithmes : X = $P.\begin{bmatrix} \ln 3+2ik\pi & 0 \\ 0 & i\pi+2il\pi \end{bmatrix}.P^{-1}$, $(k, l) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Il n'y a pas de logarithme réel.

♥ La matrice C = $\begin{bmatrix}1&1\\0&4\end{bmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et 4. Si P = $\begin{bmatrix}1&1/3\\0&1\end{bmatrix}$, P^{-1}.C.P = $\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$ = D.

Posons P^{-1}.X.P = Y ; alors exp X = B ⇔ exp Y = D.

Y est à chercher parmi les matrices qui commutent à D, donc Y = $\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$.

Alors exp Y = D ⇔ exp a = 1 et exp b = 4 ⇔ $a = 2ik\pi$, $b = \ln 4 + 2il\pi$, où $(k, l) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Au final, B a une infinité de logarithmes : X = P.$\begin{bmatrix}2ik\pi&0\\0&\ln 4+2il\pi\end{bmatrix}$.$P^{-1}$, $(k, l) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Il y a un seul logarithme réel, correspondant à $k = l = 0$.

♠ Si exp X = $\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, X commute à $\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, donc à $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$.

Bref, X = $\begin{bmatrix}a&b\\0&a\end{bmatrix}$ et exp X = $e^a\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}$. Il reste à identifier.

Exercice 9 : Soient A = $\begin{bmatrix}-1&0\\2&1\end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$.

1) Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, et tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $(x.A + y.B)^n$, puis exp(x.A + y.B).

2) Montrer que { exp(x.A + y.B) ; $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ } est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$.

Solution : cf. mes exercices d'algèbre linéaire.

Exercice 10 : 1) Soient A = $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$, et r une racine de $\frac{(a-d)^2}{4} + b.c$ dans $\mathbf{C}$.

Montrer que exp A = $\exp\frac{a+d}{2}.\left\{ch\,r\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + \frac{sh\,r}{r}.\begin{bmatrix}\frac{a-d}{2}&b\\c&\frac{a-d}{2}\end{bmatrix}\right\}$.

2) Soient A = $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, et $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$. Montrer que :

• Si $\Delta > 0$, exp A = $\exp\frac{a+d}{2}.\left\{ch\,r\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + \frac{sh\,r}{r}\begin{bmatrix}\frac{a-d}{2}&b\\c&\frac{d-a}{2}\end{bmatrix}\right\}$, $r = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$;

• Si $\Delta = 0$, exp A = $\exp\frac{a+d}{2}.\begin{bmatrix}1+\frac{a-d}{2}&b\\c&1+\frac{d-a}{2}\end{bmatrix}$;

• Si $\Delta < 0$, exp A = $\exp\frac{a+d}{2}.\left\{\cos(s)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + \frac{\sin s}{s}\begin{bmatrix}\frac{a-d}{2}&b\\c&\frac{d-a}{2}\end{bmatrix}\right\}$, $s = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Application : Montrer que les matrices $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ telles que exp A = I sont O et $\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}$, où $a^2 + bc = -4k^2\pi^2$, où $k \in \mathbf{N}^*$.

Solution :

Exercice 11 : Soient A = $\begin{bmatrix}0&a&c\\-a&0&b\\-c&-b&0\end{bmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$, $r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Montrer que exp A = cos r . I + $\dfrac{\sin r}{r}$ .A + $\dfrac{1-\cos r}{r}$ .M , où M = $\begin{bmatrix} b^2 & -bc & ab \\ -bc & c^2 & -ab \\ ab & -ac & a^2 \end{bmatrix}$.

Solution : Supposons $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

1) Commençons par le cas où A = $\begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $A^2 = r^2.I$, M = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}$, et la formule demandée est facile à vérifier.

2) Dans le cas général, A est (orthogonalement) semblable à A' = $\begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En effet, A est la matrice de l'application $\vec{x} \to \vec{\omega} \wedge \vec{x}$, où $\vec{\omega} = (a, b, c)$.
Or cette application a pour matrice A' dans un repère orthonormé direct convenable…

<u>Exercice 12</u> : Soient **K** = **R** ou **C**, E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, et u ∈ $\mathcal{L}$(E).
1) Montrer que exp u est un polynôme de u.
2) Déterminer un tel polynôme lorsque (u – I) o (u – 2I) = 0.
3) Déterminer un tel polynôme lorsque $(u - I)^2 = 0$.
4) Déterminer un tel polynôme lorsque $(u - I)^2$ o (u – 2I) = 0.

<u>Solution</u> : [Oral X MP 2011, RMS n° 127]
1) ***<u>Attention à bien comprendre l'énoncé !</u>***
Il ne s'agit pas de montrer que : $\exists P \in \mathbf{C}[X] \quad \forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \exp u = P(u)$,
mais que : $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad \exists P \in \mathbf{C}[X] \quad \exp u = P(u)$,
Autrement dit, la fonction exp n'est pas polynomiale : le polynôme P dépend de u.
Equipons E d'une norme quelconque, et $\mathcal{L}$(E) de la norme subordonnée.
Les polynômes de u forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}$(E) (et même une sous-algèbre) de dimension ≤ n, en vertu du théorème de Hamilton-Cayley, et en réalité de dimension d, où d = deg $\mu_u(X)$. Ce sous-espace est fermé, comme tous les sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace normé. Comme exp u est la limite de la suite $E_k(u) = \sum_{p=0}^{k} \frac{u^p}{p!}$, exp u est un polynôme de u.
<u>Nous allons voir que la fonction exponentielle est polynomiale sur certains sous-ensembles de $\mathcal{L}$(E).</u>
Par exemple, elle est polynomiale sur l'ensemble des endomorphismes nilpotents, car

$$\exp u = I + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} .$$

2) <u>Supposons que u annule le polynôme (X – 1)(X – 2)</u>.
Divisons X^k par (X – 1)(X – 2) : $X^k = (X-1)(X-2).Q_k(X) + R_k(X)$, où deg $R_k \leq 1$.
Ecrivons $R_k(X) = a X + b$. Par substitutions X = 1, X = 2, il vient : $a + b = 1$, $2a + b = 2^k$.
D'où $a = 2^k - 1$ et $b = 2 - 2^k$.
Substituant u à X il vient : $u^k = R_k(u) = (2^k - 1).u + (2 - 2^k).I$.
Finalement, exp u = $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} [(2^k - 1).u + (2 - 2^k).I]$ = (exp 2).(u – I) – (exp 1).(u – 2I).

$$\boxed{\text{Si } (u - I).(u - 2I) = 0, \text{ alors } \exp u = (e^2 - e).u + (2e - e^2).I .}$$

<u>Autre solution</u> : u est diagonalisable et Sp u ⊂ {1, 2}.

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que Mat(u, $\mathcal{B}$) = diag(I_p, $2.I_q$). Alors
Mat(u, $\mathcal{B}$) = diag($e.I_p$, $e^2.I_q$) = P(Mat(u, $\mathcal{B}$)), où $P(1) = e$, $P(2) = e^2$.
Or il existe un polynôme de degré 1 tel que $P(1) = e$, $P(2) = e^2$, à savoir $P = (e^2 - e).X + 2e - e^2$.
Plus généralement, si u annule le polynôme $P(X) = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_s)$ scindé à racines simples, alors $\exp u = P(u)$, où P est le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $P(\alpha_k) = \exp \alpha_k$.

3) Supposons que u annule le polynôme $(X-1)^2$.

On peut diviser X^k par $(X-1)^2$: $X^k = (X-1)^2.Q_k(X) + R_k(X)$, où $d° R_k \le 2$, $R_k(1) = 1$, $R'_k(1) = k$.
Mais mieux vaut noter que $\exp u = \exp I .\exp(u - I) = \exp 1.(I + \frac{u-I}{1!} + \frac{(u-I)^2}{2!} + \dots) = e.\frac{u^2+I}{2}$.

Plus généralement, si u annule $P(X) = (X - \alpha)^s$, alors :

$$\exp u = e^\alpha.(I + \frac{u-\alpha I}{1!} + \frac{(u-\alpha I)^2}{2!} + \dots + \frac{(u-\alpha I)^{s-1}}{(s-1)!}) .$$

4) Supposons que u annule le polynôme $(X-1)^2(X-2)$.

Divisons X^k par $(X-1)^2(X-2)$: $X^k = (X-1)^2(X-2).Q_k(X) + R_k(X)$, où $\deg R_k \le 2$.
Ecrivons $R_k(X) = a X^2 + b X + c$.
Par substitution, X = 1, X = 2, et X = 1 dans la dérivée, il vient :

$$a + b + c = 1 \quad , \quad 4a + 2b + c = 2^k \quad \text{et} \quad k = 2a + b .$$

D'où $a = 2^k - k - 1$, $b = -2^{k+1} + 3k + 2$, $c = 2^k - 2k$.
Subsituant u à X il vient : $u^k = R_k(u) = (2^k - k - 1).u^2 + (-2^{k+1} + 3k + 2).u + (2^k - 2k).I$.
Finalement, $\exp u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} [(2^k - k - 1).u^2 + (-2^{k+1} + 3k + 2).u + (2^k - 2k).I]$. Après calculs:

$$\boxed{\text{Si } (u-I)^2.(u-2I) = 0, \text{ alors } \exp u = (e^2 - 2e).u^2 + (5e - 2e^2).u + (e^2 - 2e).I .}$$

Remarque : si $(u - I).(u - 2I) = 0$ ou $(u - I)^2 = 0$, on retrouve les résultats précédents.

Exercice 13 : Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$.
1) Montrer l'équivalence A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ exp A est diagonalisable.
2) En déduire l'équivalence :
$\exp A = I_n \Leftrightarrow \exists P \in Gl_n(\mathbf{C})\ \ \exists(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n\ \ P^{-1}.A.P = 2i\pi \operatorname{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$.
3) Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbf{R})$ telles que $\exp A = I_n$.

Solution : 1) Le sens $\Rightarrow$ est immédiat. L'implication réciproque est ardue.
Soit A = D + N la décomposition de Dunford de A.
Comme D et N commutent (ce sont des polynômes de A) :

$$\exp A = \exp D.\exp N = \exp D + \exp D.(\exp N - I).$$

Je dis que ceci est la décomposition de Dunford de exp A. En effet :
- D' = exp D est diagonalisable ;
- N' = exp D.(exp N – I) = exp D.N.($I + \frac{N}{2!} + \frac{N^2}{3!} + \dots$) est nilpotent.
- D' et N' commutent.

L'hypothèse faite sur exp A se traduit par N' = O, i.e. exp D.N.($I + \frac{N}{2!} + \frac{N^2}{3!} + \dots$) = O.
Comme exp D et $I + \frac{N}{2!} + \frac{N^2}{3!} + \dots$ sont inversibles (trigonaliser), N = O. Cqfd !
2) Conséquence facile. 3) laissée au lecteur.

Exercice 14 : Montrer que A → exp A de $M_2(\mathbf{C})$ dans $Gl_2(\mathbf{C})$ est surjective et non injective.
Décrire de même l'image de $M_2(\mathbf{R})$ par l'exponentielle.

Solution : La démarche est la même que dans l'exercice sur la surjectivité de $A \to A^2$.
Rappelons que $z \to \exp z$ est une surjection de **C** sur **C*** et de **R** sur $\mathbf{R}^*_+$.

1) Commençons par résoudre exp X = A dans $M_2(\mathbf{C})$.

a) Tout d'abord, A est forcément inversible.

b) A est semblable à l'une des matrices $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq \mu)$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (λ et μ non nuls).

c) Tout revient donc à résoudre les équations exp Y = B. Or les solutions de cette équation sont à chercher parmi les matrices qui commutent à B.

d) ♣ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ ($\lambda \neq \mu$ non nuls). Y commute à B ssi $Y = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

Donc exp Y = B ⇔ $\exp \alpha = \lambda$ et $\exp \beta = \mu$.
Donc l'équation exp Y = B a des solutions.

♦ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$. Si $\exp \delta = \lambda$, il est clair que $\exp \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = B$.

♠ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$. Y commute à B ssi Y commute à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc ssi $Y = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

$\exp Y = \begin{bmatrix} e^\alpha & \beta e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{bmatrix} = B$ ⇔ $\exp \alpha = \lambda$ et $\beta.\exp \alpha = 1$. λ étant ≠ 0 , α existe, et β aussi.

Conclusion : Dans $M_2(\mathbf{C})$, l'équation exp X = A a une solution ssi $A \in Gl_2(\mathbf{C})$.
Autrement dit, l'image de $M_2(\mathbf{C})$ par X → exp X est $Gl_2(\mathbf{C})$.

2) Cherchons à résoudre exp X = A dans $M_2(\mathbf{R})$.

a) Tout d'abord, A est inversible.

b) A est semblable à l'une des matrices réelles

$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ ($\lambda \neq \mu$ non nuls) , $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$, $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ $(\beta \neq 0)$ et $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda \neq 0)$.

c) Tout revient donc à résoudre les équations exp Y = B. Or les solutions de cette équation sont à chercher parmi les matrices qui commutent à B.

d) ♣ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ ($\lambda \neq \mu$ non nuls). Y commute à B ssi $Y = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$.

On a : exp Y = B ⇔ $\exp \alpha = \lambda$ et $\exp \beta = \mu$.
Donc l'équation exp Y = B a une solution ssi λ et μ sont > 0.

♦ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda > 0)$; soit $\delta = \ln \lambda$. Il est clair que $\exp \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = B$.

♦ ♦ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda < 0)$;

♥ Supposons $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Y commute à B ssi Y commute à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc ssi $Y = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

$\exp Y = \begin{bmatrix} e^\alpha & \beta e^\alpha \\ 0 & e^\alpha \end{bmatrix} = B$ ⇔ $\exp \alpha = \lambda$ et $\beta.\exp \alpha = 1$. Donc Y existe ssi $\lambda > 0$.

♠ Supposons B = $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ($\beta \neq 0$). Y commute à B ssi Y commute à $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc ssi Y = $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. En raison de la correspondance bien connue entre nombres complexes et matrices, résoudre exp Y = B dans $M_2(\mathbf{R})$ équivaut à résoudre l'équation $\exp(a + ib) = \alpha + i\beta$ dans **C**. On sait que cette équation a toujours des solutions.

<u>Conclusion</u> : Dans $M_2(\mathbf{R})$, pour que l'équation exp X = A soit sans solution, il faut et il suffit que A soit non inversible, ou semblable à $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\lambda \neq \mu$, l'un d'eux au moins étant < 0, ou à $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \leq 0$.
Autrement dit, l'image de $M_2(\mathbf{R})$ par $X \to \exp X$ est $Gl_2(\mathbf{R})$ privé de ces classes de similitude.

En particulier, si l'on note $Gl_2^+(\mathbf{R})$ le sous-groupe de formé des matrices de déterminant > 0, $X \to X^2$ envoie $Gl_2(\mathbf{R})$ dans $Gl_2^+(\mathbf{R})$, mais sans toutefois induire une surjection. Certaines matrices à déterminant > 0 ne sont pas des carrés, par exemple $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>Exercice 15</u> : Montrer que $A \to \exp A$ de $M_n(\mathbf{C})$ dans $Gl_n(\mathbf{C})$ est surjective et non injective.
[Indication : Soit $B \in Gl_n(\mathbf{C})$; décomposer B = D + N, D diagonale, N nilpotente, D.N = N.D ; écrire B sous la forme B = D.(I + N'), et substituer N' à X dans l'identité formelle 1 + X = exp ln (1 + X).]
En déduire que l'application $A \to A^2$ de $Gl_n(\mathbf{C})$ dans $Gl_n(\mathbf{C})$ est surjective.

<u>Solution</u> :

1) L'application $A \to \exp A$ de $M_n(\mathbf{C})$ dans $Gl_n(\mathbf{C})$ n'est pas injective, car $\exp(A) = \exp(A + 2i\pi.I)$

2) <u>Montrons qu'elle est surjective</u>. Soient $B \in Gl_n(\mathbf{C})$, B = D + N, D diagonale, N nilpotente, avec D.N = N.D, sa décomposition de Dunford. D et N sont des polynômes de B.
Ecrivons B sous la forme B = D.(I + N'), où $N' = D^{-1}.N$; N' est nilpotente et commute à D.
On peut écrire D = exp D', où D' commute à D et est même un polynôme de D, donc de B.
Substituons N' à X dans l'identité formelle 1 + X = exp ln (1 + X), où, par définition, ln(1 + X) désigne la série formelle $\ln(1 + X) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k$.

Il vient I + N' = exp M, où M = « ln (I + N') » = $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} . N'^k$; M est polynôme de N' donc de B.

Alors B = exp(D').exp(M) = exp(D' + M), car D' et M commutent.

3) <u>L'application</u> $A \to A^2$ <u>de</u> $Gl_n(\mathbf{C})$ <u>dans</u> $Gl_n(\mathbf{C})$ <u>est surjective</u>.
Soit $B \in Gl_n(\mathbf{C})$, $X \in M_n(\mathbf{C})$ telle que B = exp X. Alors $B = \exp(X/2)^2$, donc il existe $A \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $B = A^2$. Et il est clair que A est inversible.

<u>Référence</u> : Problème ENS Lyon 1988.

<u>Exercice 16</u> : Soient $X, Y \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que $X.Y = Y.X \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbf{R})\ e^{t.X}.e^{t.Y} = e^{t.(X+Y)}$.

<u>Solution</u> : Le sens $\Rightarrow$ relève du cours.
Supposons réciproquement $(\forall t \in \mathbf{R})\ e^{t.X}.e^{t.Y} = e^{t.(X+Y)}$.
Identifions les développements limités en 0 des deux membres. Il vient :

$$(I + t.X + \frac{t^2}{2}.X^2 + O(t^3)).(I + t.Y + \frac{t^2}{2}.Y^2 + O(t^3)) = I + t.(X + Y) + \frac{t^2}{2}.(X+Y)^2 + O(t^3).$$

D'où $X^2 + 2XY + Y^2 = X^2 + XY + YX + Y^2$, et finalement X.Y = Y.X.

Exercice 17 : Soient A et B deux matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$.
Montrer que exp A = exp B $\Rightarrow$ A = B.

Solution :

1) Le résultat est faux dans $M_n(\mathbf{C})$. Si $\theta \in$ **R** ou **C**, soit $A(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$.

$A(\theta)$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{C})$, et $\exp A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. D'où $\exp A(\theta) = \exp A(\theta + 2\pi)$.

2) Soient A une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes de A, $E_k = \mathrm{Ker}(A - \lambda_k.I)$ les espaces propres associés, et P_k les projecteurs propres associés à la décomposition en somme directe :

$$\mathbf{R}^n = \oplus_{1\le k\le r} E_k \text{ . On a } A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k.P_k$$; c'est la **décomposition spectrale** de A.

Il en résulte que $\exp A = \sum_{k=1}^{r} \exp(\lambda_k).P_k$: elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$, à valeurs propres > 0.

3) Réciproquement, si M est une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$, à valeurs propres > 0, ayant pour décomposition spectrale $M = \sum_{k=1}^{s} \mu_k.Q_k$, on a bien M = exp A, où $A = \sum_{k=1}^{s} \ln(\mu_k).Q_k$. A est bien diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$.

Ainsi, $A \to \exp(A)$ induit une **surjection** de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$, sur l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$ à valeurs propres > 0.

4) Il s'agit de montrer que cette correspondance est **injective**. Cela peut de faire de deux manières. La première est un peu lourde, la seconde plus subtile.

1ère méthode. Soit M comme en 3). Si exp(A) = M, A commute à M, donc chacun des espaces propres $F_k = \mathrm{Ker}(M - \mu_k.I)$ de M est A-stable.

Si A est diagonalisable, chacun des endomorphismes induits $A_k = A|_{F_k}$ est diagonalisable, en tant que restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable (il annule le polynôme minimal de A, qui est scindé sans facteurs carrés).

Si l'on choisit une base de F_k dans laquelle A_k est diagonale, on voit aussitôt que les valeurs propres de A_k sont toutes égales à $\ln \mu_k$. Ainsi, $A_k = (\ln \mu_k).\mathrm{Id}_{F_k}$ et $A = \sum_{k=1}^{s} \ln(\mu_k).Q_k$.

2ème méthode. L'unicité de A va découler d'une remarque que nous avons omise lors de l'analyse faite en 2). Du fait de l'*injectivité* de l'exponentielle réelle, les valeurs propres de exp(A) sont au nombre de r, et ses espaces propres de exp(A) sont exactement les mêmes que ceux de A. Ainsi, $\exp(A) = \sum_{k=1}^{r} \exp(\lambda_k).P_k$ est la décomposition spectrale de exp(A).

Si donc $M = \sum_{k=1}^{s} \mu_k.Q_k$ est comme en 3), et si exp A = M, avec A diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$, alors A est nécessairement de la forme $\sum_{k=1}^{s} \lambda_k.Q_k$, et $\exp A = \sum_{k=1}^{s} \exp(\lambda_k).Q_k = \sum_{k=1}^{s} \mu_k.Q_k$, donc

$A = \sum_{k=1}^{s} \ln(\mu_k).Q_k$. A ne dépend que de M ; c'est, si l'on veut, son « logarithme » au sens du problème considéré.

En conclusion, plus l'analyse d'un problème est approfondie, plus la synthèse est facile.

<u>Exercice 18</u> : 1) Déterminer le rayon de convergence de L(z) = $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$.

2) On veut montrer que exp L(z) = 1 + z pour |z| < 1. Pour cela on considère u : t $\to \frac{\exp L(zt)}{1+zt}$.
Justifier que u est dérivable sur [0, 1], dériver u et conclure.

3) Soit A ∈ $M_n(\mathbf{C})$. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que pour tout $|z| \leq \alpha$:

$$\det(I_n + zA) = \exp \Big(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}tr(A^k)z^k \Big).$$

<u>Solution</u> : [Oral X 1983, RMS n° 86, Centrale MP 2011, RMS n° 276]

1) La règle de d'Alembert montre aussitôt que le rayon de convergence est 1.
<u>Remarque</u> : on peut montrer grâce à une transformation d'Abel que le domaine de définition exact de la fonction L(z) est D = { z ∈ **C** ; |z| ≤ 1 et z ≠ −1 }, et que L est continue dans D.

2) Bien entendu, si x est réel et $|x| < 1$, L(x) = $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ = ln(1 + x), de sorte que exp L(x) = 1 + x.

Il s'agit d'étendre ce résultat au disque |z| < 1, et l'on bute sur la notion de logarithme complexe.

Fixons z tel que |z| < 1, et considérons la fonction u : t ∈ [0, 1] → $\frac{\exp L(zt)}{1+zt}$ ∈ **C**.

Tout d'abord, v(t) = L(zt) = $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n t^n$ est une série entière en t de rayon 1/|z|.

Elle est donc C^∞ sur [0, 1] et v'(t) = $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}z^n t^{n-1} = \frac{z}{1+zt}$.

La fonction u est définie et C^∞ comme quotient et composée.

De plus : u'(t) = $\frac{z}{(1+zt)^2}$ exp L(zt) − $\frac{z}{(1+zt)^2}$ exp L(zt) = 0.

Par conséquent, u est constante sur [0, 1]. Donc u(1) = u(0) , autrement dit $\frac{\exp L(z)}{1+z}$ = 1. Cqfd.

3) Soit Sp A = { $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ } le spectre de A, les valeurs propres étant distinctes ou non.
A étant trigonalisable, on peut écrire :

$$\det(I_n + zA) = \prod_{i=1}^{n}(1+z\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n}\exp\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(z\lambda_i)^k\Big)$$

$$= \exp \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\lambda_i^k z^k \Big) = \exp \Big(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}tr(A^k)z^k \Big) .$$

Cela suppose (∀i) $|\lambda_i.z| < 1$, autrement dit $|z| < \alpha = \min \{ 1 / |\lambda_i| , \lambda_i \neq 0 \}$.
Si tous les λ_i sont nuls, autrement dit si A est nilpotente, la formule est vraie pour tout z, car :

$$\det(I_n + zA) = 1 = \exp 0 = \exp \Big(\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}tr(A^k)z^k \Big) .$$

<u>Remarque</u> : une variante consisterait à étendre la formule 2) aux matrices :

Si ||| A ||| < 1, exp $\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}.A^k \Big)$ = I + A. On écrit alors I_n + zA = exp L(zA), puis on passe au déterminant, via la formule : det(exp M) = exp (tr M).

<u>Exercice 19</u> : **<u>Stabilité des solutions d'un système différentiel</u>**.

1) Soient E un **C**-ev de dimension finie m, u ∈ $\mathcal{L}$(E), r = $\min_{\lambda\in Sp(u)}$ Re λ.
Montrer que : $\exists\, a \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad ||| e^{-t.u} ||| \leq a.(1 + t^{m-1}).e^{-tr}$.

2) Indiquer une cns pour que toutes les solutions du système différentiel Y' = A.Y tendent vers 0 quand t tend vers l'infini.

3) Soient A, B, C trois éléments de $M_n(\mathbf{C})$. On suppose que toutes les valeurs propres de A et B ont leurs parties réelles < 0. Montrer que A.M + M.B = O implique M = $e^{tA}.M.e^{tB}$, puis M = O.
Montrer qu'il existe une unique matrice M telle que A.M + M.B = C, et qu'elle est donnée par :

$$M = -\int_0^{+\infty} \exp(tA).C.\exp(tB).dt\ .$$

Solution :

Exercice 20 : Soient A, B, C ∈ $M_n(\mathbf{C})$ telles que AB – BA = C , AC = CA et BC = CB.
On définit la fonction f(t) = exp(–t.(A + B)).exp(t.A).exp(t.B).
Montrer que f est C^1 et que f'(t) = exp(–t.(A + B)).φ(t).exp(t.A).exp(t.B), où φ(t) est à préciser.
En déduire f(t), et conclure que : exp(A + B) = exp B. exp A. exp $\frac{AB-BA}{2}$.

Solution :

Exercice 21 : 1) Soit A ∈ $M_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\lim_{p\to\infty} \left(I + \frac{A}{p}\right)^p = \exp A$.

2) Soient A, B ∈ $M_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\lim_{p\to\infty} \left(\exp\frac{A}{p}.\exp\frac{B}{p}\right)^p = \exp(A + B)$.

et que $\lim_{p\to\infty} \left(\exp\frac{A}{p}.\exp\frac{B}{p}.\exp\frac{-A}{p}.\exp\frac{-B}{p}\right)^{p^2} = \exp(A.B - B.A)$.

3) Soit G un sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbf{R})$. Montrer que A = { M ∈ $M_n(\mathbf{R})$; ∀t ∈ **R** exp(t.A) ∈ G} est un sous-espace de $M_n(\mathbf{R})$. Par quelle autre opération est-il stable ?

Solution :

Exercice 22 : Monter que l'application A → exp A induit une bijection continue de l'espace des matrices symétriques (resp. hermitiennes) sur le cône convexe des matrices symétriques (resp. hermitiennes) définies positives.
Exemple : résoudre l'équation exp A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, avec A symétrique réelle.

Solution :

Exercice 23 : Monter que l'application A → exp(iA) de $M_n(\mathbf{C})$ dans $Gl_n(\mathbf{C})$ induit une surjection continue de l'ensemble des matrices hermitiennes sur l'ensemble des matrices unitaires.

Solution : cf. exercices d'algèbre bilinéaire.

Exercice 24 : Matrices antisymétriques et matrices de rotation.

1) Exponentielles de $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$. Intégrer les systèmes différentiels associés.

2) Montrer que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique réelle est une matrice de rotation, et que exp induit une surjection de l'espace vectoriel $A_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques réelles d'ordre n sur le groupe compact $O_n^+(\mathbf{R})$ des matrices de rotation.

Solution : cf. exercices d'algèbre bilinéaire.

Exercice 25 : Soit $f : \mathbf{R} \to Gl_n(\mathbf{R})$ une fonction de classe C^1 telle que $\forall(s, t) \in \mathbf{R}^2$ $f(s + t) = f(s).f(t)$. Montrer qu'il existe $A \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $(\forall t\in \mathbf{R})$ $f(t) = \exp(t.A)$.

Solution : cf. exercices sur les équations fonctionnelles.

Exercice 26 : Soit $f : \mathbf{R} \to M_n(\mathbf{R})$ une fonction de classe C^1 telle que $\forall(s, t) \in \mathbf{R}^2$ $f(s + t) = f(s).f(t)$. Montrer qu'il existe $P, A \in M_n(\mathbf{R})$ telles que $P^2 = P$, $P.A = A.P = P$ et $(\forall t \in \mathbf{R})$ $f(t) = P.\exp(t.A)$.

Solution : cf. exercices sur les équations fonctionnelles.

---

9. *Topologie matricielle*.

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, n est un entier ≥ 2. On munit $M_n(\mathbf{K})$ de sa topologie usuelle. Pour cette topologie, la suite de matrices $(A_k) = (a_{ij}^{(k)})$ converge vers la matrice $A = (a_{ij})$ ssi, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ $\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$, ou encore ssi, pour tout vecteur $X \in \mathbf{K}^n$,

$\lim_{k\to+\infty} A_k.X = A.X$.

On pourra user librement du théorème du rang et du théorème de Jordan, et on aura parfois intérêt à examiner d'abord le cas $n = 2$.

Exercice 1 : Enoncer et justifier brièvement les propriétés de convergence d'une somme, d'un produit, de l'inverse, du déterminant, de suites convergentes de matrices.

Solution :

Si $A_k \to A$ et $B_k \to B$, $A_k + B_k \to A + B$, $\lambda A_k \to \lambda A$, $A_k B_k \to A B$ et $\det A_k \to \det A$.

Si $A_k \to A$ et si $\det A \neq 0$, alors $\det A_k \neq 0$ à partir d'un certain rang et $A_k^{-1} \to A^{-1}$.

Cela découle de ce que $A \to \det A$ et $A \to \text{com } A$ sont polynomiales, donc continues.

Exercice 2 : Topologie des groupes linéaires.

1) Montrer que $Gl_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbf{K})$.

2) Applications :

- Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\det(\text{com } A) = (\det A)^{n-1}$.
- Soient A et $B \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\text{com}(A.B) = \text{com}(A).\text{com}(B)$.
- Soient A et $B \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

3) Soient A et $B \in Gl_n(\mathbf{C})$; en considérant $f(z) = \det(z.A + (1 - z).B)$, montrer que $Gl_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

4) Montrer que $Gl_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs, et a exactement deux composantes connexes par arcs, liées au signe du déterminant.

Solution :

1) <u>$Gl_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbf{K})$</u>.

En effet, $Gl_n(\mathbf{K})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbf{K}^*$ de $\mathbf{K}$ par l'application continue $A \to \det A$.

<u>Variante</u> : Le complémentaire de $Gl_n(\mathbf{K})$ dans $M_n(\mathbf{K})$, $V_n(\mathbf{K}) = \{ A ; \det A = 0 \}$, est une hyper-surface algébrique (conique) fermée.
Soit A une matrice non inversible, de rang $r < n$. Il existe des matrices inversibles P et Q telles que $Q.A.P = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. La suite (A_k) de matrices inversibles définies par $Q.A_k.P = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 1/k, \dots, 1/k)$ tend vers A, donc adhère à $Gl_n(\mathbf{K})$.

<u>Autre méthode</u> : passer par le polynôme caractéristique de A : $A - \alpha I$ est inversible pour tout $0 < \alpha < \min \{ |\lambda| ; \lambda \in Sp(A) - \{0\} \}$.

2) <u>Applications</u> :

- Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Montrons que $\det(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-1}$.
- Soient A et $B \in M_n(\mathbf{K})$. Montrons que $\operatorname{com}(A.B) = \operatorname{com}(A).\operatorname{com}(B)$.
- Soient A et $B \in M_n(\mathbf{K})$. Montrons que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Les deux premières assertions se montrent d'abord pour A et B inversibles, et reposent sur l'identité : $M.\,{}^t\operatorname{com} M = {}^t\operatorname{com} M.\,M = \det(M).I_n$; elles s'étendent ensuite par densité.
La troisième se montre pour A inversible : AB et BA sont alors semblables, donc ont même polynôme caractéristique ; cette dernière propriété s'étend par densité au cas où A est quelconque.

Cependant, AB et BA ne sont plus toujours semblables : considérer $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Nous reviendrons sur ce résultat dans un exercice ultérieur.

3) <u>$Gl_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs</u>.

Soient A et $B \in Gl_n(\mathbf{C})$. Considérons la fonction polynomiale $f(z) = \det((1 - z).A + z.B)$.
Elle est de degré $\le n$, et non nulle car $f(0) = \det A \ne 0$ et $f(1) = \det B \ne 0$.
Elle admet donc r racines dans $\mathbf{C}$, $Z = \{ z_1, \dots, z_r \}$. $\mathbf{C}-Z$ est connexe par arcs et contient 0 et 1.
Il y a donc un chemin continu (resp. C^∞) $\varphi : t \in [0, 1] \to \varphi(t) \in \mathbf{C}-Z$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$.
Alors $\Phi : t \in [0, 1] \to \Phi(t) = (1 - \varphi(t)).A + \varphi(t).B$ est un chemin continu (resp. C^∞) tel que $\Phi(0) = 1$ $\Phi(1) = B$, tracé dans $Gl_n(\mathbf{C})$.

<u>Autre méthode : par trigonalisation</u>. Si $P^{-1}.A.P = T$, trigonale supérieure inversible.
Il existe un chemin continu $\Phi : t \in [0, 1] \to \Phi(t)$ tracé dans l'ensemble des matrices trigonales supérieures inversibles, tel que $\Phi(0) = T$ et $\Phi(1) = I$. Alors $\Phi(t).A.\Phi(t)^{-1}$ relie continûment A à I.

<u>Remarque</u> : On peut aussi montrer ce résultat via les générateurs (cf. d) ou via la factorisation A = UT d'une matrice inversible, U unitaire et T triangulaire supérieure inversible. Or le groupe unitaire et le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles sont connexes par arcs.

4) <u>$Gl_n(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes par arcs : $Gl_n^{\pm}(\mathbf{R}) = \{A ; \operatorname{sgn}(\det A) = \pm 1\}$</u>.

$Gl_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs : en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, on ne peut relier continûment dans $Gl_n(\mathbf{R})$ une matrice A à déterminant > 0 à une matrice B à déterminant < 0.
Reste à montrer que chacun des ensembles $Gl_n^{\pm}(\mathbf{R}) = \{ A ; \operatorname{sgn}(\det A) = \pm 1 \}$ est connexe par arcs.
Comme $A \to \operatorname{diag}(-1, 1, \dots, 1).A$ est une bijection affine de $Gl_n^{+}(\mathbf{R})$ sur $Gl_n^{-}(\mathbf{R})$, il suffit de montrer que $Gl_n^{+}(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. Pour cela, il suffit de montrer que toute matrice $A \in Gl_n^{+}(\mathbf{R})$ peut être reliée continûment à I_n dans $Gl_n^{+}(\mathbf{R})$. On peut monter cela par plusieurs méthodes, l'une directe, les autres reposant sur la connexité par arcs du groupe spécial orhogonal $O_n^{+}(\mathbf{R})$.

<u>1ère méthode</u> : la méthode du pivot de Gauss montre que $Gl_n^{+}(\mathbf{R})$ est engendré par les matrices

$D_\alpha = \mathrm{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$, $\alpha > 0$, $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $i \neq j$, et les matrices d'anti-transpositions P_{ij} $(i < j)$, définies sur la base canonique par $P_{ij}(e_i) = e_j$, $P_{ij}(e_j) = - e_i$ et $P_{ij}(e_k) = e_k$ pour $k \notin \{i, j\}$.
Tout revient à relier chacun de ces générateurs à I_n.

- $\Phi(t) = \mathrm{diag}(t.\alpha + 1- t, 1, \dots, 1)$ relie D_α à I_n .
- $\Phi(t) = T_{ij}(t\lambda)$ relie $T_{ij}(\lambda)$ à I_n .
- $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos\frac{t\pi}{2} & -\sin\frac{t\pi}{2} \\ \sin\frac{t\pi}{2} & \cos\frac{t\pi}{2} \end{bmatrix}$ relie $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ à $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; extension immédiate aux P_{ij} .

2ème méthode : factorisation OT (simple conséquence de Gram-Schmidt).
Toute matrice inversible A s'écrit de façon unique sous la forme A = OT, où O est orthogonale et T triangulaire supérieure à éléments diagonaux > 0. Si det A > 0, det O = 1 ; or $O_n^+(\mathbf{R})$ et les matrices triangulaires à éléments diagonaux > 0 sont des ensembles convexes.

3ème méthode : décomposition polaire.
Toute matrice inversible A s'écrit de façon unique sous la forme A = OS, où O est orthogonale et S symétrique définie positive. Si det A > 0, det O = 1. Or $O_n^+(\mathbf{R})$ et l'ensemble $S_n^{++}(\mathbf{R})$ des matrices symétriques définies positives sont des ensembles convexes.

Exercice 3 : Etude du rang.

1) L'application $A \to \mathrm{rg}\, A$ est-elle continue ? En quels points est-elle continue ?

2) Montrer que, pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$, $F_r = \{ A ; \mathrm{rg}\, A \leq r \}$ est fermé, et $H_r = \{ A ; \mathrm{rg}\, A = r \}$ est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

3) Montrer que, pour toute matrice A, il existe un voisinage V de A tel que $\forall B \in V$ $\mathrm{rg}\, B \geq \mathrm{rg}\, A$.

Solution :

1) L'application $A \in M_n(\mathbf{K}) \to \mathrm{rg}\, A \in \{ 0, 1, \dots, n \}$ est continue en toute matrice inversible, puisqu'elle est alors localement constante. Elle est discontinue en les autres points, car toute matrice est limite de matrices inversibles.

2) Pour tout $r \in \{0, \dots, n\}$, $F_r = \{ A ; \mathrm{rg}\, A \leq r \}$ est fermé, car si (A_k) est une suite de matrices de rang $\leq r$ tendant vers A, tous les déterminants d'ordre r+1 extraits de A sont nuls, donc $A \in F_r$.
$H_r = \{ A ; \mathrm{rg}\, A = r \} = \{ A ; \mathrm{rg}\, A \leq r \} \cap \{ A ; \mathrm{rg}\, A \geq r \}$ est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

3) Pour toute matrice A, il existe un voisinage V de A tel que $\forall B \in V$ $\mathrm{rg}\, B \geq \mathrm{rg}\, A$.
En effet si rg A = r, il existe un déterminant mineur d'ordre r non nul extrait de A. Si B est suffisamment voisine de A, le même mineur extrait de B est non nul, donc $\mathrm{rg}\, B \geq r$.
Remarque : On exprime cette propriété en disant que le rang est semi-continu inférieurement.
L'exercice suivant [Centrale 2009, RMS n° 749] reprend ces questions sous un autre angle :

Exercice : Soit ||| ||| la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

Soient $A \in M_n(\mathbf{R}) - \{0\}$ et $d(A) = \inf \{ \frac{\|AX\|}{\|X\|} ; X \in (\mathrm{Ker}\, A)^\perp - \{0\} \}$.

a) Montrer que d(A) > 0.

b) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $|||\, M - A\, ||| < d(A) \Rightarrow \mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, M$.

c) Quelle est l'adhérence de $\{ PAQ ; P , Q \in Gl_n(\mathbf{R}) \}$?

Exercice 4 : Projecteurs et symétries.

1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P} = \{ P \in M_n(\mathbf{K}) ; P^2 = P \}$ des projecteurs est un fermé d'intérieur vide, non borné, qui admet $n + 1$ composantes connexes par arcs, à savoir les $\mathcal{P}_r = \{P \in \mathcal{P} ; \mathrm{rg}\, P = r\}$, et a deux points isolés, O et I.

2) Mêmes questions concernant $\mathbb{S} = \{ S \in M_n(\mathbf{K}) ; S^2 = I \}$.

Solution :

1) Propriétés topologiques de l'ensemble $\mathcal{P} = \{ P \in M_n(\mathbf{K}) ; P^2 = P \}$ des projecteurs.

$\mathcal{P}$ est fermé, car si (P_k) est une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ tendant vers P, à la limite $P^2 = P$.

$\mathcal{P}$ est d'intérieur vide, car $\text{diag}(I_r , O_{n-r}) = \lim_{k\to+\infty} \text{diag}(I_r , \frac{1}{k} I_{n-r})$; or ces matrices n'appartiennent pas à $\mathcal{P}$, pour $k > 1$.

$\mathcal{P}$ est non borné, car il contient le sous-espace affine de dimension $n-1$ formé des matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_n & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad , \text{ où } (a_2, \dots , a_n) \text{ décrit } \mathbf{K}^{n-1}.$$

De plus, si $0 < r < n$, $\{ \text{diag}(I_r , O_{n-r}) + x\, E_{r,r+1} ; x \in \mathbf{K} \}$ est une droite affine incluse dans $\mathcal{P}_r$.

$\mathcal{P}$ admet $n+1$ composantes connexes par arcs, à savoir les $\mathcal{P}_r = \{ P \in \mathcal{P} ; \text{rg } P = r \}$.

Tout d'abord on ne peut relier continûment dans $\mathcal{P}$ un projecteur de rang r à un projecteur de rang $s \neq r$, puisque le *rang* d'un projecteur est égal à sa *trace*, et donc, comme tel, fonction continue de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1, \dots, n\}$.

Reste à montrer que chaque $\mathcal{P}_r$ est connexe par arcs. Il suffit de relier continûment tout élément P de $\mathcal{P}_r$ à $J = \text{diag}(I_r , O_{n-r})$. Soit Q une matrice inversible telle que $Q^{-1}.P.Q = J$. Si $K = \mathbf{R}$, on peut choisir Q à déterminant > 0, quitte à changer un vecteur propre en son opposé, c'est-à-dire à multiplier Q par $\text{diag}(-1, 1, \dots , 1)$. Comme $Gl_n(\mathbf{C})$ et $Gl_n^+(\mathbf{R})$ sont connexes par arcs, on peut relier continûment $\Phi(0) = Q$ à $\Phi(1) = I_n$ dans ces groupes. Alors $\Phi(t)^{-1}.P.\Phi(t)$ reliera continûment P à J.

Enfin, $\mathcal{P}$ a deux points isolés, à savoir O et I.

Si (P_k) est une suite de projecteurs tendant vers O, $\text{tr } P_k \to 0$. Comme $\text{tr } P_k = \text{rg } P_k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $P_k = O$ àpcr. Idem pour I. D'ailleurs $P \to I - P$ est un homéomorphisme de $\mathcal{P}$.

Enfin, si $0 < r < n$, $\text{diag}(I_r , O_{n-r})$ n'est pas isolé, car :

$$\text{diag}(I_r , O_{n-r}) = \lim_{\varepsilon\to0} \ \text{diag}(I_r , O_{n-r}) + \varepsilon\, E_{r,r+1} .$$

Or il est facile de montrer que $\text{diag}(I_r , O_{n-r}) + \varepsilon\, E_{r,r+1}$ est un projecteur de rang r.

b) Propriétés topologiques de l'ensemble $\mathbb{S} = \{ S \in M_n(\mathbf{K}) ; S^2 = I \}$ des symétries.

L'application $S \to \frac{1}{2}(I + S)$ est une bijection affine de $\mathbb{S}$ sur $\mathcal{P}$. $\mathbb{S}$ a donc les mêmes propriétés géométriques et topologiques que $\mathcal{P}$. En particulier, $\mathbb{S}$ a $n+1$ composantes connexes par arcs, les $\mathbb{S}_r = \{ S \in \mathbb{S} ; \dim \text{Ker}(S - I) = r \}$, $0 \leq r \leq n$.

Remarque : ceci se généralise aussitôt aux matrices annulant un trinôme scindé sans carrés.

Exercice 5 : Puissances, ergodicité.

1) Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer que si la suite (A^k) converge, sa limite P vérifie :

$$P^2 = P \quad , \quad P.A = A.P = P \quad , \quad \text{Im } P = \text{Ker}(A - I) \qquad (*)$$

2) Indiquer une cns portant sur A pour que la suite (A^k) converge.

On pourra commnencer par le cas où A est diagonalsiable, puis utliser le théorème de Jordan.

3) La matrice A est dite « ergodique » si la suite $M_k = \frac{1}{k}(I + A + \dots + A^{k-1})$ converge.

Montrer que si la suite (M_k) converge, sa limite P vérifie (*).
[On pourra exprimer $M_k.A = A.M_k$ à l'aide de M_{k+1} et de I.]
Montrer que (A^k) converge $\Rightarrow$ A ergodique, la réciproque étant fausse.
4) Cns pour que (M_k) converge.

Solution :

1) Convergence de la suite (A^k).

a) Si la suite (A^k) converge vers P, alors $P^2 = P$, $P.A = A.P = P$ et $\text{Im } P = \text{Ker}(A - I)$.
La suite $A^{2k} = A^k.A^k$ tend vers P comme suite extraite, et vers P^2 ; donc P est un projecteur.
La suite $A^{k+1} = A.A^k = A^k.A$ tend vers P comme suite extraite, et vers $A.P = P.A$.
$(A - I).P = 0$ implique $\text{Im } P \subset \text{Ker } (A - I)$.
Réciproquement, soit $X \in \text{Ker}(A - I)$. Alors $AX = X$ et $A^k.X = X$ pour tout k. A la limite, $P.X = X$.

Conclusion : si la suite (A^k) tend vers P, P est un projecteur sur $\text{Ker}(A - I)$ qui commute avec A.

En particulier, si 1 n'est pas valeur propre de A, et si la suite (A^k) converge, alors elle tend vers 0.

2) Cns de convergence. On montrera successivement les résultats suivants :

a) Si A est diagonalisable, la suite (A^k) converge ssi $\text{Sp } A \subset D \cup \{1\}$, où $D = \{ z \,;\, |z| < 1\}$
Si $\text{Sp } A \subset D$, la limite est O. Sinon, la limite est le projecteur sur $\text{Ker}(A - I)$ parallèlement à la somme directe des autres espaces propres.

b) Si $A = J_n(\lambda)$ et $n > 1$, la suite (A^k) converge ssi $|\lambda| < 1$; elle tend vers O.
Si $n = 1$, la suite (A^k) converge ssi $\lambda \in D \cup \{1\}$.

c) Revenons au cas général. Soit $\rho(A) = \max \{ |\lambda| \,;\, \lambda \in \text{Sp } A \}$ le **rayon spectral** de A.

— Si $\rho(A) < 1$, $\lim A^k = 0$;
— Si $\rho(A) > 1$, la suite (A^k) est non bornée, donc divergente.
— Si $\rho(A) = 1$, la suite (A^k) converge ssi 1 est la seule valeur propre de module 1 et les espaces propre et caractéristique associés sont égaux, ou encore ssi 1 est racine simple du polynôme minimal de A.

3) Ergodicité de la matrice A.

a) Si la suite (M_k) converge, sa limite P vérifie (*).

$$M_k.A = A.M_k = \frac{1}{k}(A + A^2 + ... + A^k) = \frac{k+1}{k} M_{k+1} - \frac{1}{k} I .$$

A la limite, $P.A = A.P = P$. Du coup, pour tout k, $P.A^k = P$ donc $P.M_k = P$. A la limite, $P^2 = I$.
Alors $(A - I).P = 0$ implique $\text{Im } P \subset \text{Ker } (A - I)$. Réciproquement, soit $X \in \text{Ker}(A - I)$.
Alors $AX = X$ et $A^k.X = X$ $(\forall k)$, donc $M_k.X = X$ et, à la limite, $P.X = X$.

Conclusion : si la suite (A^k) tend vers P en moyenne ergodique, P est un projecteur sur $\text{Ker}(A - I)$ qui commute avec A.

Bien entendu (A^k) converge $\Rightarrow$ A converge en moyenne ergodique : c'est le théorème de Cesàro.
La récipoque est fausse. Les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ convergent en moyenne ergodique resp. vers $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, mais les deux suites (A^k) et (B^k) divergent.

4) Le lecteur montrera l'équivalence des propriétés :
i) A est ergodique ;
ii) La suite (A^k) est bornée ;

iii) $\rho(A) < 1$ ou $\rho(A) = 1$ et, pour chaque valeur propre λ de module 1 de A, $E_\lambda = F_\lambda$.

Exercice 6 : Matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{C})$.

1) Montrer que les matrices à *n* valeurs propres distinctes forment un ouvert dense de $M_n(\mathbf{C})$.

2) Montrer que les matrices diagonalisables forment un ensemble dense et connexe par arcs de $M_n(\mathbf{C})$, dont l'intérieur est l'ensemble considéré en a). En déduire le théorème d'Hamilton-Cayley.

3) Montrer que les matrices monogènes forment un ouvert connexe par arcs dense de $M_n(\mathbf{C})$.

Solution :

1) Matrices ayant *n* valeurs propres distinctes.

Rappelons que ces matrices sont diagonalisables ; ce sont exactement les matrices diagonalisables et monogènes.

Soit A un élément de $M_n(\mathbf{C})$, trigonalisée sous la forme $P^{-1}.A.P = T$.

Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ la diagonale de T. Si les λ_k sont deux à deux distincts, il n'y a rien à montrer. S'ils comportent des répétitions, il est facile de les « décoller ».

Par exemple (1, 1, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 7) est la limite de la suite

$$\left(1, 1+\frac{1}{k}, 1+\frac{2}{k}, 2, 2+\frac{1}{k}, 2+\frac{2}{k}, 2+\frac{3}{k}, 5, 5+\frac{1}{k}, 7\right).$$

Or 1, 2, 5 et 7 étant isolés les uns des autres, ces réels sont deux à deux distincts pour k assez grand.

Il suffit d'appliqer ce procédé à la diagonale de T sans changer les autres éléments.

Une matrice A a n valeurs propres distinctes ssi son polynôme caractéristique n'a que des racines simples, donc est premier avec sa dérivée, autrement dit si le résultant de $\chi_A(X)$ et de $\chi_A'(X)$ est non nul. Or le résultant est un déterminant de Sylvester, et à ce titre, dépend continûment de A. L'ensemble des matrices considérées est ouvert comme image réciproque de $\mathbf{C}^*$ par une fonction continue.

2) Topologie de l'ensemble $D_n(\mathbf{C})$ des matrices diagonalisables.

Les matrices diagonalisables forment *a fortiori* un ensemble dense

Cet ensemble est connexe par arcs dans $M_n(\mathbf{C})$, comme image continue de $Gl_n(\mathbf{C})\times\mathbf{C}^n$ par

$$(P, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) \to P^{-1} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P.$$

Les matrices ayant *n* valeurs distinctes forment un ensemble ouvert, donc sont intérieures à $D_n(\mathbf{C})$.

Pour conclure, il suffit de montrer qu'une matrice diagonalisable ayant au moins une valeur propre multiple n'est pas intérieure à $D_n(\mathbf{C})$. Il suffit de généraliser l'exemple suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \lim_{k\to+\infty} \begin{bmatrix} 1 & 1/k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Application : le théorème de Hamilton-Cayley est facile à montrer pour les matrices diagonalisables.

Comme l'application $A \to \chi_A(A)$ est continue et nulle sur un ensemble dense, elle est partout nulle.

c) Les matrices monogènes forment un ouvert connexe par arcs dense de $M_n(\mathbf{C})$.

Une matrice A est monogène s'il existe un vecteur x tel que $(x, Ax, A^2 x, \dots, A^{n-1} x)$ soit une base de $\mathbf{C}^n$, autrement dit tel que $\det(x, Ax, A^2 x, \dots, A^{n-1} x) \neq 0$. Or si cette condition est remplie par A, elle est remplie, pour le même vecteur x, par les matrices B suffisamment voisines de A.

Autrement dit, les matrices monogènes forment un ouvert comme *réunion* d'ouverts.

Leur densité découle de a).

Leur connexité par arcs découle de celle de $Gl_n(\mathbf{C})$ et de l'ensemble des matrices-compagnons.

Exercice 7 : Matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$.

1) Soient $n \in \mathbf{N}^*$, P un polynôme unitaire de degré n de $\mathbf{R}[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbf{C} \ \ | P(z) | \geq | \operatorname{Im} z |^n$.

2) Déterminer l'adhérence dans $M_n(\mathbf{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{R})$.

Solution : [Oral Mines 1998, RMS n° 181, Oral Centrale MP 2010, RMS n° 759]

Traitons d'abord le cas $n = 2$; A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est trigonalisable ssi $\Delta(A) = (a - d)^2 + 4bc \geq 0$.

Les matrices trigonalisables forment un fermé comme image réciproque de $\mathbf{R}^+$ par Δ.
L'intérieur de ce fermé est l'ouvert U = {A ; $\Delta(A) > 0$} formé des matrices ayant deux valeurs propres réelles distinctes. Et F est l'adhérence de U. Or U est contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_2(\mathbf{R})$ (lequel contient aussi les matrices scalaires).
Traitons maintenant l'exercice.

1) Supposons P scindé dans $\mathbf{R}[X]$: $P(X) = \prod_{1 \leq k \leq n} (X - \lambda_k)$. Alors pour tout complexe z :

$| P(z) | = \prod_{1 \leq k \leq n} |z - \lambda_k| \geq | \operatorname{Im} z |^n$, car si $z = x + i\,y$, $| z - \lambda_k | = \sqrt{(x-\lambda_k)^2 + y^2} \geq |y|$.

Réciproquement, si $\forall z \in \mathbf{C} \ \ | P(z) | \geq | \operatorname{Im} z |^{\deg P}$, toute racine complexe de P a une partie imaginaire nulle, donc est réelle, et P est scindé sur $\mathbf{R}$.

2) La limite d'une suite convergente de matrices diagonalisables ne l'est pas toujours, comme le montre l'exemple de la suite $A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$.

En revanche, elle est trigonalisable, car la suite (P_k) des polynômes caractéristiques de A_k vérifie $\forall z \in \mathbf{C} \ \ | P_k(z) | \geq | \operatorname{Im} z |^n$, donc à la limite $\forall z \in \mathbf{C} \ \ | P(z) | \geq | \operatorname{Im} z |^n$, où P est le polynôme caractéristique de A. Celui-ci est donc scindé sur $\mathbf{R}$, et A est trigonalisable.

Conclusion : dans $M_n(\mathbf{R})$, les matrices trigonalisables forment un ensemble fermé de $M_n(\mathbf{R})$, et les matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{R})$ en forment une partie dense.

Exercice 8 : Topologie des classes de similitude.

1) Montrer qu'une classe de similitude est toujours incluse dans un hyperplan affine de $M_n(\mathbf{K})$. En déduire qu'elle n'est jamais ouverte, et a un intérieur vide.

2) Montrer qu'une classe de similitude de $M_n(\mathbf{C})$ est toujours connexe par arcs, et qu'une classe de similitude de $M_n(\mathbf{R})$ a au plus deux composantes connexes par arcs.

3) Montrer que $A \in M_n(\mathbf{K})$ est scalaire si et seulement si sa classe de similitude est bornée.

4) Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
i) A est nilpotente ;
ii) La matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de A.

5) Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
i) A est diagonalisable ;
ii) La classe de similitude de A est fermée dans $M_n(\mathbf{K})$.

6) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme à racines simples. Montrer que F = { $A \in M_n(\mathbf{C})$; $P(A) = 0$ } est un fermé ; quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

Solution :

Nous noterons $C_{\mathbf{K}}(A) = \{ P^{-1}.A.P \ ; \ P \in Gl_n(\mathbf{K}) \}$ la classe de similitude de A dans $M_n(\mathbf{K})$.

Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $C_{\mathbf{R}}(A) = C_{\mathbf{C}}(A) \cap M_n(\mathbf{R})$.

1) La classe de similitude de A est incluse dans l'hyperplan affine tr M = tr A de $M_n(\mathbf{K})$.

On en déduit aussitôt qu'elle n'est jamais ouverte, et qu'elle est toujours d'intétieur vide.

2) Une classe de similitude dans $M_n(\mathbf{C})$ est toujours connexe par arcs, car $C_{\mathbf{C}}(A)$ est l'image de $Gl_n(\mathbf{C})$, qui est connexe par arcs, par l'application continue $P \to P^{-1}.A.P$.

Une classe de similitude dans $M_n(\mathbf{R})$ a une ou deux composantes connexes par arcs, puisque $Gl_n(\mathbf{R})$ en a deux (comme papa). On ne peut dire de plus : dans $M_2(\mathbf{R})$, la classe de diag(1, −1) est un **hyperboloïde à une nappe**, celle de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est un **cône épointé** formé de deux nappes, celle de $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est un **hyperboloïde à deux nappes**. Justifions ceci, qui est important :

- La classe de similitude de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est $\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} ; a^2 + bc = 1 \}$;
- La classe de similitude de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est $\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} ; a^2 + bc = 0 , (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \}$;
- La classe de similitude de $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est $\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} ; a^2 + bc = -1 \}$.

Ces trois classes sont incluses dans l'hyperplan des matrices de trace nulle, qui est un espace de dimension trois. Nous voilà ramenés au chapitre sur les quadriques.

3) Montrons que $A \in M_n(\mathbf{K})$ est scalaire si et seulement si sa classe de similitude est bornée.

Si $A = \alpha I$ est scalaire, $C(A) = \{A\}$ est bornée.

Sinon, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbf{K}^n$ telle que l'endomorphisme Φ_A canoniquement associé à A ait pour matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$: il suffit de choisir un vecteur e_1 tel que $(e_1, e_2 = Ae_1)$ soit libre, et de compléter ces vecteurs en une base. Relativement à la base $(e_1, e_2/k, \dots, e_n)$, l'endomorphisme Φ_A aura pour matrice $\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ k & * & * \\ 0 & * & * \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$. Cela montre que la classe C(A) est non bornée.

4) Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Montrons l'équivalence des propriétés suivantes :

i) A est nilpotente ;

ii) La matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de A.

Montrons ii) ⇒ i).

Si O adhère à C(A), il existe une suite (P_k) de matrices inversibles telle que $P_k^{-1}.A.P_k \to O$.

Du coup, le polynôme caractéristique de $P_k^{-1}.A.P_k$ tend vers celui de O.

Donc $\chi_A(X) = (-X)^n$, et en vertu d'Hamilton-Cayley A est nilpotente.

Montrons i) ⇒ ii).

En vertu du théorème de Jordan, A est semblable à $N = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$, où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1}$.

Tout revient à montrer que O adhère à la classe de similitude de N.

Or si l'on pose $P_k = \text{diag}(1, 1/k, 1/k^2, \dots, 1/k^{n-1})$, on voit aussitôt que $P_k^{-1}.N.P_k$ tend vers O.

Remarque : Le recours au théorème de Jordan n'est pas indispensable. On peut se contenter de trigonaliser A ; mais les calculs sont un peu plus compliqués.

5) Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrons l'équivalence des propriétés suivantes :

i) A est diagonalisable ;

ii) La classe de similitude de A est fermée dans $M_n(\mathbf{C})$.

On peut montrer i) $\Rightarrow$ ii) par deux méthodes.

Soit A diagonalisable, Sp A = $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ son spectre, et m_i l'ordre de multiplicité de λ_i. Le polynôme minimal de A est $\mu_A(X) = \prod_{1\le i\le r}(X-\lambda_i)$, son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \prod_{1\le i\le r}(\lambda_i-X)^{m_i}$.

Lemme 1 : Soit $B \in M_n(\mathbf{C})$. B est semblable à A si et seulement si $\mu_A(B) = 0$ et $\chi_B(X) = \chi_A(X)$.

Le lecteur est prié de montrer ce lemme avec grand soin, et de s'assurer de la nécessité de la conjonction des deux conditions.

On voit alors que C(A) est fermé comme intersection de deux fermés :

- Le fermé des matrices B telles que $\mu_A(B) = 0$;
- Le fermé des matrices B telles que $\chi_B(X) = \chi_A(X)$.

Autre méthode : Elle répose sur un lemme déjà montré en 3) :

Lemme 2 : Soit (M_p) une suite de matrices tendant vers M. Si pour tout p, rg $M_p \le r$, alors rg $M \le r$.

Soit alors (B_p) une suite de matrices semblables à A, et tendant vers B.

Alors B_p et B ont même polynôme caractéristique que A.

De plus, pour tout p et tout i, $\dim \operatorname{Ker}(B_p - \lambda_i.I) = m_i$. On en déduit $\dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_i.I) \ge m_i$ pour tout i en vertu du lemme précédent. Comme on a toujours $\dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_i.I) \le m_i$, on a $\dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_i.I) = m_i$ pour tout i, ce qui signifie que B est diagonalisable et semblable à A.

Montrons ii) $\Rightarrow$ i) par contraposition.

Commençons par le cas $n = 2$. Si A n'est pas diagonalisable, A est semblable à $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$.

Or cette matrice est semblable à $\begin{bmatrix}\lambda & 1/k\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, qui tend vers $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, matrice non semblable à A…

Plus généralement, si A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ de A telle que $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \ne \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2$, et une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbf{C}^n$ telle que l'endomorphisme Φ_A ait pour matrice B = $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & L\\ 0 & \lambda & L'\\ O & O & C\end{bmatrix}$ (Le lecteur est prié de justifier ces affirmations).

Or cette matrice est semblable à $\begin{bmatrix}\lambda & 1/k & L/k\\ 0 & \lambda & L'\\ O & O & C\end{bmatrix}$, qui tend vers $\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & L'\\ O & O & C\end{bmatrix}$, matrice non semblable à A.

Remarque : Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ est diagonalisable dans $\mathbf{C}$, sa classe de similitude réelle est la trace sur $M_n(\mathbf{R})$ de sa classe de similitude dans $M_n(\mathbf{C})$. C'est donc un fermé. Par exemple, dans $M_2(\mathbf{R})$:

- si A est scalaire, sa classe de similitude est un singleton. Sinon :
- si A est diagonalisable dans **R**, sa classe de similitude est un hyperboloïde à une nappe. Sinon :
- si A est diagonalisable dans **C**, sa classe de similitude est un hyperboloïde à deux nappes.
- si A est non diagonalisable dans **C**, sa classe de similitude est un cône épointé, donc non fermé.

6) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme à racines simples : $P(X) = \prod_{1\le i\le r}(X-\alpha_i)$.

$F = \{A \in M_n(\mathbf{C}) ; P(A) = 0\}$ est fermé comme image réciproque de O par l'application $M \to P(M)$.

Les éléments de F sont les matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.
Ce fermé est la réunion de C^n_{n+r-1} classes de similitudes, car :

$$C^n_{n+r-1} = \text{card } \{ (k_1, \dots, k_r) \in \mathbf{N}^r \; ; k_1 + \dots + k_r = n \}.$$

Je dis que ces classes sont aussi les composantes connexes par arcs de F.
Tout d'abord, nous avons vu en a) que les classes de similitude sont connexes par arcs.
Il reste à montrer que s'il existe un chemin continu $\Phi : t\in[0, 1] \to \Phi(t)$ joignant A à B dans F, A et B sont semblables.

Soit (L_i) la base de Lagrange de la famille de scalaires $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.

Si $A\in F$, je dis que, pour tout i, $\dim \text{Ker}(A - \alpha_i.I) = \text{rg } L_i(A) = \text{tr } L_i(A)$.

Rappelons que les $L_i(A)$ sont les projecteurs propres. Idem pour B. Comme $\text{tr } L_i(\Phi(t))$ varie continûment, $\dim \text{Ker}(A - \alpha_i.I) = \dim \text{Ker}(B - \alpha_i.I)$ pour tout i, et A et B sont semblables.

Au fond, $L_i(A)$ et $L_i(B)$ appartiennent à la même composante connexe par arcs de l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs, donc ont même rang.

Remarque : L'article de Vidiani cité ci-dessous généralise cela.

<u>Exercice 9</u> : Soient A, B $\in$ $M_n(\mathbf{K})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

<u>Solution</u> : Voilà un résultat fort classique !
<u>1ère preuve : densité topologique</u>. Cela suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Si l'une des deux matrices est inversible, AB et BA sont semblables, donc elles ont même polynôme caractéristique. Par exemple, si A est inversible, $AB = A.(BA).A^{-1}$.

Si A n'est pas inversible, A est limite d'une suite (A_k) de matrices inversibles en raison de la densité de $Gl_n(\mathbf{K})$ dans $M_n(\mathbf{K})$. Alors $(\forall\lambda \in \mathbf{K})$ $\det(A_kB - \lambda I) = \det(BA_k - \lambda I)$.

A la limite $(\forall\lambda \in \mathbf{K})$ $\det(AB - \lambda I) = \det(BA - \lambda I)$. Donc $\det(AB - XI) = \det(BA - XI)$.

NB : Si A et B sont non inversibles, AB et BA ne sont plus nécessairement semblables.

Considérer $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

<u>2ème preuve : densité algébrique</u>.
Le raisonnement précédent suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Dans le cas général, voici comment procéder.
Considérons les matrices **génériques** $A_0 = (\alpha_{ij})$ et $B_0 = (\beta_{ij})$. Il s'agit des matrices carrées dans $M_n(\mathbf{G})$, où $\mathbf{G} = \mathbf{Q}((\alpha_{ij}), (\beta_{ij}))$ est le corps des fractions rationnelles à $2n^2$ indéterminées.
Ces deux matrices sont inversibles, donc elles ont même polynôme caractéristique dans $\mathbf{G}[X]$:

$$\det(A_0B_0 - X.I) = \det(B_0A_0 - X.I) \qquad (*) .$$

Si maintenant $\mathbf{K}$ est un corps commutatif quelconque, et si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont éléments de $M_n(\mathbf{K})$, l'identité $\det(AB - XI) = \det(BA - XI)$ s'obtient en substituant les scalaires a_{ij} et b_{ij} aux indéterminées α_{ij} et β_{ij} dans l'identité (*) .

Il existe des preuves plus élémentaires du résultat demandé. En voici deux :

<u>3ème preuve</u> : Soient Q, P $\in$ $Gl_n(\mathbf{K})$ telles que $Q^{-1}.A.P = J_r = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

On note $P^{-1}.B.Q = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$, avec des formats convenables.

Alors $Q^{-1}.AB.Q = Q^{-1}.A.P.P^{-1}.A.Q = \begin{bmatrix} R & S \\ O & O \end{bmatrix}$, et $P^{-1}.BA.P = P^{-1}.B.Q.Q^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} R & O \\ T & O \end{bmatrix}$.

Alors $\det(AB - X.I) = \det(R - XI).(-X)^{n-r} = \det(BA - XI)$.

NB : Il est remarquable qu'un simple argument d'équivalence matricielle permette de conclure.

4ème preuve, la plus astucieuse :

Elle consiste à vérifier que $\begin{bmatrix} I & O \\ A & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -XI & -B \\ O & AB-XI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BA-XI & -B \\ O & -XI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ A & I \end{bmatrix}$,

et à passer au déterminant !

Remarque : Si l'on suppose A et B *rectangulaires* de formats respectifs n×p et p×n, la 3ème méthode s'applique, et donne $\det(AB - X.I) = (-X)^{n-p}.\det(BA - XI)$.

Exercice 10 : Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. Montrer que, pour $\lambda \in \mathbf{C}$ assez petit :

$$\det(I + \lambda A) = \exp \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \lambda^k tr(A^k) \Big) .$$

Solution : [Oral X 1983, RMS n° 86, Centrale MP 2011, RMS n° 876]

Exercice 11 : **théorème de Hamilton-Cayley.**

On munit $\mathbf{C}^n$ d'une norme, et $M_n(\mathbf{C}) = \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ de la norme subordonnée.

1) Montrer que $||| M ||| < 1 \Rightarrow I - M \in Gl_n(\mathbf{C})$ et $(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k$.

2) Montrer que pour tout r > ||| A ||| et tout entier $k \geq 1$, $A^{k-1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{it})^k.(re^{it}.I-A)^{-1}.dt$

3) Retrouver le théorème de Hamilton-Cayley.

Solution : [Oral ENS 2005, RMS n° 47, Oral Mines 2008, RMS n° 465. [1]]

1) Tout d'abord, l'hypothèse implique que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} M^k$ est absolument convergente.

Il reste à faire tendre N vers +∞ dans $I - M^{N+1} = (I - M).(\sum_{k=0}^{N} M^k) = (\sum_{k=0}^{N} M^k).(I - M)$.

2) Partons du second membre :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{it})^k.(re^{it}.I-A)^{-1}.dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{it})^{k-1}.(I-r^{-1}e^{-it}A)^{-1}.dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (re^{it})^{k-1}.\sum_{p=0}^{+\infty} r^{-p}e^{-ipt}A^p.dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} r^{k-1+p}A^p \int_0^{2\pi} e^{i(k-1-p)t}.dt = \sum_{p=0}^{+\infty} r^{k-1+p}A^p\, \delta_{k-1,p} = A^{k-1} .$$

Justification par convergence normale de la série de fonctions de t.

3) Soit $\chi_A(X) = \det(A - X.I) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tau_{n-k}(A) X^k$ le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tau_{n-k}(A).A^k = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tau_{n-k}(A) \int_0^{2\pi} (re^{it})^{k+1}.(re^{it}.I-A)^{-1}.dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tau_{n-k}(A)(re^{it})^{k+1}.(re^{it}.I-A)^{-1}.dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_A(re^{it}).re^{it}.(re^{it}.I-A)^{-1}.dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {}^t com(re^{it}.I-A).re^{it}.dt .$$

Or tous les éléments de cette matrice sont combinaisons linéaires de termes de la forme $\int_0^{2\pi} e^{iht}.dt$, où $h \geq 1$, donc ils sont nuls. CQFD !

[1] Il est facile de fabriquer un exercice d'oral Mines ou de Centrale : il suffit de le piocher parmi les exercices d'ENS des années précédentes. De proche en proche, il se retrouvera parmi les exercices de CCP… Où l'on voit la paresse favoriser l'ascension darwinienne…

Exercice 12 : 1) Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $n \geq 2$. Existe-t-il une norme sur $M_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$\forall A \in M_n(\mathbf{K}) \quad \forall P \in Gl_n(\mathbf{K}) \quad \| P^{-1}.A.P \| = \| A \| \ ?$$

2) Déterminer toutes les semi-normes N sur $M_n(\mathbf{R})$ vérifiant :

$$\forall A \in M_n(\mathbf{R}) \quad \forall P \in Gl_n(\mathbf{R}) \quad N(P^{-1}.A.P) = N(A) .$$

Solution : 1) On aurait $\forall A \in M_n(\mathbf{K}) \quad \forall P \in Gl_n(\mathbf{K}) \quad \| A.P \| = \| P.A \|$.
Par densité de $Gl_n(\mathbf{K})$ dans $M_n(\mathbf{K})$ on en déduirait $\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2 \quad \| A.B \| = \| B.A \|$.
Or il est facile de trouver deux matrices A et B telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
Par exemple $A = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, O_{n-2}\right)$ et $B = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, O_{n-2}\right)$.

2) Autre solution : si une telle norme existait, toute classe de similitude de $M_n(\mathbf{K})$ serait bornée pour la norme $\| . \|$, donc pour toute norme, par équivalence des normes.
Or la classe de similitude de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ contient les matrices $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Remarques :

a) En revanche, il existe une norme sur $M_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall A \in M_n(\mathbf{R}) \quad \forall P \in O_n(\mathbf{R}) \quad \| P^{-1}.A.P \| = \| A \| .$$

Il s'agit de la norme de Frobenius $\| A \| = \sqrt{tr({}^tA.A)}$, car

$\| P^{-1}.A.P \|^2 = tr\,({}^tP\, {}^tA\, P\, P^{-1}\, A\, P) = tr\,({}^tP\, {}^tA.A\, P) = tr\,(P.{}^tP\, {}^tAA) = tr\,({}^tAA) = \|A\|^2$.

b) De même, il existe une norme sur $M_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$\forall A \in M_n(\mathbf{C}) \quad \forall P \in U_n(\mathbf{C}) \quad \| P^{-1}.A.P \| = \| A \| .$$

Il s'agit de la norme de Frobenius $\| A \| = \sqrt{tr(A^*.A)}$.

3) Cherchons maintenant les *semi-normes* N sur $M_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall A \in M_n(\mathbf{R}) \quad \forall P \in Gl_n(\mathbf{R}) \quad N(P^{-1}.A.P) = N(A) .$$

• Notons tout d'abord qu'une semi-norme sur un **R**-espace de dimension finie est toujours continue, car elle vérifie $| N(x) - N(y) | \leq N(x - y) \leq A \| x - y \|$,
où $\| . \|$ est la norme « indice 1 » relative à une base quelconque $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, et $A = \max N(e_i)$.
Cette remarque permet d'établir comme en 1) que :

$$\forall A \in M_n(\mathbf{R}) \quad \forall P \in Gl_n(\mathbf{R}) \quad N(A.P) = N(P.A) .$$

• Il est facile d'établir que l'ensemble $V = \{ A \ ; N(A) = 0 \}$ est un sev de $M_n(\mathbf{R})$.
Soit (E_{ij}) la base canonique de $M_n(\mathbf{R})$.
Soient $i \neq j$; $E_{ij} = E_{ij}.E_{jj}$ et $0 = E_{jj}.E_{ii}$ ont même semi-norme, donc $E_{ij} \in V$.
V contient les matrices de diagonale nulle et toutes les matrices qui leur sont semblables : V contient donc l'hyperplan des matrices de trace nulle.

• Soient alors $A \in M_n(\mathbf{R})$, et $\alpha = N(E_{11})$. Ecrivons $A = A - tr(A).E_{11} + tr(A).E_{11}$. Il vient :

$$| N(A) - N(tr(A).E_{11}) | \leq N(A - tr(A).E_{11}) = 0 \ , \text{ donc } N(A) = \alpha.| tr(A) |.$$

Réciproquement toutes les $A \to \alpha.| tr\, A |$ $(\alpha \geq 0)$ conviennent.

Exercice 13 : Soit $f : M \in M_n(\mathbf{R}) \to f(M) = (tr\, M, tr\, M^2, \dots, tr\, M^n) \in \mathbf{R}^n$.

1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(M)(H)$ pour toutes M et H.

2) Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que le rang de $df(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.

3 Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.

Solution : [Oral ? 2005, RMS n° 228]

1) L'application f est différentiable, et même C^∞, car polynomiale.

$$\operatorname{tr}(M + H)^k = \operatorname{tr} M^k + \sum_{i=0}^{k-1} tr(M^i.H.M^{k-1-i}) + O(\|H\|^k) = \operatorname{tr} M^k + \sum_{i=0}^{k-1} tr(M^{k-1}.H) + O(\|H\|^k)$$

$$= \operatorname{tr} M^k + k.\operatorname{tr}(M^{k-1}.H) + O(\|H\|^k) \quad , \quad \text{en vertu de la formule } \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Par conséquent, $d f(M)(H) = (\operatorname{tr} H, 2.\operatorname{tr}(M.H), \dots, n.\operatorname{tr}(M^{n-1}.H))$.

2) Identifions $M_n(\mathbf{R})$ et son dual via la forme bilinéaire non dégénérée $\Phi(A , B) = \operatorname{tr}(A.B)$.

Le rang de $df(M)$ est égal au rang de $(I, 2.M, \dots, n.M^{n-1})$, c'est-à-dire au degré du polynôme minimal de M.

3) En vertu d'Hamilton-Cayley, le polynôme minimal est égal au caractérsitique ss'il est de degré n. Cela équivaut donc à rg $df(M) = n$. Or comme df est continue, il existe un voisinage de M sur lequel rg $df \geq n$. Cela découle d'une propriété « bien connue » du rang [2].

Références :

R. Mneimné : Réduction des endomorphismes (Calvage et Mounet, 2005)

L. G. Vidiani : Composantes connexes de { A ; P(A) = 0 } dans $M_n(\mathbf{C})$ (RMS octobre 1985)

Oral Mines 1987, X 1988, Centrale 2009, Centrale 2011, etc.

ENSAE 1991, 2ème composition de maths

Résultat complémentaire : RMS mai 2005, p. 178.

---

10. Réduction simultanée.

Exercice 1 : Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie. Pour que la famille $\mathcal{Q} = (u_i)_{i\in I}$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que chacun des u_i soit diagonalisable, et que les u_i commutent deux à deux.

Solution : • La condition est nécessaire, car les matrices diagonales commutent.

• Montrons la condition suffisante par récurrence sur la dimension n de E.

Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer.

Supposons le théorème vrai pour dim E < n. Si dim E = n, deux cas se présentent :

– Tous les u_i sont des homothéties. Toute base de E diagonalise la famille.

– Il existe un u_i qui n'est pas une homothétie. Notons $E_1, E_2, \dots, E_r$ ses espaces propres.

$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$. Chacun de ces espaces est stable par $(u_j)_{j\in I}$ et $(u_j|_{Ei})_{j\in I}$ est une famille commutante d'endomorphismes diagonalisables, en vertu du lemme suivant :

Lemme : Soit u un endomorphisme diagonalisable. Si F est un sous-espace u-stable, l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

<u>Preuve</u> : u annule un polynôme scindé sans carré ; ce polynôme annule aussi u_F …

Revenons au théorème. Par hypothèse de récurrence appliquée à chacun des couples $(E_j, (u_j|_{Ei})_{j\in I})$,

[2] Une propriété est dite « bien connue » si elle est connue de ceux qui la connaissent. En général, moins ces personnes sont nombreuses, plus elles s'indignent de se voir entourées de tant d'ignorants. Examinateur de concours n'est pas un métier à risque...

$1 \leq i \leq r$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_i qui diagonalise $(u_j|_{E_i})_{j\in I}$. La base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ diagonalise la famille $(u_j)_{j\in I}$. cqfd.

Remarque : On peut aussi raisonner par récurrence sur $r = \text{rg } \mathcal{A}$.

Exercice 2 : On suppose **K** de caractéristique ≠ 2, soit E un **K**-ev de dimension *n*.

1) Soit $(s_1, ..., s_N)$ une famille commutante de symétries vectorielles de E, deux à deux distinctes. Montrer que $N \leq 2^n$.

2) En déduire que les groupes $Gl_n(\mathbf{K})$ et $Gl_m(\mathbf{K})$ sont isomorphes ssi $n = m$.

3) Soit G un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{K})$ formé d'endomorphismes involutifs.
Montrer que G est commutatif, fini et de cardinal $\leq 2^n$.

Solution : [Oral Centrale 2000, RMS n° 257]
1) $(s_1, ..., s_N)$ est une famille commutante d'endomorphismes diagonalisables. Ces symétries sont simultanément diagonalisables. Leurs matrices dans cette base sont de la forme $(\pm1, \pm1, \dots, \pm1)$. Il y en a au plus 2^n.
2) Supposons qu'il existe un isomorphisme de groupes $\phi : Gl_n(\mathbf{K}) \to Gl_m(\mathbf{K})$.
On connaît un système de 2^n symétries commutantes dans $Gl_n(\mathbf{K})$.
Leurs images par ϕ sont 2^n symétries commutantes dans $Gl_m(\mathbf{K})$.
En vertu de 1), $2^n \leq 2^m$, donc $n \leq m$. On conclut par échange de *n* et *m*.
3) G est commutatif car $\forall (g, h) \in G\times G \;\; g.h = (g.h)^{-1} = h^{-1}.g^{-1} = h.g$. Nous voilà ramenés à 1)

Remarque : pour un complément masturbatoire, cf. Oral Mines MP 2010, n° 437.

Exercice 3 : Soit u un endomorphisme de E. Trouver une cns pour que u soit la somme de deux projecteurs (resp. de deux symétries) qui commutent.

Solution :
Pour que u soit la somme de deux projecteurs (resp. deux symétries) qui commutent, il faut et il suffit que u soit diagonalisable et $\text{Sp } u \subset \{ 0, 1, 2 \}$, (resp. $\{ 2, 0, -2 \}$).

Exercice 4 : Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ *n* matrices nilpotentes de $M_n(\mathbf{C})$, qui commutent deux à deux. Montrer que $A_1.A_2 \dots A_n = 0$.

Solution :
1ère méthode : Notons A_k l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement attaché à la matrice A_k.
Soient $F_0 = \mathbf{C}^n$, $F_1 = \text{Im } A_1$ et $F_k = \text{Im}(A_1.A_2. \dots A_k) = A_k(F_{k-1})$ pour $1 \leq k \leq n$.
En vertu de la commutation des A_k, chaque espace F_{k-1} est A_k-stable, et A_k y induit un endomorphisme nilpotent. (F_k) est une suite décroissante pour l'inclusion de sev de $\mathbf{C}^n$.
Or un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ n'est jamais surjectif. Du coup $\dim F_k < \dim F_{k-1}$ sauf si $\dim F_{k-1} = 0$. Dans tous les cas, $F_n = \{0\}$. Cqfd.

2ème méthode : Les matrices A_k sont nilpotentes, et commutent deux à deux, donc (théorème) elles sont simultanément trigonalisables : $\exists P \in Gl_n(\mathbf{C}) \;\; P^{-1} A^k P = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T_k$.

Or il est clair que $T_1.T_2 \dots T_n = 0$.

Exercice 5 : Soient A et B $\in M_n(\mathbf{C})$ telles que AB = 0. Montrer que A et B trigonalisent dans une même base.

Solution : Notons u et v les endomorphismes de E = $\mathbf{C}^n$ de matrices resp. A et B.

1) Montrons d'abord que u et v ont un vecteur propre commun.
Si v = 0, tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de v.

Sinon, Im v est un sev $\neq \{0\}$ et v-stable. L'endomorphisme induit $v_{\text{Im } v}$ admet un vecteur propre x. x est vecteur propre de v, et aussi de u car Im v $\subset$ Ker u.

2) Pour conclure, raisonnons par récurrence sur n.
Pour n = 1, il n'y a rien à montrer.
Supposons le résultat vrai en dimension $n - 1$, et passons en dimension n.
Soit e_1 un vecteur propre commun à u et v. Complétons e_1 en une base (e_1, e'_2, …, e'_n) de E.
Dans cette base, les matrices de u et v s'écrivent resp. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & C \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \mu_1 & * \\ 0 & D \end{bmatrix}$, où C et D sont les matrices resp. de u'= $(p \circ u)_F$ et v' = $(p \circ v)_F$, p étant le projecteur sur l'hyperplan F = Vect(e'_2, …, e'_n) parallèlement à $\mathbf{K}e_1$. On a CD = 0, donc u' o v' = 0.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base (e_2, …, e_n) de F trigonalisant simultanément u' et v'.
Par suite, la base (e_1, e_2, …, e_n) trigonalise simultanément u et v.

Exercice 6 : Soient A, B, C $\in M_n(\mathbf{C})$ telles que AB – BA = C , AC = CA , BC = CB.
Montrer que A, B et C ont un vecteur propre commun et trigonalisent dans une même base.

Solution : Confondons matrices et endomorphismes.
1) Existence d'un vecteur propre commun.
Soient λ une valeur propre de C, F = Ker(C – λI) l'espace propre associé.
Par commutation, F est stable par A et B.
Notant $\tilde{A} = A_F$, $\tilde{B} = B_F$ et $\tilde{C} = C_F = \lambda.\text{Id}_F$, on a $\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = \lambda.\text{Id}_F$.
Un argument de trace montre que λ = 0. Ceci montre au passage que C est nilpotente.
F = Ker C. Tout sous-espace propre de $\tilde{A}$ est $\tilde{B}$-stable. $\tilde{B}$ possède dans ce sous-espace un vecteur propre x, qui est vecteur propre commun de A, B et C.

2) Trigonalisation simultanée.
Une récurrence sur la dimension conclut, comme dans l'exercice précédent.

Remarque : L = Vect(A, B, C) est une sous-algèbre de Lie résoluble de $M_n(\mathbf{C})$, car

$$\forall (X, Y) \in L^2 \quad [X, Y] = XY - YX \in \mathbf{C}.C \subset L.$$

Le théorème de trigonalisation de Lie s'applique (cf. mes problèmes d'algèbre linéaire).

Exercice 7 : Soient A et B dans $M_n(\mathbf{C})$ telles que rg(AB – BA) $\leq$ 1.
Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Solution : [Oral ENS 1998, RMS n° 299, solution Barani.]
Le cas rg(AB – BA) = 0, c'est-à-dire AB = BA, a été traité dans un exercice antérieur.

Lemme : Ker A ou Im A est stable par B.

En effet, comme Im(AB – BA) est une droite, on a l'alternative :

$$\text{Im}(AB - BA) \subset \text{Im } A \quad \text{ou} \quad \text{Im}(AB - BA) \cap \text{Im } A = \{0\}.$$

- Si Im(AB – BA) $\subset$ Im A, alors Im(BA) $\subset$ Im A, donc B(Im A) $\subset$ Im A.
- Sinon, pour tout x $\in$ Ker A, on a :

$$AB.x = (AB - BA).x \in \text{Im}(AB - BA) \cap \text{Im } A = \{0\} \text{ , donc } Bx \in \text{Ker } A.$$

On déduit de ce lemme, pour $n \geq 2$, qu'il existe un sous-espace vectoriel non trivial stable à la fois par A et par B. En effet, si A est une homothétie, toute droite engendrée par un vecteur propre de B convient. Sinon, soit λ une valeur propre de A. En appliquant le lemme précédent au couple $(A - \lambda I, B)$, on voit que $\text{Ker}(A - \lambda I)$ ou $\text{Im}(A - \lambda I)$ convient.

Concluons par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer.

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai dans $M_p(\mathbf{C})$ pour tout $1 \leq p < n$, et montrons-le dans $M_n(\mathbf{C})$.
Soit F un sous-espace non trivial de Cn stable à la fois par A et B. Complétons une base de F en une base de $\mathbf{C}^n$, et soit P la matrice ainsi formée.

Nous avons $P^{-1}.A.P = A' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{bmatrix}$ et $P^{-1}.B.P = B' = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ O & B_3 \end{bmatrix}$.

$\text{rg}(AB - BA) = \text{rg}(A'.B' - B'.A') \leq 1$ implique $\text{rg}(A_1.B_1 - B_1.A_1) \leq 1$ et $\text{rg}(A_3.B_3 - B_3.A_3) \leq 1$.

Par hypothèse de récurrence, A_1 et B_1 sont co-trigonalisables, ainsi que A_3 et B_3. ON conclut à l'aide d'une matrice de passage diagonale par blocs, que A' et B' sont co-trigonalisables.

11. *Dimension infinie.*

La théorie spectrale peut s'étendre à la dimension infinie. Il faut alors bien distinguer les notions de valeur propre et de valeur spectrale (cf. ex. 3 ci-dessous). On peut définir des endomorphismes algébriques ou ponctuellement algébriques, et Chambadal et Ovaert[3] (Algèbre, 2) définissent les endomorphismes diagonalisables en dimension infinie. Mais si l'on reste dans un cadre purement algébrique, on ne peut aller très loin. Pour cela, il faut se placer dans le cadre des espaces normés, mais alors on sort du domaine de l'algèbre. Les exercices suivants effleurent ces sujets.

Exercice 1 : Montrer que $f : P \to (X^3 + X).P' - (3X^2 - 1).P$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
En déterminer les éléments propres.

Solution : [Oral TPE 2011, RMS n° 1143]
Il est clair que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
Pour tout n, $f(X^n) = (n - 3).X^{n+2} + (n + 1).X^n$.

Relativement à la base canonique, f a pour « matrice infinie » : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & & & & \\ -3 & 0 & 3 & 0 & & & \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & & \\ & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 & \ldots \\ & & 0 & 0 & 0 & 6 & \ldots \\ & & & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ & & & & 0 & 2 & \ldots \end{bmatrix}$.

De plus, si $\deg P \neq 3$, $\deg f(P) = \deg f + 2$.
Par conséquent, si P est un vecteur propre de f, $\deg P = 3$.
Cherchons P sous la forme $P = a + b.X + c.X^2 + X^3$. Alors $f(P) = \lambda P$ s'écrit :

$$a + 2b.X + (3c - 3a).X^2 + (4 - 2b).X^3 - c.X^4 = \lambda\,(a + b.X + c.X^2 + X^3).$$

Cela équivaut à : $a = \lambda a$, $2b = \lambda b$, $-3a = 0$, $c = 0$, $4 - 2b = \lambda$.
$\lambda \neq 2$ implique $b = 0$, $\lambda = 4$, et $P = X^3$.
$\lambda = 2$ implique $b = 1$, et $P = X + X^3$.

Conclusion : f admet deux valeurs propres, 2, et 4.
$\text{Ker}(f - 4.\text{Id}) = \mathbf{R}.X^3$ et $\text{Ker}(f - 2.\text{Id}) = \mathbf{R}.(X + X^3)$.

[3] On dit « Chambadal-Ovaert » comme on dit « Castor et Pollux », « Roux-Combaluzier », « Jacob-Delafond », etc.

Remarque : quelles sont les valeurs spectrales de f ? Autrement dit, pour quelles valeurs de λ, $f - \lambda.\mathrm{Id}$ est-il non bijectif ?

Exercice 2 : Soit E un **K**-espace vectoriel. Un endomorphisme f de E est dit ponctuellement nilpotent si $\forall x \in E \ \ \exists n \geq 1 \ \ f^n(x) = 0$.
1) Montrer que, si E est de dimension finie, ponctuellement nilpotent $\Leftrightarrow$ nilpotent.
2) Exemples d'endomorphismes ponctuellement nilpotents de $\mathbf{C}[X]$.
3) Montrer que si f est ponctuellement nilpotent, il existe un endomorphisme g tel que $g^2 = \mathrm{id}_E + f$.
4) Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et f est ponctuellement nilpotent, montrer que f et $\exp f - \mathrm{Id}_E$ ont même image et même noyau. Cas où $E = \mathbf{K}[X]$ et $f = D$?

Solution : 1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; pour chaque i choisissons k(i) tel que $f^{k(i)}(x) = 0$. Alors $f^m = 0$, où $m = \max \{ k(1), \dots, k(n) \}$.
2) Dans $\mathbf{C}[X]$, l'opérateur D de dérivation, l'opérateur $\Delta : P \to P(X + 1) - P(X)$ des différences finies sont ponctuellement nilpotents, mais non nilpotents, puisque $\mathrm{Ker}\, D^n = \mathrm{Ker}\, \Delta^n = \mathbf{C}_{n-1}[X]$.
Plus généralement tout opérateur qui abaisse strictement le degré des polynômes non constants est ponctuellement nilpotent.
3) Notons $\mathbf{K}[[X]]$ l'algèbre des séries entière formelles à coefficients dans **K**. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est ponctuellement nilpotent, et si $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est une série formelle, on peut donner un sens à $A(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^n$: c'est l'endomorphisme de E qui au vecteur x associe le vecteur $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^n(x)$, somme à support fini.
L'application $A \to A(f)$ est alors un morphisme d'algèbres de $\mathbf{K}[[X]]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui prolonge le morphisme de substitution $P \to P(f)$. On peut donc substituer f à X dans l'identité :

$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2} X - \frac{1}{8} X^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} X^n + \dots$$

et dire que l'endomorphisme $g = \mathrm{id}_E + \frac{1}{2} f - \frac{1}{8} f^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} f^n + \dots$

a pour carré $\mathrm{id}_E + f$.

Exercice 3 : **valeurs propres et valeurs spectrales.**
Soient E un **K**-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$; le scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est dit **valeur régulière** de u si $u - \lambda.I$ est inversible, **valeur spectrale** sinon. L'ensemble des valeurs spectrales de u est appelé **spectre** de u.
1) Montrer que toute valeur propre de u est valeur spectrale. La réciproque est fausse en général, mais vraie en dimension finie.
2) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles. Trouver les valeurs propres et les valeurs spectrales des opérateurs suivants :
— l'opérateur de shift T : $u = (u_n) \to v = (v_n)$ où $v_n = u_{n+1}$;
— l'opérateur S : $u = (u_n) \to (0, u_0, u_1, u_2, \dots)$;
— l'opérateur M : $u = (u_n) \to (\lambda_n.u_n)$;
— l'opérateur de Cesàro C : $u = (u_n) \to v = (v_n)$ où $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n)$.
3) Mêmes questions pour $E = \mathbf{R}[X]$ et les opérateurs : $D : P \to P'$ et $M : P \to X.P$.
4) Mêmes questions pour $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et les opérateurs $D : f \to f'$ et $f \to x.f(x)$.

Solution :
1) Si E est de dimension finie et si f est un endomorphisme de E, on sait que f bijectif $\Leftrightarrow$ f injectif.

Valeurs spectrales et valeurs propres sont les mêmes.
Si E est de dimension infinie, il existe un endomorphisme injectif et non surjectif : il suffit de considérer une base $(e_i)_{i\in I}$, où I est muni d'un bon ordre, et de considérer l'endomorphisme f tel que $f(e_i) = e_{i+1}$, i+1 désignant le successeur de i : 0 est valeur spectrale de f, mais non valeur propre.
La distinction entre ces deux notions n'a d'intérêt qu'en dimension infinie, mais elle toute sa pertinence dans le cadre des espaces normés. On se limite ici aux seuls aspects linéaires.

2) Opérateurs dans l'espace $E = \mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ des suites réelles.

— L'opérateur de shift T : $u = (u_n) \to v = (v_n)$ où $v_n = u_{n+1}$. Il est surjectif, mais non injectif.
Tout réel λ est valeur propre : la suite $(u_n) = (\lambda^n)$ est non nulle et vérifie $T(u) = \lambda u$.
Si $\lambda = 0$, il s'agit de la suite (1, 0, 0, …). Ici,valeurs propres et spectrales coincident.

— L'opérateur S : $u = (u_n) \to (0 , u_0 , u_1 , u_2 , ...)$. Il est injectif, mais non surjectif.
S est sans valeur propre, car $S(u) = \lambda u$, implique $u = 0$, que λ soit nul ou non.
0 est valeur spectrale, car S est non surjectif.
C'est d'ailleurs la seule, car si $\lambda \neq 0$, $S - \lambda I$ est inversible : $(S - \lambda I).u = v$ s'écrit :
$-\lambda.u_0 = v_0$, $u_0 - \lambda.u_1 = v_1$, $u_1 - \lambda.u_2 = v_2$, … , système linéaire infini qui s'inverse.

— L'opérateur M : $u = (u_n) \to (\lambda_n.u_n)$;

— L'opérateur de Cesàro C est étudié dans l'exercice suivant.

3) Opérateurs dans l'espace $E = \mathbf{R}[X]$ des polynômes.

— L'opérateur D : $P \to P'$ est surjectif mais non injectif.
D n'a qu'une valeur propre, 0, et c'est aussi la seule valeur spectrale.

— L'opérateur M : $P \to X.P$ est injectif mais non surjectif.

4) Opérateurs dans $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

— L'opérateur D : $f \to f'$ a pour valeurs propres tous les complexes λ, car $x \to \exp(\lambda x)$ est vecteur propre associé. Du coup, valeurs propres et spectrales coincident. On sait du reste que l'équation différentielle $f' - \lambda f = g$ se résout.

— L'opérateur $f \to x.f'(x)$.

Exercice 4 : l'opérateur de Cesàro. Soit E l'espace vectoriel des suites complexes $(u_n)_{n\geq 1}$, T l'opérateur de Cesàro : $u = (u_n) \to v = (v_n)$ où $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + ... + u_n)$.

a) Trouver les valeurs et les vecteurs propres de T.
b) Pour tout complexe λ, déterminer $\text{Ker}(T - \lambda I)^2$.
c) Trouver tous les sous-espaces de dimension finie de E stables par T. [ENS 2008]

Solution :
0) Heuristiquement, bien qu'il n'y ait pas à proprement parler de théorie des matrices infinies, on peut considérer que $v = P.u$, où $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 1/2 & 1/2 & 0 & ... \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$, matrice triangulaire inférieure.
Cette matrice est cramérienne, de valeurs propres 1, 1/2, 1/3, … et ces valeurs propres sont simples. On peut donc dire que P est diagonalisable. Mais tout cela est de la poésie…
1) Ici, valeurs propres et spectrales coincident : ce sont les $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
En effet, si λ est une valeur propre de l'opérateur T, et si u est un vecteur propre associé, soit n le plus petit entier tel que $u_n \neq 0$. Alors $\frac{1}{n}(u_1 + ... + u_n) = \frac{u_n}{n} = \lambda.u_n$ implique $\lambda = \frac{1}{n}$.
Si $\lambda = 1$, $T(u) = u$ ssi u est constante : cela se montre par récurrence.

Plus généralement, si $\lambda = \frac{1}{n}$ et T(u) = λu, alors il vient

$u_1 = \ldots = u_{n-1} = 0$, et par récurrence $u_{n+k} = u_n C_{n+k-1}^{n}$ pour k > 0 : on obtient une droite propre.

Enfin, si $\lambda \notin \{\frac{1}{n}\}$, T – λ.I est bijectif, car (T – λ.I)(u) = v s'inverse en :

$$u_1 = \frac{v_1}{1-\lambda} \quad , \quad u_n = \frac{nv_n-(n-1)v_{n-1}}{1+\lambda(1-2n)} \ \ (n \geq 2) .$$

<u>Revenons sur la résolution de</u> T(u) = $\frac{1}{n}$ u.

On peut éviter toute récurrence par recours aux séries entières formelles.
Soit E le sous-espace de **C**[[X]] formé des séries de valuation non nulle.

Notons $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n X^n$ et $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n X^n$ les séries formelles associées aux suites u et v = T(u).

L'application Φ : U $\to$ V est linéaire ; c'est un automorphisme de E, transmué de T.

De plus $X.V' = \sum_{n=1}^{+\infty}(u_1+\ldots+u_n).X^n = \frac{U}{1-X}$, donc $V' = \frac{U}{X(1-X)}$.

Notons $J : A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \to B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} X^n$ l'application de primitivation de **C**[[X]] dans E.

Alors $\forall U \in E \quad \Phi(U) = J\left(\frac{U}{X(1-X)}\right)$.

Cette formule est importante, car elle traduit l'opérateur de Cesàro en termes de séries formelles.

T(u) = $\frac{1}{n}$ u se traduit par $\Phi(U) = \frac{1}{n} U$, donc $\frac{1}{n} U' = \frac{U}{X(1-X)}$.

Cette équation différentielle linéaire s'intègre formellement en $\frac{U'}{U} = n\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{1-X}\right)$.

D'où, les propriétés de la dérivée logarithmique et le binôme aidant, il vient :

$$U = K\frac{X^n}{(1-X)^n} = K X^n \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}.(-X)^k = K X^n \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}.X^k .$$

Et on trouve élégamment la droite propre $u = (u_m) = K\,(C_{m-1}^{n-1})_m$.

2) Je dis que, pour tout λ, Ker(T – λI)^2 = Ker(T – λI) . C'est immédiat si $\lambda \notin \{\frac{1}{n}\}$.

Si λ = 1, u $\in$ Ker(T – I)^2 $\Leftrightarrow$ T(u) – u est constante.
Comme (T(u) – u)$_1$ = 0 , u $\in$ Ker(T – I)^2 $\Leftrightarrow$ T(u) – u est nulle $\Leftrightarrow$ u est constante .

Reste à montrer que, pour tout $n \geq 1$, Ker(T – $\frac{1}{n}$ I)^2 = Ker(T – $\frac{1}{n}$ I).

<u>Je vois deux méthodes pour montrer ceci</u> :

- Il suffit de montrer que dim Ker(T – $\frac{1}{n}$ I)^2 = 1.

Or le système linéaire infini (T – $\frac{1}{n}$ I)^2 u = 0 se traduit, par troncature, en

$$(\forall N > n) \quad \left(P_N - \frac{1}{n} I\right)^2 X_N = 0 \text{ , en notant } P_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{N} & \ldots & \ldots & \frac{1}{N} \end{bmatrix} \text{, et } X_N = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

Comme P_N est diagonalisable à valeurs propres simples, espaces propres et caractéristiques coincident, donc Ker (P_N – $\frac{1}{n}$ I)^2 = Ker (P_N – $\frac{1}{n}$ I) = { K (C_{m-1}^{n-1})$_{1 \leq m \leq N}$; K $\in$ **C** }.

Il reste à observer que N est aussi grand qu'on veut.

• Passer par les séries formelles, et montrer que $\text{Ker}(\,\Phi - \frac{1}{n}I\,)^2 = \text{Ker}(\,\Phi - \frac{1}{n}I\,)$.

Pour cela, il faut résoudre $\Phi(U) - \frac{1}{n}U = K\frac{X^n}{(1-X)^n}$.

En dérivant, on se ramène à l'équation différentielle linéaire $\frac{U}{X(1-X)} - \frac{1}{n}U' = K.D\left(\frac{X^n}{(1-X)^n}\right)$.

qui n'admet pas d'autres séries formelles solutions que les $K\frac{X^n}{(1-X)^n}$. (Exercice)

3) Soit alors F un sous-espace de E, de dimension finie *n*, et T-stable.
T induit un endomorphisme u de F, de polynôme minimal P.
Ce polynôme minimal est scindé $P(X) = \prod_{1\le i\le r}(X-\lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont les valeurs propres de u, donc sont des valeurs propres de T : $\lambda_i = \frac{1}{n_i}$. En vertu du théorème des noyaux,

$F = \text{Ker } P(u) = \oplus\ \text{Ker}(u - \lambda_i.I)^{m_i} \subset \oplus\ \text{Ker}(T - \lambda_i.I)^{m_i} = \oplus\ \text{Ker}(T - \lambda_i.I) = \oplus\ \text{Ker}(T - \frac{1}{n_i}I)$.

Ainsi, les seuls sous-espaces T-stables de dimension finie de E sont engendrés par une sous-famille finie des suites $c^n = (\,C_{m-1}^{n-1})_m$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

<u>Exercice 5</u> : Soit E = C($\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}$), et T l'opérateur qui à $f \in$ E associe F définie par :

$$F(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t).dt\,.$$

1) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ? Quelle est son image ?
2) Valeurs propres et vecteurs propres de T ?
3) La restriction de T à $\mathbf{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?

<u>Solution</u> :

1) La fonction F est continue et même C^1 sur $\mathbf{R}^*_+$, et continue en 0 en vertu du théorème de Newton-Leibniz, puisque $F(x) = \frac{G(x)-G(0)}{x-0} \to G'(0) = F(0)$ quand $x \to 0$, si $G(x) = \int_0^x f(t).dt$.
T est évidemment linéaire.
Pour tout $x > 0$, $F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t).dt + \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x}F(x) + \frac{1}{x}f(x)$ (*)
Donc si F est nulle, f est nulle sur $\mathbf{R}^*_+$, et par continuité, sur $\mathbf{R}_+$. Ainsi, T est injective.
T n'est pas surjectif, car Im T $\subset$ { g $\in$ C($\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}$) ; g est C^1 sur $\mathbf{R}^*_+$ et $\lim_{x\to 0+} x.g'(x) = 0$ }.
On a même Im T = { g $\in$ C($\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}$) ; g est C^1 sur $\mathbf{R}^*_+$ et $\lim_{x\to 0+} x.g'(x) = 0$ }.
En effet, si g $\in$ C($\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}$) est C^1 sur $\mathbf{R}^*_+$ et telle que $\lim_{x\to 0+} x.g'(x) = 0$, posons

$$f(x) = x.g'(x) + g(x) \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = g(0).$$

En vertu des hypothèses, f est continue, et pour $0 < \varepsilon < x$

$$\int_\varepsilon^x f(t).dt = \int_\varepsilon^x (tg'(t)+g(t)).dt = x.g(x) - \varepsilon.g(\varepsilon)\,.$$

Si l'on fait tendre ε vers 0+, il vient $\int_0^x f(t).dt = x.g(x)$. Cqfd.

2) Les valeurs propres de T sont les réels $\lambda \in\ ]0, 1]$. Pour chaque $\lambda \in\ ]0, 1]$, l'espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par la fonction $f(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Tout d'abord, T étant injectif, 0 n'est pas valeur propre.

Si $T(f) = \lambda f$ avec $f \neq 0$, $f \in \text{Im } T$, et pour tout $x > 0$, $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0$.

Cette équation différentielle s'intègre en $f(x) = C x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, mais il faut encore écrire que f est prolongeable par continuité en 0, ce qui impose $0 < \lambda \leq 1$. Réciproque facile.

3) L'espace $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par T et la matrice de T relativement à la base $(1, X, \dots, X^n)$ est

$$\text{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}\right).$$

Références : Agrégation 1978 [*Un très bon cru !*].

Exercice 6 : Soit E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
À toute $f \in E$ on associe $F = T(f)$ définie par $(\forall x \in \mathbf{R})$ $F(x) = \int_0^{2\pi} \sin(x-t).f(t).dt$.
Montrer que T est un endomorphisme de E. Noyau, image, valeurs et vecteurs propres.

Solution :
1) On peut montrer que F est continue (voire lipschitzienne) et 2π-périodique, mais mieux vaut noter que $F(x) = (\sin x)\int_0^{2\pi} \cos t.f(t).dt - (\cos x)\int_0^{2\pi} \sin t.f(t).dt$ est combinaison linéaire de sin et cos.
T est clairement linéaire. De plus, Im T = Vect(sin, cos), donc T est de rang fini, égal à 2. En effet :
si $f = \sin$, $F(x) = -(\cos x)\int_0^{2\pi} \sin^2 t.dt = -\pi.\cos x$; si $f = \cos$, $F(x) = (\sin x)\int_0^{2\pi} \cos^2 t.dt = \pi.\sin x$.

$\text{Ker } T = \{ f \in E \,;\, \int_0^{2\pi} \cos t.f(t).dt = \int_0^{2\pi} \sin t.f(t).dt = 0 \}$ est un sous-espace vectoriel de codimension 2 de E. Cela montre que 0 est valeur propre de T.
Soient λ une valeur propre non nulle, et f un vecteur propre associé : $T(f) = \lambda f \Rightarrow f \in \text{Im } T$.
Posons $f(x) = a.\sin x + b.\cos x$. Alors $F(x) - \lambda.f(x) = (b\pi - a\lambda).\sin x - (a\pi + b\lambda).\cos x$.
Le système linéaire $b.\pi - a.\lambda = 0$, $a.\pi + b.\lambda = 0$ est non cramérien, sans quoi $a = b = 0$.
Donc son déterminant est nul : $\lambda^2 + \pi^2 = 0$, ce qui est impossible.
Ainsi, T n'a pas d'autre valeur propre réelle que 0.

Remarques :
1) Il n'en serait pas de même dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.
2) On pourrait aussi utiliser la théorie des séries de Fourier, car T est un opérateur de convolution.
3) Plus généralement, si u est un endomorphisme de rang fini d'un espace vectoriel E de dimension infinie, le noyau de u est un sous-espace vectoriel de codimension finie de E. Les autres sous-espaces propres sont inclus dans Im u, donc nous voilà ramenés à réduire l'endomorphisme induit $v = u_{\text{Im } u}$.

Exercice 7 : Soient $E = C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f) : x \to \int_0^x f(t).dt$. Montrer que Φ est un endomorphisme de E ne stabilisant aucun sous-espace vectoriel de dimension finie.

Solution : [Oral Mines PSI 2010, RMS n° 580]
1) Si $f \in E = C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, nous savons que $\Phi(f)$ est élément de $E = C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et même de $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Et Φ est linéaire. De plus, Φ est injectif car $\Phi(f) = 0 \Rightarrow \Phi(f)' = 0 \Rightarrow f = 0$.
2) Soit F un sous-espace de dimension finie $n > 0$ de E stable par Φ.
L'endomorphisme induit Φ_F annulerait un polynôme de degré n : son caractéristique.

$$\forall f \in F \quad (\Phi_F)^n(f) + a_1.(\Phi_F)^{n-1}(f) + \dots + a_{n-1}.\Phi_F(f) + a_n.f = 0.$$

Posant $g = (\Phi_F)^n(f)$, il viendrait $g + a_1.D(g) + \dots + a_{n-1}.D^{n-1}(f) + a_n.D^n(f) = 0$.
Avec $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$. Donc $g = 0$ et par injectivité de Φ, $f = 0$.

Exercice 8 : Soit $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Pour $f \in E$, on définit $\Phi(f)$ par :

$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{(2\pi)} \left|\sin\frac{x-t}{2}\right|.f(t).dt$.

Montrer que Φ est un endomorphisme de E. Valeurs et vecteurs propres ?

Solution : Le recours aux séries de Fourier est ici presque indispensable. Je renvoie à mon fascucule d'exercices corrigés sur les séries de Fourier.

Exercice 9 : Soit E = C([0, 1], **R**). Pour $f \in$ E, on définit $\Phi(f)$ par :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t).dt .$$

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2) Montrer que $\text{Im}\,\Phi = \{ F \in C^2([0, 1], \mathbf{R}) ; F(0) = F'(1) = 0 \}$.
3) Valeurs et vecteurs propres de Φ.

Solution :

1) Notant $F = \Phi(f)$, $F(x) = \int_0^x tf(t).dt + x\int_x^1 f(t).dt$ est $C^1([0, 1], \mathbf{R})$ et telle que F(0) = 0.

De plus, $F'(x) = \int_x^1 f(t).dt$, donc F est C^2 et $F''(x) = -f(x)$; de plus, F'(1) = 0.

Finalement $F \in C^2([0, 1], \mathbf{R})$ et F(0) = F'(1) = 0.
L'injectivité de Φ découle de $F''(x) = -f(x)$: $F = 0 \Rightarrow f = 0$.

2) Il est clair que $\text{Im}\,\Phi \subset A = \{ F \in C^2([0, 1], \mathbf{R}) ; F(0) = F'(1) = 0 \}$.
Réciproquement, soit F ∈ A. Je dis que $F = \Phi(f)$, où $f = -F''$.
On peut le vérifier directement, mais on peut aussi introduire la fonction $G = \Phi(-F'')$.
On a G'' = F'', donc $G(x) = F(x) + ax + b$.
Comme F(0) = F'(1) = G(0) = G'(1) = 0, on en déduit $a = b = 0$ et G = F.

3) Valeurs et vecteurs propres de Φ.
Supposons $\Phi(f) = \lambda f$, $f \neq 0$. Comme Φ est injective, λ est non nulle.
Du coup $f \in \text{Im}\,\Phi$ et $\lambda f'' = -f$.
Si λ < 0, posons $\lambda = -\frac{1}{\omega^2}$; on a $f(x) = A.\text{ch}(\omega x) + B.\text{sh}(\omega x)$.
La condition $f(0) = f'(1) = 0$ implique A = B = 0. Impossible.
Si λ > 0, posons $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$; on a $f(x) = A.\cos(\omega x) + B.\sin(\omega x)$.

La condition $f(0) = f'(1) = 0$ implique A = 0 et $B.\omega.\cos\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Conclusion : Φ admet pour valeurs propres $\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$ ($k \in \mathbf{N}$) .

L'espace propre associé à λ_k est la droite engendrée par $f_k(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)t\right)$.

12. *Farrago final.*

Exercice 1 : Vrai ou faux ?…

K désigne un corps commutatif, E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, u, v, … des endomorphismes de E, A, B, ... des éléments de $M_n(\mathbf{K})$.

Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes :

1. Si u est un projecteur, $E = \text{Ker}\, u \oplus \text{Im}\, u$.

2. Si E = Ker u $\oplus$ Im u , u est un projecteur.

3. Les valeurs propres d'un projecteur appartiennent à {0, 1}.

4. Si les valeurs propres de u appartiennent à {0, 1}, u est un projecteur.

5. Pour que u soit un projecteur, il faut et il suffit qu'il soit diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à {0, 1}.

6. Si **K** = **C**, deux matrices de projecteurs sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

7. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est un projecteur.

8. u est une homothétie si et seulement si tout sous-espace de E est u-stable.

9. u n'a qu'une valeur propre si et seulement si u est une homothétie.

10. A est une matrice scalaire si et seulement si la seule matrice semblable à A est A.

11. Si $A^2 = I$, A est diagonalisable.

12. Si **K** est de caractéristique $\neq 2$, et $A^2 = I$, A est diagonalisable et ses valeurs propres sont 1 et -1.

13. Si $A \in M_n(\mathbf{C})$ et si $A^3 = I$, alors A est diagonalisable.

14. Si les seuls sous-espaces u-stables de E sont {0} et E, alors dim E = 0 ou 1.

15. Si A est inversible, A est diagonalisable.

16. Si A est diagonalisable, A est inversible.

17. Si A est diagonalisable, Ker A = Ker A^2.

18. Si A est diagonalisable, $\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A$.

19. Si A a n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

20. Si A est diagonalisable, A a n valeurs propres distinctes.

21. Si A est symétrique réelle, A est diagonalisable.

22. Si A est symétrique complexe, A est diagonalisable.

23. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$.

24. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$.

25. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$.

26. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$.

27. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbf{R})$.

28. Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme caractéristique.

29. Les valeurs propres de u sont les racines de son polynôme minimal.

30. Si A et B sont semblables, elles ont même polynome caractéristique.

31. Si A et B sont semblables, elles ont même polynome minimal.

32. Si A et B ont même polynome caractéristique et même polynôme minimal, elles sont semblables.

33. Si A et B sont diagonalisables, elles sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique.

34. Si A et B sont diagonalisables, elles sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme minimal.

35. Si u est diagonalisable, u admet un nombre fini de sous-espaces stables.

36. Si u a n valeurs propres distinctes, u admet un nombre fini de sous-espaces stables.

37. Tout sous-espace u-stable admet un supplémentaire u-stable.

38. Si u est diagonalisable, tout sous-espace u-stable admet un supplémentaire u-stable.

39. Si A est nilpotent, 0 est la seule valeur propre de A.

40. Si 0 est la seule valeur propre de A, A est nilpotente.

41. Si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos et si 0 est la seule valeur propre de A, A est nilpotente.

42. Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{R})$.

43. Dans $M_n(\mathbf{C})$ une matrice non nulle admet deux racines carrées.

44. Dans $M_n(\mathbf{C})$ une matrice non inversible admet deux racines carrées.

Réponses :

(de 1 à 20) V , F , V , F , V , V , V , V , F , V , F , F , V , F , F , F , V , V , V , F ,

(de 21 à 40) V , F, V , F , F , V , V , V , V , V , V , F , V , F , F , V , F , V , V , F ,

(de 41 à 44) V , V , F , F

<u>Exercice 2</u> : On se donne $n = 2m + 1$ objets de poids respectifs $p_1, p_2, \dots, p_m$. On suppose que, chaque fois qu'on isole un objet, il est possible de grouper les $2m$ objets restants en deux groupes de m éléments, de même poids total. Montrer que tous les objets ont même poids.

<u>Solution</u> : Notons p le vecteur-colonne des p_i , e le vecteur colonne-formé de n réels égaux à 1.
L'hypothèse se traduit par A.p = 0 et A.e = 0, où A est une matrice $n\times n$ à éléments dans $\mathbf{Z}$, telle que

$$\forall (i, j) \quad a_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad i \neq j \ \Rightarrow \ a_{ij} = \pm 1.$$

Je dis que la matrice A est de rang $n - 1$. En effet, Ker A $\neq \{0\}$, et la sous-matrice A' de A obtenue en barrant la n-ième ligne et la n-ième colonne a un déterminant impair, donc non nul.

En effet det A' $\equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 1 \pmod 2$.

Du coup, Ker A est une droite vectorielle, et $p = \lambda e$: les p_i sont tous égaux.

<u>Exercice 3</u> : Soit n un entier > 1. On se donne n lampes $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ disposées sur un cercle, chacune en position « marche » ou en position « arrêt ». Les lampes sont prises modulo n, à savoir : $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, …

On effectue une suite d'opérations S_0, S_1, …, S_i, … L'opération S_j n'affecte que la lampe L_j (en laissant toutes les autres lampes dans le même état) et agit de la façon suivante :

- Si L_{j-1} est en position « marche », S_j change l'état de la lampe L_j en la passant de la position « marche » à la position « arrêt » ou de la position « arrêt » à la position « marche ».
- Si L_{j-1} est en position « arrêt », S_j ne change pas l'état de la lampe L_j.

Initialement, toutes les lampes sont dans la position « marche ».

a) Démontrer qu'il existe un entier strictement positif M(n) tel qu'après M(n) opérations toutes les lampes sont à nouveau en position « marche ».

b) Si n est de la forme 2^k, démontrer que toutes les lampes sont en position « marche » après $n^2 - 1$ opérations.

c) Si n est de la forme $2^k + 1$, démontrer que toutes les lampes sont en position « marche » après $n^2 - n + 1$ opérations.

(Olympiades 1993, exercice 6)

Solution :

Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on écrit $n = \sum_{q=0}^{+\infty} \varepsilon_q(n).2^q$, $\varepsilon_q(n) \in \{0, 1\}$ son développement binaire.

1) Soient $s(n) = \sum_{q=0}^{+\infty} \varepsilon_q(n)$ et $v(n) = \inf \{ q \geq 0 \,;\, \varepsilon_q(n) = 1 \}$.

Montrer que $v(n) = 1 + s(n-1) - s(n)$, puis que $v(n\,!) = n - s(n)$.

2) Soit D : $a = (a_1, a_2, \dots , a_r) \in \mathbf{Z}^r \to (\,|\, a_1 - a_2 \,|\, , |\, a_2 - a_3 \,|\, , \dots , |\, a_{r-1} - a_r \,|\, , |\, a_r - a_1 \,|\,)$.

Montrer que la suite $(D^n(a))$ converge vers 0 pour tout $a \in \mathbf{Z}^r$ si et seulement si r est puissance de 2.

Indication : utiliser le $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$.

[Grand oral X 1991]

Solution :

1) Les fonctions s et v satisfont aux relations de récurrence

$$s(0) = 0 \,,\, s(2n) = s(n) \,,\, s(2n+1) = s(n) + 1 \,,\, v(0) = +\infty \,,\, v(2n) = v(n) + 1,\, v(2n+1) = 0.$$

Notons $w(n) = 1 + s(n-1) - s(n)$ pour $n \geq 1$.

On vérifie sans peine que $w(2n) = w(n) + 1$ et $w(2n + 1) = 0$; donc v et w coincident sur $\mathbf{N}^*$.

La formule $v(n\,!) = n - s(n)$ s'en déduit par télescopage.

2) Notons $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, p la surjection canonique $\mathbf{Z} \to \mathbf{K}$.

p : $a = (a_1, \dots , a_r) \in \mathbf{Z}^r \to x = (x_1, \dots , x_r) \in \mathbf{K}^r$, où $x_i = p(a_i)$.

D : $a = (a_1, \dots , a_r) \in \mathbf{Z}^r \to (\,|\, a_1 - a_2 \,|\, , |\, a_2 - a_3 \,|\, , \dots , |\, a_{r-1} - a_r \,|\, , |\, a_r - a_1 \,|\,)$.

A : $x = (x_1, \dots , x_r) \in \mathbf{K}^r \to (x_1 + x_2 , x_2 + x_3 , \dots , x_{r-1} + x_r , x_r + x_1)$.

<u>Lemme 1</u> : $\forall (a, b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ $p(|a - b|) = p(a) + p(b)$.

Cela découle de ce que $|\, a - b \,| = \pm (a - b) \equiv a + b \pmod 2$.

<u>Lemme 2</u> : Les propiétés suivantes sont équivalentes :

i) $\forall a \in \mathbf{Z}^r$ $(D^n(a))$ tend vers 0 ;

ii) $\forall a \in \mathbf{Z}^r$ $\exists n$ $D^n(a) = 0$;

iii) La matrice A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est nilpotente dans $M_r(\mathbf{K})$;

iv) r est une puissance de 2.

<u>Exercice 5</u> : *n* nains sont assis autour d'une table. Chacun a devant lui une chope de bière. On suppose que toutes les chopes ne sont pas vides. Chaque nain à tour de rôle verse le contenu de sa chope dans les autres de manière équitable. Le tour de table étant achevé, chacun retrouve la même quantité de bière qu'au début. Trouver la répartition de la bière.

<u>Solution</u> : des femmes et de la bière !…

1) Pour débroussailler le problème, traitons le cas $n = 3$.

Soient a, b, c, les quantités de bières détenues par les nains n° 1, 2, 3.

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ a/2+b \\ a/2+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a/4+b/2 \\ 0 \\ 3a/4+b/2+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5a/8+3b/4+c/2 \\ 3a/8+b/4+c/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. On trouve, à facteur près $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

et l'on devine qu'en général la répartition de la bière doit être proportionnelle à $\begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Il est facile de vérifier que cette répartition convient.

2) Il reste à examiner le problème matriciellement.

Philip Gladstone, Scholar's bath