Théorèmes de point fixe

1. TPF réels.

2. TPF dans les ensembles ordonnés.

3. TPF dans les espaces complets.

4. TPF dans les espaces compacts.

5. TPF dans les boules euclidiennes.

6. TPF dans les ensembles convexes.

à tous mes points fixes,
Pierre-Jean Hormière

« Il y a mathématique *quand on peut réussir heureusement la substitution d'un système d'actes à un objet de pensée. »*

Paul Valéry (Cahiers II, p. 795)

Introduction

Si f est une fonction d'un ensemble E dans lui-même, on appelle **point fixe** de f tout élément x de E tel que $x = f(x)$. Très souvent de tels points fixes s'obtiennent comme limites, en un certain sens, de suites récurrentes $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$: c'est ce qu'on nomme la **méthode des approximations successives**.

De nombreux objets mathématiques peuvent être présentés comme des points fixes de certaines fonctions ou transformations : les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les points fixes de la fonction $g(x) = x + f(x)$, les solutions du système linéaire $AX = B$ sont les points fixes de la fonction affine $g(X) = X + AX - B$, la fonction exponentielle est un point fixe de l'opérateur de dérivation, la fonction factorielle est un point fixe d'un opérateur fonctionnel T de $\mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{N})$ dans lui-même, celui qui à f associe la fonction Tf définie par $(Tf)(0) = 1$, $(Tf)(n) = n.f(n-1)$ si $n \geq 1$, etc.

En physique, chimie, économie, théorie des jeux, et ailleurs, toute situation d'équilibre peut apparaître comme un point fixe ; encore faut-il distinguer équilibres stables et instables.

On rencontre en mathématiques de nombreux théorèmes assurant l'existence, et parfois l'unicité d'un point fixe pour une fonction donnée d'un ensemble dans lui-même possédant certaines propriétés. J'ai classé ces **théorèmes de point fixe** (ou TPF) selon la nature de l'ensemble de définition, commençant par réunir les résultats relatifs aux fonctions de variable réelle, sachant qu'ils seront généralisés dans la suite.

Certains théorèmes utilisent uniquement des relations d'ordre. Ils ont des retombées en théorie des ensembles (théorème de Cantor-Bernstein), en analyse fonctionnelle et en théorie des automates.

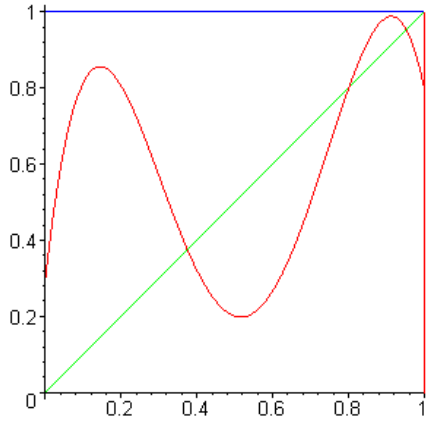
Le plus important de ces théorèmes est celui de Picard-Banach, relatif aux applications contractantes d'un espace complet dans lui-même ; il a des retombées dans toutes les domaines : analyse numérique, résolution approchée de systèmes linéaires et non linéaires, équations différentielles et intégrales, fonctions implicites et inversion locale, calculs asymptotiques, fractales, dynamiques stables… D'autres résultats se placent dans le cadre des espaces compacts ou localement compacts.

En 1911, Brouwer a démontré un important théorème de point fixe. Très différent de celui de Picard-Banach, ce théorème est le point de départ d'une branche particulière de la topologie, la topologie algébrique. Ses applications et ses généralisations, des équations différentielles à la théorie des jeux, dues à Schauder, Tichonov, Leray, Nash et Kakutani se sont révélées fondamentales.

Enfin certains théorèmes se placent dans le cadre des ensembles convexes : c'est le théorème de Markov-Kakutani (1936), qui aide à comprendre la mesure de Haar, etc.

J'ai choisi le cadre des espaces métriques ou normés, laissant les espaces vectoriels topologiques localement convexes (ces chers EVTLC qui firent les délices de ma jeunesse folle), aux spécialistes.

1. Théorèmes de point fixe réels.

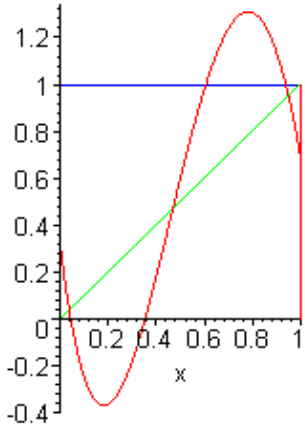


Proposition 1 : Soit I = [a, b] un segment de **R**. Toute fonction f : I → I continue admet au moins un point fixe.

Preuve : La fonction g(x) = f(x) – x est continue de [a, b] dans **R**, g(b) ≤ 0 ≤ g(a). En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, (∃c ∈ I) g(c) = 0, donc f(c) = c.

Proposition 2 : Tout fermé F de **R** est exactement l'ensemble des points fixes d'une fonction f : **R** → **R** continue.

Preuve : Soit F un fermé de **R**, f(x) = x + d(x, F),
où d(x, F) = inf { |x – y| ; y ∈ F } est la distance de x à F,
est une fonction continue de **R** dans **R**, car 2-lipschitzienne.
Et f(x) = x ⇔ x ∈ $\overline{F}$ ⇔ x ∈ F.



Les résultats suivants généralisent la prop. 1 :

Proposition 3 : Soit f : I = [a, b] → **R** continue, telle que I ⊂ f(I) ; f admet au moins un point fixe.

Preuve : Comme I ⊂ f(I) , ∃(c, d) ∈ I×I f(c) = a et f(d) = b.
Si c = a ou d = b, c'est fini. Sinon, a < c < b et a < d < b.
Soit g(x) = f(x) – x. Alors g(c) < 0 < g(d).
En vertu du théorème des valeurs intermédiaires,
∃e ∈]c, d[ou]d, c[g(e) = e. Alors f(e) = e, et e ∈ I.

Autre preuve, par absurde. Si f était sans point fixe, on aurait ∀x ∈ I f(x) > x , ou ∀x ∈ I f(x) < x, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Dans le premier cas, en vertu du théorème des bornes, on aurait même ∀x ∈ I f(x) – x ≥ m > 0, d'où f(x) ≥ x + m ≥ a + m, et f ne prendrait pas la valeur a…

Proposition 4 : Soient f et g : I = [a, b] → I continues telles que fog = gof ; alors (∃x ∈ I) f(x) = g(x).

Preuve : L'ensemble K = { x ∈ I ; f(x) = x } des points fixes de f est un fermé borné non vide de I, en vertu de la continuité de f (prop. 1) ; K est donc compact. Soient m = min K et M = max K.
On a g(K) ⊂ K, car g et f commutent.
La fonction h(x) = f(x) – g(x) est continue et satisfait h(m) = m – g(m) ≤ 0 ≤ M – g(M) = h(M).
En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule dans I. cqfd.
Variante, par absurde.
Supposons ∀x ∈ I f(x) > g(x). Alors, pour tout x ∈ K, g(x) ∈ K et x > g(x). Donc la suite (g^n(x)) serait strictement décroissante ; sa limite c serait dans K et telle que g(c) = c = f(c).

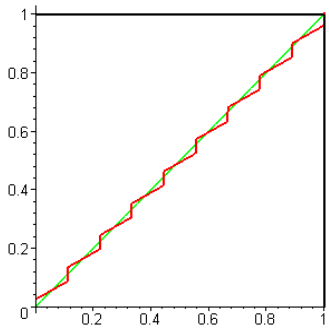
Proposition 5 : Soit I = [a, b]. Toute fonction croissante f : I → I admet au moins un point fixe.

Preuve : L'ensemble A = { x ∈ I ; f(x) ≤ x } est non vide, car b ∈ A ; soit α = inf A.
L'ensemble B = { x ∈ I ; x ≤ f(x) } est non vide, car a ∈ A ; soit β = sup A.
• z ∈ A ⇒ α ≤ z ⇒ f(α) ≤ f(z) ≤ z . Par suite, f(α) ≤ α.
Mais alors f(f(α)) ≤ f(α), donc f(α) ∈ A, donc α ≤ f(α) . Finalement, α = f(α).
z ∈ B ⇒ z ≤ β ⇒ z ≤ f(z) ≤ f(β) . Par suite, β ≤ f(β).
Mais alors f(β) ≤ f(f(β)), donc f(β) ∈ B, donc f(β) ≤ β . Finalement, β = f(β).
• α et β sont éléments de A ∩ B. On en déduit aussitôt que α ≤ β.
• Soit γ un point fixe de f. Alors γ ∈ A ∩ B, donc α ≤ γ ≤ β.
Ainsi, α est le plus petit, et β le plus grand point fixe de f.

Variante : Si $f(a) = a$, c'est fini. Sinon, $f(a) > a$. Notons $A' = \{x \in I \,;\, x < f(x)\}$.
A' est une partie majorée (par b) non vide (car $a \in A'$) ; soit $z = \sup A'$. Montrons $z = f(z)$.

• Si l'on avait $z < f(z)$, on aurait $z < b$. De plus :
$\forall y \in [z, f(z)[\ z < y \Rightarrow f(z) \le f(y)$. Or $y < f(z) \Rightarrow y < f(y) \Rightarrow y \in A'$. z ne serait pas un majorant de A'.

• Si l'on avait $f(z) < z$, on aurait $a < z$. De plus :
$\forall y \in]f(z), z]\ y \le z \Rightarrow f(y) \le f(z)$. Or $f(z) < y \Rightarrow f(y) < y \Rightarrow y \notin A'$.
$A' \cap]f(z), z] = \varnothing$, et z ne pourrait être borne supérieure de A'.




```
> with(plots):f:=x->1/40+x/1.8+1/21*floor(9*x);
p:=plot(1,x=0..1,color=black):
q:=plot([1,t,t=0..1],color=black):
r:=plot([f(x),x],x=0..1):display({p,q,r},
scaling=constrained,thickness=2);
```

Remarques : 1) Considérons les suites récurrentes :

$$x_0 = a\ ,\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad y_0 = b\ ,\ y_{n+1} = f(y_n).$$

(x_n) est croissante et tend vers α, (y_n) décroissante et tend vers β, avec $\alpha \le f(\alpha) \le f(\beta) \le \beta$, et tout point fixe x de f vérifie $\alpha \le x \le \beta$.

2) Une fonction décroissante $f : [a, b] \to [a, b]$ n'a pas forcément de point fixe, mais $f \circ f$ en a un. Penser à $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ si $0 < x \le 1$.

Les deux résultats suivants ouvrent sur la distinction entre points fixes attractifs et répulsifs, qui est approfondie dans le chapitre sur les suites récurrentes.

Proposition 6 (Cauchy) : Soient I un intervalle fermé de **R**, f une fonction de classe dérivable de I dans I telle que : $\exists k \in]0, 1[\quad \forall x \in I \quad |f'(x)| \le k$.
Alors f admet un unique point fixe a dans I, et toutes les suites $x_{n+1} = f(x_n)$ tendent vers a.

Proposition 7 : Soit I un intervalle de **R**, f une fonction dérivable de I dans I telle que :

$$\exists k > 1 \quad \forall x \in I \quad |f'(x)| \ge k.$$

Si f admet un point fixe a dans I, les seules suites récurrentes $x_{n+1} = f(x_n)$ tendant vers a sont les suites stationnaires.

Exercices

Exercice 1 : Ptolémée, al-Kashi, Cauchy.
Un problème célèbre posé par Ptolémée (128-168) est celui du calcul approché de sin 1°. Vers 1400, al-Kashi, astronome à l'observatoire de Samarcande, part de la relation $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, pour déduire $y = \sin 1°$ de $\sin 3°$. Comme $y = \frac{1}{3}(\sin 3° - 4y^3)$, il forme la suite récurrente

$u_0 = 0,\ \ u_{n+1} = \frac{1}{3}(\sin 3° - 4.u_n^3)$. Démontrer que cette suite converge effectivement vers sin 1°.

Préciser la vitesse de convergence, et calculer sin 1° à 10^{-10} près.

Exercice 2 : Montrer que toute fonction continue bornée de **R** dans **R** admet au moins un point fixe.

Solution : Si $f(\mathbf{R}) \subset [a, b]$, alors $f([a, b]) \subset [a, b]$. Appliquer la prop. 1 à la restriction de f à [a, b].

Exercice 3 : Soit $f \in C([a, b], \mathbf{R})$ telle que $\int_a^b f(t)dt = \frac{b^2-a^2}{2}$. Montrer que $\exists c \in]a, b[\ f(c) = c$.

(Oral X 1987, RMS n° 14)

Solution : Dans le cas contraire, on aurait (TVI !) soit $\forall x \in]a, b[\ f(x) < x$, soit $\forall x \in]a, b[\ x < f(x)$.
On en déduirait resp. $\int_a^b f(t)dt < \frac{b^2-a^2}{2}$ ou $\int_0^1 f(t)dt > \frac{b^2-a^2}{2}$, car la fonction $x - f(x)$ est continue, de signe constant et non nulle.

Autre solution : considérons $g(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{x^2-a^2}{2}$; elle est C^1 et telle que $g(a) = g(b) = 0$.
Il suffit de lui appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 4 : Soient f et $g \in C([a, b], \mathbf{R})$ telles que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$. Alors $\exists c \in]a, b[$ $f(c) = g(c)$.

Solution : simple généralisation de l'exercice précédent.

Exercice 5 : Soient I = [a, b], f une application : I → I vérifiant :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe a, et toutes les suites $x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$ convergent vers a.
Applications : 1) I = [0, π/2], $f(x) = \sin x$.

2) Montrer que la fonction $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^2(n+1)}$ obéit à ces hypothèses sur [−π, π].

Solution : L'existence d'un point fixe a découle de la prop. 1.
Si f avait deux points fixes a et b, on aurait $|a - b| = |f(a) - f(b)| < |a - b|$.
Du reste, la fonction $g(x) = f(x) - x$ est continue, strictement décroissante et $g(b) \leq 0 \leq g(a)$.
Elle ne s'annule qu'une fois. Reste à montrer que toutes les suites récurrentes (x_n) tendent vers a.
Je renvoie au § 4, th. 1, pour la suite de la preuve.

Exercice 6 : Soient I = [a, b], f : I → I continue.

1) Montrer que $J = \bigcap_{n \in N} f^n(I)$ est un segment non vide de I, tel que $f(J) = J$.

2) Si J est réduit à un point x*, montrer que toute suite $x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$, converge vers x*.

Solution : 1) Pour tout n, $I_n = f^n(I)$ est un segment $[a_n, b_n]$. De plus, la suite (I_n) est décroissante pour l'inclusion. La suite (a_n) est croissante majorée par α, la suite (b_n) décroissante minorée par β, avec α ≤ β, et J = [α, β]. De plus, pour tout n, $f(J) \subset f(I_n) = I_{n+1}$, d'où $f(J) \subset J$.
Enfin, $(\forall n)$ $\exists x_n \in I_n$ $\alpha = f(x_n)$. De la suite (x_n) on peut extraire une sous-suite $(x_{n(k)})$ tendant vers α'. De plus α' ∈ J, donc $\alpha \in f(J)$; idem pour β. 2) est facile.

Exercice 7 : Soient I = [a, b], f : I → **R** continue, $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ n sous-segments de I.
On suppose que $I_0 \subset f(I_{n-1})$ et $I_{k+1} \subset f(I_k)$ pour $0 \leq k \leq n-2$.
Montrer que $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ a un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.
(X 1998, RMS n° 38, janv. 1999)

Exercice 8 : Soient f : [0, 1] → [0, 1] une fonction 1-lipschitzienne, (x_n) une suite telle que $x_0 \in [0, 1]$ et $(\forall n)$ $x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$. Montrer que (x_n) converge vers un point fixe de f.
(ENS Cachan 2005, RMS n° 39, mai 2006)

Solution : (x_n) est une suite de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$, où $g(x) = \frac{x + f(x)}{2}$.
La fonction g est 1-lipschitzienne et surtout croissante. La suite (x_n) est donc monotone, croissante si $x_0 \leq x_1$, décroissante si $x_1 \leq x_0$. Elle converge.

Exercice 9 : Soit f une fonction continue de **R** dans **R** telle que toutes les suites $x_0 \in$ **R**, $x_{n+1} = f(x_n)$ aient leurs moyennes de Cesàro $\frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$ bornées. Montrer que f admet au moins un point fixe.
(1995, RMS n° 56)

Exercice 10 : Soit f : **R** → **R** une fonction continue, (x_n) une suite telle que $(\forall n)$ $x_{n+1} = f(x_n)$.

On suppose que (x_n) possède une unique valeur d'adhérence.
Montrer que (x_n) converge vers un point fixe de f.

(Mines 2002, RMS n° 440)

Solution : cf. § 4, où cet exercice est généralisé.

Exercice 11 : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue, (x_n) la suite récurrente $x_0 \in [0, 1]$ et $(\forall n)\ x_{n+1} = f(x_n)$.
Si $x_{n+1} - x_n \to 0$, montrer que (x_n) converge vers un point fixe de f.

(Mines 2002, RMS n° 438)

Solution : 1) L'hypothèse $x_{n+1} - x_n \to 0$ implique que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de (x_n) est un intervalle, et même un segment [a, b]. Ce lemme classique se montre par absurde, en supposant qu'existent $\alpha < \gamma < \beta$, α et β étant valeurs d'adhérence et γ non.
2) Tout point $x \in [a, b]$ est un point fixe de f.
En effet, si $x_{n(k)} \to x$, $f(x) = \lim f(x_{n(k)}) = \lim x_{n(k)+1} = \lim x_{n(k)} = x$.
3) Supposons par absurde $a < b$.
S'il existe $x_{n(0)}$ tel que $x_{n(0)} \in [a, b]$, alors $x_n = x_{n(0)}$ pour tout $n \geq n(0)$, et $A = \{x_{n(0)}\}$: contradiction.
Donc $(\forall n)\ x_n < a$ ou $x_n > b$. Comme $x_{n+1} - x_n \to 0$, on a, soit $x_n < a$, soit $x_n > b$, à partir d'un certain rang. Mais si $x_n < a$ à partir d'un certain rang, la seule valeur d'adhérence possible est a. Il y a encore contradiction.
4) En résumé, a = b. La suite (x_n) est bornée et n'a qu'une valeur d'adhérence, donc elle converge. Comme f est continue, sa limite est un point fixe de f.

Exercice 12 : Soient (a_n) une suite réelle tendant vers 0, à valeurs dans I = [0, 1], et $f : I \to I$ continue. On considère la suite $x_0 \in I$, $x_{n+1} = (1 - a_n).x_n + a_n.f(x_n)$.

1) Que peut-on dire de la suite $(x_{n+1} - x_n)$?
2) Montrer que $\sum a_n$ converge $\Rightarrow (x_n)$ converge.
3) Montrer que si $(x_n) \to L$ et si L n'est pas un point fixe de f, alors $\sum a_n$ converge.
4) Montrer que si f est C^1 et admet un seul point fixe L, alors $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow (x_n) \to L$.
5) Montrer que $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow (x_n)$ tend vers un point fixe de f.

(Centrale 2000, RMS n° 322, et R 353 mai 2000)

Solution : Il s'agit d'itérations barycentriques généralisant $x_{n+1} = f(x_n)$. Mais, au lieu de pondérer de plus en plus $f(x_n)$ sur le segment $[x_n, f(x_n)]$, on pondère de plus en plus x_n !
J'avoue ne pas voir l'intérêt d'une telle idée, hormis bien sûr de fournir un exercice d'oral gratiné.
1) On a $x_{n+1} - x_n = a_n.(f(x_n) - x_n)$, donc $|x_{n+1} - x_n| \leq a_n$ et $(x_{n+1} - x_n)$ tend vers 0.
2) $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum (x_{n+1} - x_n)$ converge absolument $\Rightarrow (x_n)$ converge.
3) Si $(x_n) \to L$ et $L \neq f(L)$; $f(x_n) - x_n \to f(L) - L$, donc est $\neq 0$ àpcr.
Alors $0 \leq a_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{f(x_n) - x_n} \sim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{f(L) - L}$. Les séries $\sum a_n$ et $\sum (x_{n+1} - x_n)$ sont de même nature.
Or celle-ci converge puisque la suite (x_n) converge, donc $\sum a_n$ converge.
4) Supposons que $a < L < b$.
Alors $f(a) > a$ et $x < L \Leftrightarrow f(x) > x$; $f(b) < b$ et $x > L \Leftrightarrow f(x) < x$ (th. des valeurs intermédiaires).
1er cas : $x_n \in [0, L]$ àpcr. Alors (x_n) est croissante àpcr ; elle est croissante majorée àpcr, donc tend vers une limite qui ne peut être qu'un point fixe de f en vertu de 3) ; c'est donc L.
2ème cas : $x_n \in [L, 1]$ àpcr. Alors (x_n) est décroissante àpcr ; elle est décroissante minorée àpcr, et l'on conclut de même.

$3^{\text{ème}}$ cas : on n'est ni dans le premier cas, ni dans le second cas.
Soit $\varepsilon > 0$; $\exists n_0$ $n \geq n_0$ $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$. …

5) Supposons que $\sum a_n$ diverge, et supposons, par absurde, que la suite (x_n) diverge.
Comme elle est bornée, elle possèderait deux valeurs d'adhérence $\alpha < \beta$. Fixons $\gamma \in]\alpha, \beta[$.
Les ensembles $\{ n ; x_n < \gamma \}$ et $\{ n ; x_n > \gamma \}$ sont infinis, donc il en est de même des ensembles $A = \{ n ; x_n \leq \gamma < x_{n+1} \}$ et $B = \{ n ; x_n \geq \gamma > x_{n+1} \}$. Comme $x_{n+1} - x_n$ vers 0, on a $\lim_{n \in A, n \to +\infty} x_n = \gamma$; γ est donc valeur d'adhérence de (x_n). De plus, si $n \in A$, $x_n < x_{n+1}$, donc $x_n < f(x_n)$. A la limite, il vient $f(\gamma) \geq \gamma$. De même, $\lim_{n \in B, n \to +\infty} x_n = \gamma$ et, pour $n \in B$, $f(x_n) < x_n$. A la limite, il vient $f(\gamma) \leq \gamma$.
Par suite, $f(\gamma) = \gamma$. Tout élément de $]\alpha, \beta[$ est une valeur d'adhérence de (x_n) et un point fixe de f.
Mais alors, il existe un entier k tel que $x_k \in]\alpha, \beta[$ et $x_n = x_k$ pour tout $n \geq k$: absurde.
Ainsi donc la suite (x_n) converge. Soit L sa limite. Supposons par absurde $L \neq f(L)$.
On aurait $x_{n+1} - x_n = a_n.(f(x_n) - x_n) \sim a_n.(f(L) - L)$. $\sum a_n$ diverge et est à termes ≥ 0, donc $\sum (x_{n+1} - x_n)$ diverge. Mais ceci contredit la convergence de la suite (x_n). Au final, $L = f(L)$ et (x_n) converge vers un point fixe de f.

Exercice 13 : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue, $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que $x_1 \in [0, 1]$ et $(\forall n)$ $x_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Montrer que (x_n) converge vers un point fixe de f.

(ENS Ulm 2005, RMS n° 40, mai 2006)

Solution : Noter que $x_{n+1} = (1 - \frac{1}{n}) x_n + \frac{1}{n} f(x_n)$; il suffit d'invoquer la question 5 de l'ex. 9…

Exercice 14 : Montrer qu'une involution continue f du plan complexe possède au moins un point fixe. [On admettra que pour toute fonction continue $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$, il existe une fonction continue $h : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que $(\forall z)$ $f(z) = \exp h(z)$]

Solution : Si f était sans point fixe, il existerait $h \in C(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ telle que $(\forall z)$ $f(z) - z = \exp(h(z))$.
Alors $f(f(z)) = f(z) + \exp(h(f(z)) = z + \exp(h(z)) + \exp(h(f(z))$.
$f(f(z)) = z$ se traduit par $\exp(h(f(z)) = -\exp(h(z)) = \exp(h(z) + i\pi)$.
Par connexité, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\forall z$ $h(f(z)) = h(z) + i.(2k + 1)\pi$.
Enfin, $h(z) = h(f(f(z)) = h(f(z)) + i.(2k + 1)\pi = h(z) + i.(4k + 2)\pi$ … impossible !

2. Théorèmes de point fixe dans les ensembles ordonnés.

Sont ici exposés deux théorèmes de point fixe dans les ensembles ordonnés, dus à Knaster, Tarski et Kantorovitch, et démontrés entre 1927 et 1955. Ils ont des applications en algèbre, analyse fonctionnelle linéaire, théorie des approximations, théorie des points critiques, théorie des automates et linguistique mathématique, paraît-il.

Rappels :
Si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné, une fonction $f : E \to E$ est dite **croissante** si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
Si $A \subset E$, la **borne supérieure** de A est le plus petit majorant de A, s'il existe.
Un **treillis** est un ensemble ordonné dans lequel toute paire $\{x, y\}$ a une borne supérieure et une borne inférieure. Un **treillis complet** est un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide a une borne supérieure et une borne inférieure.

Théorème 1 (Knaster-Tarski) : Soit $(E, \leq)$ un treillis complet. Toute fonction croissante f de E dans E admet au moins un point fixe. L'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes de f est un treillis complet pour l'ordre induit.

Preuve : E lui-même a un inf et un sup, qui sont ses plus petit et plus grand éléments α et β.
L'ensemble A = { $z \in E$; $f(z) \le z$ } est non vide, car $\beta \in A$; soit a = inf A.
L'ensemble B = { $z \in E$; $z \le f(z)$ } est non vide, car $\alpha \in A$; soit b = sup A.
1) $z \in A \Rightarrow a \le z \Rightarrow f(a) \le f(z) \le z$. Par suite, $f(a) \le a$.
Mais alors $f(f(a)) \le f(a)$, donc $f(a) \in A$, donc $a \le f(a)$. Finalement, $a = f(a)$.
$z \in B \Rightarrow z \le b \Rightarrow z \le f(z) \le f(b)$. Par suite, $b \le f(b)$.
Mais alors $f(b) \le f(f(b))$, donc $f(b) \in B$, donc $f(b) \le b$. Finalement, $b = f(b)$.
2) Soit c un point fixe de f. Alors $c \in A \cap B$, donc $a \le c \le b$.
Ainsi, a est le plus petit, et b le plus grand point fixe de f.
3) Soit $(c_i)_{i\in I}$ une famille de points fixes de f , $c = \inf c_i$.
On a $(\forall i)$ $f(c) \le f(c_i) = c_i$, donc $f(c) \le c$, et $c \in A$. Donc $a \le c$.
¶ Attention, je ne dis pas que c est un point fixe de f, mais que les points fixes de f qui sont inférieurs ou égaux à tous les c_i , c'est-à-dire $\le c$, ont un plus grand élément.
Soit M = { $x \in E$; $x \le c$ et $x \le f(x)$ } = $[\alpha, c] \cap B$. M n'est pas vide ; il contient α. Soit $\mu = \sup M$.
On a $\mu \le c$, et $\forall x \in M$ $x \le f(x) \le f(\mu) \le f(c) \le c$. Donc $\mu \le f(\mu)$, et $\mu \in M$.
On a $f(\mu) \le f(f(\mu)) \le f(c) \le c$, donc $f(\mu) \in M$, et $f(\mu) \le \mu$.
Conclusion : $\mu = f(\mu)$; μ est un point fixe de f inférieur ou égal à c.
Si ξ est un point fixe de f inférieur ou égal à c, alors $\xi \in M$, donc $\xi \le \mu$. Cqfd.
4) Même preuve pour les points fixes de f qui sont supérieurs ou égaux aux c_i .

Variante de 3) : L'ensemble des minorants de $(c_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire le segment $S = [\alpha, c]$, est lui-même un treillis complet pour l'ordre induit. Comme $f(c) \le c$, le segment S est f-stable. En vertu de 1) et 2) appliqué au couple $(S , f|_S)$, il y a dans S un plus grand point fixe de f.

Corollaire 1 : Soit [a, b] un segment de **R**. Toute fonction croissante $[a, b] \to [a, b]$ a au moins un point fixe.

En effet, [a, b] est un treillis complet pour l'ordre naturel. On retrouve ainsi la prop. 5 du § 1.

Corollaire 2 : Soit X un ensemble. Toute application $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ croissante pour l'inclusion admet au moins un point fixe.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème 1 au treillis complet $(\mathcal{P}(X), \subset)$. Il découle de ce th. que, si $V = \bigcap \{Z \subset X ; f(Z) \subset Z\}$ et $W = \bigcup \{Z \subset X ; f(Z) \supset Z\}$, alors $f(V) = V$, $f(W) = W$ et $(\forall Z \subset X)$

$f(Z) = Z \Rightarrow V \subset Z \subset W$. Autrement dit, V est le plus petit et W le plus grand point fixe de f.
Exercice : Montrer que, pour tout n, $f^n(\emptyset) \in W$ et $f^n(X) \in V$, puis que $\bigcup_n f^n(\emptyset) \in W$ et $\bigcap_n f^n(X) \in V$.

Remarque : Anne C. Davis a démontré en 1955 une réciproque du théorème 1 : si toute fonction croissante $E \to E$ a au moins un point fixe, alors E est un treillis complet.

Théorème 2 (Tarski-Kantorovitch) : Soit $(E, \le)$ un ensemble ordonné vérifiant :
- Toute suite croissante majorée (x_n) a une borne supérieure x ; on note cela $x_n \uparrow x$.
- Toute suite décroissante minorée (y_n) a une borne inférieure y ; on note cela $y_n \downarrow y$.

Soit $f : E \to E$ une application croissante vérifiant : $x_n \uparrow x \Rightarrow f(x_n) \uparrow f(x)$ et $y_n \downarrow y \Rightarrow f(y_n) \downarrow f(y)$.
On suppose qu'existent deux éléments x_0 et y_0 de E vérifiant : $x_0 \le y_0$, $x_0 \le f(x_0)$ et $f(y_0) \le y_0$.
Alors les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $y_{n+1} = f(y_n)$ vérifient :

$$\exists (x, y) \in E\times E \quad x_n \uparrow x \quad , \quad y_n \downarrow y \quad , \quad f(x) = x \quad , \quad f(y) = y \quad \text{et} \quad x \le y.$$

De plus, si a est un point fixe de f tel que $a \ge x_0$, alors $a \ge x$;
si b est un point fixe de f tel que $b \le y_0$, alors $b \le y$.

Preuve : (x_n) est croissante (récurrence), majorée par y_0 ; soit x sa borne supérieure. On a $x_n \uparrow x$.
De même, la suite (y_n) est décroissante minorée par x_0 ; soit y sa borne inférieure. On a $y_n \downarrow y$.
On a $x_{n+1} = f(x_n) \uparrow x = f(x)$, et de même $y_{n+1} = f(y_n) \downarrow y = f(y)$.
Enfin, $\forall(m, n)$ $x_m \leq y_n$, car si $p = \max(m, n)$, $x_m \leq x_p \leq y_p \leq y_n$.
Par suite, $\forall n$ $x = \sup x_m \leq y_n$, puis $x \leq y$.
Enfin, $a = f(a)$ et $a \geq x_0$ impliquent $a \geq x_n$ pour tout n par récurrence, donc $a \geq x$; idem pour b.

Remarque : Si E a un plus petit et un plus grand éléments, notés resp. α et β, on posera $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$. Alors E aura un plus petit et un plus grand points fixes $a = \sup f^n(\alpha)$ et $b = \inf f^n(\beta)$.

Comparaison des deux théorèmes.

1) Le premier théorème impose des hypothèses plus restrictives que le second sur $(E, \leq)$, mais moins restrictives sur la fonction f.
2) Lorsque les deux théorèmes s'appliquent, ils fournissent des points fixes de f de natures distinctes. Le plus petit point fixe a, par exemple, est obtenu dans le premier théorème comme borne inférieure d'une certaine partie de E, dans le second théorème comme borne supérieure d'une certaine suite récurrente :

$$a = \sup f^n(\alpha) = \inf \{ z \in E ; f(z) \leq z \} \quad , \quad b = \inf f^n(\beta) = \sup \{ z \in E ; z \leq f(z) \}.$$

3) Revenant au premier théorème, la théorie des ordinaux permettrait de donner une construction par récurrence transfinie de a comme borne supérieure, généralisant $a = \sup f^n(\alpha)$.

Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'existent une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$. Alors il existe une bijection $h : E \to F$.

Preuve : On peut déduire ce théorème, soit du théorème 1, soit du théorème 2.

i) S'il existe une partie A de E telle que $g(F - f(A)) = E - A$, alors l'application $h : E \to F$ définie par : $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in E - A$, est bijective.
Elle est en effet la recollée des deux bijections $f\big|_{A}^{f(A)}$ et $(g\big|_{F-f(A)}^{E-A})^{-1}$.

ii) L'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complet, et l'application $u : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définie par : $u(X) = E - g(F - f(X))$ est croissante pour l'inclusion, comme composée de deux applications décroissantes. En vertu du théorème 1, u admet un point fixe A, et l'on conclut via i).

iii) On peut aussi appliquer le théorème 2 au couple $(\mathcal{P}(E), u)$, avec $x_0 = \varnothing$ et $y_0 = E$.
Encore faut-il montrer que u vérifie : $A_n \uparrow A \Rightarrow u(A_n) \uparrow u(A)$ et $B_n \downarrow B \Rightarrow u(B_n) \downarrow u(B)$.
Rappelons que :
(*) L'image directe par une application de la réunion d'une famille de parties est toujours la réunion des images directes.
(**) L'image directe par une application ***injective*** de l'intersection d'une famille de parties est l'intersection des images directes.
Soient (A_n) une suite croissante, (B_n) une suite décroissante, de parties de E.

$$\begin{aligned}
\bigcup u(A_n) &= \bigcup (E - g(F - f(A_n)) = E - \bigcap g(F - f(A_n)) && \text{(lois de Morgan)}\\
&= E - g(\bigcap (F - f(A_n)) && \text{(cela découle de (**) et de l'injectivité de g)}\\
&= E - g(F - \bigcup f(A_n)) && \text{(lois de Morgan)}\\
&= E - g(F - f(\bigcup A_n)) && \text{(en vertu de (*))}\\
&= u(\bigcup A_n) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bigcap u(B_n) &= \bigcap (E - g(F - f(B_n)) = E - \bigcup g(F - f(B_n)) && \text{(lois de Morgan)}\\
&= E - g(\bigcup (F - f(B_n)) && \text{(en vertu de (*))}
\end{aligned}$$

$= E - g(F - \bigcap f(B_n))$ (lois de Morgan)

$= E - g(F - f(\bigcap B_n)$ (cela découle de (**) et de l'injectivité de f)

$= u(\bigcap B_n)$.

Exercices

Rappels : Dans un ensemble ordonné E, on appelle **chaîne** toute partie totalement ordonnée pour l'ordre induit. Un élément de E est dit **maximal** s'il n'y a pas d'élément strictement plus grand que lui. Un ensemble ordonné est dit **inductif** si toute chaîne possède un majorant. L'**axiome du choix** affirme que tout ensemble ordonné inductif admet au moins un élément maximal.

<u>Exercice 1</u> : Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $f : E \to E$ une application croissante. On suppose qu'il existe un élément b de E tel que :

i) $b \leq f(b)$; ii) Toute chaîne de $\{ x \in E ; x \geq b \}$ a une borne supérieure.

Montrer que f admet un point fixe et que l'ensemble de ses points fixes a un élément maximal λ.

[Indications : Soit $Q = \{ x \in E ; x \geq b \text{ et } x \leq f(x) \}$. Montrer que Q est non vide, et inductif. Conclure à l'aide de l'axiome du choix.]

<u>Exercice 2</u> : Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $f : E \to E$ une application croissante.
On suppose qu'il existe un élément b de E tel que :

i) $b \leq f(b)$; ii) Toute chaîne dénombrable de $\{ x \in E ; x \geq b \}$ a une borne supérieure.

Démontrer que f admet pour point fixe $\mu = \sup f^n(b)$ et que μ est le plus petit des points fixes de f qui sont $\geq b$.

<u>Exercice 3</u> : On se propose de montrer l'identité :

$$(*) \qquad (\forall x \geq 0) \qquad \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)\sqrt{1+etc.}}}}} = x + 1.$$

a) Soient E l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ ordonné pour l'ordre naturel $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \geq 0\ f(x) \leq g(x)$, et T l'opérateur $E \to E$ défini par : $(\forall x \geq 0)$ $(T f)(x) = \sqrt{1+x.f(x+1)}$.
Montrer que le couple (E, T) satisfait aux hypothèses du théorème de Tarski-Kantorovitch.

b) On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $f_0(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = \sqrt{1+x.f_n(x+1)}$.

Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction $g(x) \leq f_\infty(x) = x + 1$.

c) Si $f = T(f)$, montrer que $(\forall x \geq 0)$ $f(x) \geq x^{1-1/2^n}$. En déduire que $(\forall x \geq 0)$ $f(x) \geq x$.

d) On note $\Delta(x) = f_\infty(x) - g(x)$. Montrer que $\Delta(x) \leq \dfrac{\Delta(x+1)}{2}$. En déduire que $\Delta = 0$, puis (*).

e) Indiquer un procédé général de fabrication de fonctions vérifiant $h = T(h)$, et montrer que $f_\infty(x) = x + 1$ est la plus petite d'entre elles.

<u>Exercice 4 : Application à une équation fonctionnelle</u>.
Montrer qu'il existe une et une seule fonction réglée $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ telle que :

$\forall x \in [0, 1]$ $f(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2).dt$. Montrer que cette fonction est C^∞.

[Indication : à toute fonction réglée $y : [0, 1] \to \mathbf{R}$ associer la fonction $T(y)(x) = 1 + \int_0^x y(t-t^2).dt$, et considérer les fonctions $f_0(x) = 1$ et $g_0(x) = 1 + 6x$.]

<u>Exercice 5</u> : Soit $E = C([0, 1], \mathbf{R})$. A toute $f \in E$ on associe $T f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad (T f)(x) = \inf_{y \in [0, 1]} \{ f(y) + (x - y)^2 \}.$$

a) Montrer que $f \in E \Rightarrow T f \in E$.
b) Chercher les points fixes de T.

c) Soit $f \in$ E. Etudier le mode de convergence de la suite de fonctions ($T^n f$). [Oral ENS 2007]

Références :

Bronislaw Knaster : Un théorème sur les fonctions d'ensemble, Annales polonaises (1928)

Alfred Tarski : A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, Pacific Journal of Mathematics, vol. 5 (1955), p. 285-309.

Yiannis N. Moschovakis : Notes on Set Theory, Springer, 1994

Wikipedia : Théorème de Knaster-Tarski

PlanetMath.org : Tarski-Knaster theorem

3. Théorème de point fixe dans les espaces complets.

3.1. Un métathéorème ?...

Le théorème de point fixe que nous allons maintenant exposer est l'un des plus importants des mathématiques : il n'est pas exagéré de parler de *«métathéorème»*, tant sont nombreuses ses applications pratiques et théoriques. Il fut d'abord utilisé pour des itérations rationnelles ou réelles : l'algorithme dit de Héron d'Alexandrie de calcul approché de la racine carrée, qui remonte aux babyloniens, se rattache à ce résultat. Cependant, ce n'est qu'à la fin du XIXème siècle que Giuseppe Peano (1888) puis Émile Picard[1] eurent l'idée d'utiliser la *« méthode des approximations successives »* dans des *espaces fonctionnels*, en vue de montrer l'existence de solutions d'équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, etc. Mais la *méthode des approximations successives* ne devint *théorème de point fixe* qu'avec Stefan Banach et Renato Caccioppoli [2] dans des articles publiés respectivement en 1922 et 1930.

L'importance de ce théorème ne se résume pas à l'étendue de ses applications, elle a des motifs plus philosophiques. De nombreux objets mathématiques peuvent être caractérisés par des propriétés qui en font des points fixes de transformations, et peuvent se construire par la méthode des approximations successives. De plus, ce théorème fournit un modèle simple de dynamique stable, qui peut être utilisé notamment en physique, chimie, biologie, économie, sociologie, voire dans l'analyse des processus créatifs en littérature et en art.

Si certains artistes créent d'un seul jet (Mozart, paraît-il), d'autres au contraire remanient leur œuvre à n'en plus finir : Léonard de Vinci, La Fontaine, Beethoven, Flaubert, Proust, Giorgio Bassani… Adepte de la soustraction, Flaubert retouchait ses manuscrits en enlevant tout ce qu'il jugeait inutile, adepte de l'addition, Proust multipliait les incidentes dans ses fameuses paperolles : ils procédaient tous deux par approximations successives. Et quand Pablo Picasso se lance dans la série des taureaux, il part d'un premier dessin, le corrige plusieurs fois, produisant à chaque étape un dessin de plus en plus abstrait, et il s'arrête lorsqu'il a atteint le point fixe, *son* point fixe : la quintessence abstraite du taureau.

3.2. Le théorème de Picard-Banach.

Définition : Soit (E, d) un espace métrique. Une application f : (E, d) $\to$ (E, d) est dite **contractante** si $\exists\, k \in\,]0, 1[\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$.

Une application contractante est donc une application lipschitzienne de rapport $k < 1$.

---

[1] Émile PICARD (1856 - 1941), gendre de Charles Hermite, fut longtemps secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Il appliqua en 1890 la méthode des approximations successives à l'étude des équations intégrales, différentielles et aux dérivées partielles ; il a aussi étudié les fonctions de variable complexe. Il a adopté des positions chauvines pendant la guerre de 14, et a refusé plus tard de recevoir l'allemand Einstein.

[2] Le mathématicien napolitain Renato CACCIOPPOLI (1904-1959) a fait des travaux remarqués en analyse dans les années 1930, notamment avec P. Schauder. Intellectuel brillant et complet, ce mélomane et cinéphile averti était grand amateur de littérature française, et se lia d'amitié avec André Gide, qui lui rendit visite par deux fois à Sorrente, et a écrit en 1944 deux belles pages sur lui. Il fut emprisonné pour avoir chanté la *Marseillaise* au restaurant, lors d'une entrevue Mussolini-Hitler. Son destin (il s'est suicidé en 1959) a inspiré un film de Mario Martone, *« Morte di un matematico napoletano »*.

Théorème de Picard-Banach : Soit (E, d) un espace métrique complet, f une application k-contractante $E \to E$.

i) f admet un unique point fixe a.

ii) toute suite récurrente $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a, de façon que :

$$(\forall n) \qquad d(x_n , a) \le d(x_0 , x_1).\frac{k^n}{1-k} \qquad \text{et} \qquad d(x_n , a) \le k^n.d(x_0 , a).$$

En termes de systèmes dynamiques, le point a est un *point attractif*, de *bassin d'attraction* E tout entier, autrement dit un *point d'équilibre stable*, et toutes les suites récurrentes convergent vers a à une vitesse géométrique. On dit qu'on a construit la suite (x_n) par la *méthode des approximations successives*.

Preuve : • Unicité du point fixe : si $f(a) = a$ et $f(b) = b$, $d(a, b) \le k.d(a, b) \Rightarrow a = b$.

• Existence du point fixe : Soit $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour q < p, on a :

$$d(x_p, x_q) \le d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q)$$
$$\le (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1}) d(x_0, x_1) = \frac{k^p - k^q}{1-k} d(x_0, x_1) \le \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1) \quad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons n_0 tel que $\frac{k^{n_0}}{1-k} d(x_0, x_1) \le \varepsilon$. Alors, pour $q > p > n_0$, on a $d(x_p, x_q) \le \varepsilon$.

La suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge vers un point a. Comme f est continue, $a = f(a)$. En vertu de l'unicité, ce point a est indépendant de la condition initiale x_0.

• Vitesse de convergence. L'inégalité $d(x_n, a) \le d(x_0, x_1)\frac{k^n}{1-k}$ se déduit de (*) en fixant p = n et en faisant tendre q vers l'infini. L'inégalité $d(x_n , a) \le k^n d(x_0 , a)$ se montre par récurrence.

Remarque : Importance des hypothèses.

i) Si E n'est pas complet, le th est faux : penser à $f(x) = x/2$ dans]0, 1].

ii) Si f n'est pas contractante, mais vérifie la condition plus faible $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \ne y$, f n'a pas toujours de point fixe. Penser à $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ dans **R**.

Résultats complémentaires (on suppose toujours (E, d) complet) :

1) Théorème de point fixe étendu aux itérés : Si f est une application (E, d) → (E, d) telle qu'une *itérée p-ème* $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ (p fois) de f soit k-contractante, pour un $p \ge 1$, alors f a encore un unique point fixe a, et toute suite récurrente $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers a.

Preuve : Le théorème de Picard-Banach s'applique à f^p, qui possède un unique point fixe a.
Comme $f^p(f(a)) = f(f^p(a)) = f(a)$, l'unicité de a implique $f(a) = a$.
De plus $f(x) = x \Rightarrow f^p(x) = x \Rightarrow x = a$; a est donc l'unique point fixe de f.
Soit $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Chacune des suites $(x_{qp+r})_q$ converge vers a. La panachée (x_n) de ces p suites tend aussi vers a, à une vitesse géométrique que l'on pourra préciser.

2) Théorème de point fixe avec paramètre : Soient Λ un espace métrique, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de fonctions $E \to E$ indexée par Λ. On suppose :

i) Il existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ soit k-contractante.

ii) Pour tout $x \in E$, $\lambda \to f_\lambda(x)$ est continue $\Lambda \to E$.

Alors, pour chaque λ, f_λ a un unique point fixe $a(\lambda)$ et l'application $\lambda \to a(\lambda)$ est continue.

Preuve : En vertu du théorème de Picard-Banach, f_λ a un unique point fixe $a(\lambda)$.

$$d(a(\mu), a(\lambda)) = d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\lambda)) \le d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\mu))) + d(f_\lambda(a(\mu)), f_\lambda(a(\lambda)))$$

$$\leq \ d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\mu))) + k.d(a(\mu), a(\mu))$$

d'où $(1 - k).d(a(\mu), a(\lambda)) \leq d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\mu)))$.

Quand $\lambda \to \mu$, $f_\lambda(a(\mu)) \to f_\mu(a(\mu))$ en vertu de ii), donc $a(\lambda) \to a(\mu)$.

3.3. Applications.

1) Analyse numérique :

— Résolution approchée d'équations g(x) = 0 dans **R** ou dans un espace normé, après les avoir ramenées de manière convenable à la forme x = *f*(x). C'est toujours possible :

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + g(x) \equiv f(x)$ ou encore $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + \lambda.g(x) \equiv f(x)$ (pour $\lambda \neq 0$).

Exemples : résoudre les équations tan x = x dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, cos x = x, x.exp x = 1.

— Résolution approchée de systèmes g(x, y) = 0, h(x, y) = 0 dans $\mathbf{R}^2$. Mêmes idées.

— Résolution approchée de systèmes linéaires Ax = b, après les avoir ramenés de manière convenable à la forme x = Bx + c, avec B contractante, *i.e.* ||| B ||| < 1.

Par exemple $Ax = b \Leftrightarrow x = (I - A).x + b$, ou $Ax = b \Leftrightarrow x = (I - D.A).x + D.b$ $(\forall D \in Gl_n(\mathbf{K}))$

Lorsque A est diagonalement dominante, ou symétrique réelle définie positive, on peut toujours choisir D diagonale de manière que B = I – D.A soit contractante.

- Dans le premier cas, il suffit de poser $D = \mathrm{diag}(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}})$.

On vérifiera que B = I – D.A est contractante pour la norme $\|x\|_\infty$.

- Dans le second cas, il suffit de prendre $D = \lambda^{-1}.I$, avec $\lambda > \lambda_1$, plus grande valeur propre de A.

On vérifiera que B = I – D.A est contractante pour la norme $\|x\|_2$.

2) Équations fonctionnelles, intégrales et différentielles.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz peut se démontrer par une méthode de point fixe, en vertu de l'équivalence des propriétés suivantes :

i) y est solution de l'équation différentielle y' = *f*(x, y) telle que $y(x_0) = y_0$;

ii) y est continue et telle que $(\forall x)$ $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)).dt$.

y est donc point fixe de la transformation intégrale qui à φ associe $T(\varphi)(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)).dt$, et sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, les itérées de la fonction constante y_0 par T convergent uniformément vers y dans un « tonneau de sécurité » convenable entourant (x_0 , y_0). De même, de nombreuses équations intégrales (Volterra, Fredholm, etc.) relèvent de la méthode des approximations successives.

3) Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites. Cf. chapitre sur les fonctions de plusieurs variables.

4) Géométrie fractale.

Les courbes de Peano et de nombreuses courbes fractales obéissent à des principes d'autoreproduction qui en font des points fixes. Ce résultat est dû à Hutchinson (1981), si l'on en croit l'article de PLS. Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor K est le seul compact non vide de **R** tel que K = T(K), où T(A) = h(A) ∪ k(A), h = Hom(0, 1/3) et k = hom(1, 1/3) (cf. mon cours Espaces métriques, partie H). Il en est de même de certaines dynamiques symboliques).

Exercices

Exercice 1 : Résoudre les systèmes d'équations :

$$x = \frac{1}{4}\cos(x + y)\ ,\ y = 1 + \frac{1}{4}\,\mathrm{th}(x - y) \quad ; \quad x = \frac{1}{4}\sin(x + y)\ ,\ y = 1 + \frac{2}{3}\arctan(x - y).$$

Exercice 2 : 1) Montrer que le système d'équations $x = \frac{1}{2}\sin(x + y)$, $y = \frac{1}{2}\cos(x - y)$ admet une solution unique. La calculer à 10^{-2} près.

2) Montrer que pour tout réel t, le système $x = \frac{1}{2}\sin(x + y) + t - 1$, $y = \frac{1}{2}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2}$ admet une solution unique (x(t), y(t)), fonctions continues de t.

Exercice 3 : Soit ABC un triangle du plan euclidien. Montrer qu'il existe un unique triangle inscrit PQR (P sur la droite BC, Q sur la droite CA, R sur AB) tel que RP ⊥ BC, PQ ⊥ CA et QR ⊥ AB.

Exercice 4 : Soit $(m_0\ ,\ M_0) \in \mathbf{R}^2$. Étudier les suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$M_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \max(x,m_n).dx \quad \text{et} \quad m_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \min(x,M_n).dx\ .$$

Exercice 5 : équation de Kepler.

1) Pour tout couple $(a, t) \in [-1, 1]\times\mathbf{R}$, montrer que l'équation $x - a \sin x = t$ a une unique solution. On la note $x(a, t)$.

2) Montrer que la fonction $(a, t) \to x(a, t)$ est continue, d'abord sur $]-1, 1[\times\mathbf{R}$, puis sur $[-1, 1]\times\mathbf{R}$.

[Indication : ce dernier point utilise un argument de *compacité* qui sera vu ci-après.]

Exercice 6 : équation intégrale de Fredholm.

Soient $K : [a, b]^2 \to \mathbf{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ des fonctions continues données. Montrer que pour $|\lambda|$ assez petit à préciser, il existe une unique fonction continue $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t).\varphi(t).dt = f(x).$$

Exercice 7 : Equations fonctionnelles.

Soit (E, d) un espace métrique complet, g une application contractante $E \to E$.
Trouver toutes les fonctions continues $f : E \to E$ telles que $(\forall x \in E)\ f(x) = f(g(x))$.
Application : Trouver les fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $(\forall x)\ f(x) = f(a\,x + b)$, $|a| < 1$.

Exercice 8 : Soient X un ensemble quelconque, $B = B(X, \mathbf{R})$ l'espace de Banach des fonctions bornées de X dans $\mathbf{R}$ pour la norme uniforme, E un sous-espace vectoriel de B contenant les fonctions constantes. Soit $T : E \to E$ une application vérifiant :

i) $\forall(f, g) \in E\times E \quad f \le g \Rightarrow T(f) \le T(g)$;

ii) $\exists k \in [0, 1[\quad \forall f \in E \quad \forall c \in \mathbf{R} \quad T(f + c) \le T(f) + kc$.

Montrer que T admet un unique point fixe (Blackwell, 1965)

Exercice 9 : Soient (E, d) un espace métrique complet, f et g deux applications contractantes $E \to E$ de rapports k et k' respectifs. On les suppose ε-proches en ce sens que $d(f(x), g(x)) \le \varepsilon$ $(\forall x \in E)$.

Montrer que leurs points fixes respectifs a et b vérifient : $d(a, b) \le \dfrac{\varepsilon}{1-\max(k,k')}$.

Exercice 10 : un résultat de stabilité.

Soit (E, d) un espace métrique complet, (f_n) une suite d'applications k-lipschitziennes $E \to E$ $(k < 1)$, tendant simplement vers f sur E. On définit la suite : $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f_n(x_n)$.

Montrer qu'elle converge vers le point fixe a de f.

[Ind. : on pourra établir que si une suite (d_n) tend vers 0, il en est de même de la suite $\sum_{p=0}^{n} k^p.d_{n-p}$.]

Exercice 11 : dilatations.

Soient (E, d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ une application continue surjective telle que :

$$\exists\, k > 1 \quad \forall (x, y) \in E\times E \quad x \neq y \;\Rightarrow\; d(f(x), f(y)) \geq k.d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Comment se fait-il alors que $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ définie par $f(x) = 2x + 1$ n'ait pas de point fixe ?

Exercice 12 : 1) Soit (E, d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ une fonction telle que :

$$\exists\, k \in\,]0, ½[\qquad \forall (x, y) \in E\times E \qquad d(f(x), f(y)) \leq k\,[d(f(x), x) + d(f(y), y)].$$

Montrer que, si f satisfait cette hypothèse, elle admet un point fixe unique.

2) Soient f et $g : E \to E$ deux fonctions telles que :

$$\exists\, k \in\,]0, ½[\qquad \forall (x, y) \in E\times E \qquad d(f(x), g(y)) \leq k.[d(f(x), x) + d(g(y), y)].$$

Montrer que f et g admettent un point fixe unique, et que ce point fixe leur est commun.

Exercice 13 : Soient E un espace de Banach, $f : E \to E$ une application contractante, (α_n) et (β_n) deux suites de réels tendant vers 0. On définit la suite récurrente :

$$u_{n+1} = a_n + f(u_n) \quad , \quad \text{où} \quad \|a_n\| \leq \alpha_n \|u_n\| + \beta_n .$$

Montrer que (u_n) tend vers le point fixe de f. (Oral X 2003, RMS n° 55)

Exercice 14 : un critère d'homéomorphisme.

Soient E un espace vectoriel normé complet, et $f : E \to E$ une application contractante.

Montrer que $g : x \to x + f(x)$ est un homéomorphisme.

Problème 15 : exemple de dynamique symbolique.

Soit $E = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ à éléments dans $\{0, 1\}$. Pour $(u, v) \in E^2$, on note $k(u, v) = \min\{ n ; u_n \neq v_n \}$ si $u \neq v$ et $k(u, v) = +\infty$ sinon, et $d(u, v) = 2^{-k(u, v)}$.

1) Montrer que (E, d) est un espace *ultramétrique* (c'est-à-dire vérifiant (D1), (D2) et $d(u, w) \leq \max(d(u, v), d(v, w))$. Décrire les boules et sphères de centre a, les suites convergentes.

2) Montrer que (E, d) est complet (et même compact).

3) Mot de Fibonacci. a) Soit $\Phi : E \to E$ l'application qui, à une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$, associe la suite obtenue en remplaçant 1 par 0 et 0 par 01. Ainsi u = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, ...) devient $\Phi(u)$ = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, ...).

b) Montrer que $\forall (u, v)\in E^2 \;\; d(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \dfrac{d(u,v)}{2}$; Φ est-elle injective ? quelle est son image?

c) Montrer qu'il existe une unique suite a telle que $a = \Phi(a)$ (mot de Fibonacci). Indiquer comment l'obtenir.

4) Suite du dragon. Dans cette question, les suites sont indexées par $\mathbf{N}^*$.

a) On considère la suite s = (0, 1, 0, 1, 0, 1, …). A toute suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$, on associe la suite panachée $v = s * u = (0, u_1, 1, u_2, 0, u_3, 1, u_4 , \dots)$. Que dire de l'opérateur $\Delta : u \to s * u$?

b) Montrer qu'il existe une unique suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ telle que $a = \Delta(a)$; calculer a_{12} et a_{13}.

c) Soit $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ l'application échangeant 0 et 1.

Montrer que $a_n = f^m(0)$ si $n = 2^p (2m + 1)$. En déduire que $a_n = 0$ si le 1 le plus à droite de la décomposition binaire de n est précédé d'un 0, $a_n = 1$ sinon. Vérification avec a_{12} et a_{13}.

5) Suite du lézard. [3] Dans cette question, les suites sont indexées par $\mathbf{N}^*$.

Si a et b sont deux éléments de E, on note $a @ b = (a_1, a_2, b_1, a_3, a_4, b_2, \dots)$.

Montrer qu'il existe une unique suite a telle que $a @ a = a$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

[3] Cf. Suites fractales de nombres, *Pour la science*, mars 2007.

Exercice 16 : généralisation du théorème de Picard-Banach.

Soit (E, d) un espace métrique complet, f : E $\to$ E une application telle que, pour tout k, f^k soit q_k-lipschitzienne, avec $\sum_{k=1}^{+\infty} q_k < +\infty$. Montrer que f admet un unique point fixe a, et que toute suite récurrente $x_0 \in$ E , $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a, de façon que :

$$(\forall n) \quad d(x_n , a) \le d(x_0 , x_1) \sum_{k=n}^{+\infty} q_k \quad \text{et} \quad d(x_n , a) \le q_n\, d(x_0 , a).$$

N-B : Cet énoncé est bien adapté aux équations différentielles et intégrales (de Volterra par ex.).

4. Théorèmes de point fixe dans les espaces compacts.

Théorème : Soit (E, d) un espace métrique compact, f une application : E $\to$ E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \ne y \;\Rightarrow\; d(f(x), f(y)) < d(x, y) .$$

f admet un unique point fixe a, et toute suite récurrente $x_0 \in$ E , $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Preuve : Si f admettait deux points fixes distincts a et b, on aurait $d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b)$. Voilà pour l'unicité. Reste l'existence.

La fonction $\varphi(x) = d(x, f(x))$ est continue de E dans $\mathbf{R}_+$. En vertu du théorème des bornes, elle atteint son minimum en un point a. Supposons par absurde $\varphi(a) > 0$, c'est-à-dire $a \ne f(a)$.

On aurait $\varphi(f(a)) = d(f(a), (f \circ f)(a)) < \varphi(a) = d(a, f(a))$, contredisant la minimalité de $\varphi(a)$. Cqfd.

Considérons maintenant une suite récurrente (x_n).

– Si $x_{n(0)} = a$ pour un n(0), alors la suite est stationnaire.

– Sinon, $x_n \ne a$ pour tout n, et $d(x_{n+1} , a) < d(x_n , a)$. La suite $d_n = d(x_n , a)$ tendrait en décroissant vers un réel m. Si $m > 0$, E étant compact, (x_n) aurait une valeur d'adhérence b telle que $d(a, b) \ge m$.

Soit $x_{n(k)} \to b$. On a $d(f(x_{n(k)}), a) \to d(f(b), a) = d(f(b), f(a)) < d(b, a)$.

Or $d(f(x_{n(k)}), a) = d(x_{n(k)+1}, a) \to m$. On aurait donc $m < d(b, a)$: impossible.

Donc $m = 0$, et $d_n = d(x_n , a)$ tend en décroissant vers 0. cqfd.

Ce théorème diffère du théorème de Picard-Banach : une hypothèse est plus restrictive (la compacité implique la complétude), une hypothèse est moins restrictive (la propriété de f n'implique pas que f est contractante).[4] De plus, on ne sait rien de la vitesse de convergence : elle peut être lente, penser à $x_{n+1} = \sin x_n$.

Exercice 1 : Soient E un espace métrique compact, f : E $\to$ E une fonction continue. Montrer qu'il existe une partie non vide G de E telle que $f(G) = G$.

(Oral Mines)

Indication : Considérer la suite $K_0 = E$, $K_{n+1} = f(K_n)$, et l'ensemble $G = \bigcap K_n$.

Exercice 2 : Soient E un espace métrique localement compact, f : E $\to$ E une fonction continue, (x_n) une suite telle que $(\forall n)$ $x_{n+1} = f(x_n)$. On suppose que (x_n) possède une unique valeur d'adhérence a. Montrer que $a = f(a)$ et que (x_n) converge vers a.

Solution : 1) L'ensemble A des valeurs d'adhérence de (x_n) est f-stable, car $x_{n(k)} \to a$ implique $x_{n(k)+1} = f(x_{n(k)}) \to f(a)$. Ici, A = $\{a\}$, donc $a = f(a)$.

2) Soit B'(a, r) une boule fermée compacte de centre a ; elle existe par compacité locale de E. Comme f est continue en a, $(\exists \alpha > 0)$ $(\forall x \in E)$ $d(x, a) < \alpha \Rightarrow d(f(x), f(a)) = d(f(x), a) \le r$.

[4] Cependant, malgré ces différences, on peut déduire ce théorème du théorème de Picard-Banach : il existe en effet une distance sur E, topologiquement équivalente à d, rendant f contractante : cf. Leccia, RMS juin 1991.

Soit $0 < \varepsilon < \min(\alpha, r)$. Montrons que $\exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 \ d(x_n, a) < \varepsilon$.

• Tout d'abord $K = \{x ; \varepsilon \leq d(x, a) \leq r\}$ est un fermé inclus dans le compact $B'(a, r)$, donc compact.

• $\{n \in \mathbf{N} ; x_n \in K\}$ est fini, sinon, il existerait une suite extraite $(x_{n(k)})$ telle que $(\forall k)\ x_{n(k)} \in K$. Cette suite aurait elle-même une valeur d'adhérence $x_{n(k(p))} \to b$; et $\varepsilon \leq d(x_{n(k(p))}, a)$ impliquerait à la limite $\varepsilon \leq d(b, a)$, contredisant l'unicité de la valeur d'adhérence.

Ainsi, $\exists N \ \forall n \geq N \ x_n \notin K$.

• Comme $a \in A$, $\exists N_0 \geq N \ d(x_{N_0}, a) < \varepsilon$. Alors $d(x_{N_0+1}, a) = d(f(x_{N_0}), a) \leq r$.

Mais $x_{N_0+1} \notin K$, donc $d(x_{N_0+1}, a) < \varepsilon$. Et par récurrence, $\forall n \geq N_0 \ d(x_n, a) < \varepsilon$. Cqfd.

5. Théorème de point fixe dans les boules euclidiennes.

5.1. Propriété de point fixe.

Définition 1 : On dit qu'un espace métrique (ou topologique) X vérifie la **propriété du point fixe** (en abrégé, PPF) si toute application continue $g : X \to X$ possède au moins un point fixe.

Naturellement tout espace topologique homéomorphe à X possède aussi la propriété de point fixe.

Exemples : 1) Tout segment [a, b] de **R** vérifie la PPF.

2) **R** ne vérifie pas la PPF (penser à $x \to x + 1$), ainsi que $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} ; |z| = 1\}$ (penser à $z \to -z$).

3) $\overline{R}$ vérifie la PPF, car isométrique à $[-1, 1]$. Cela revient à dire qu'une fonction continue de **R** dans **R**, ayant des limites en $+\infty$ et en $-\infty$ possède un point fixe, fini ou non.

4) Un sous-espace d'un espace vérifiant la PPF ne vérifie pas toujours la PPF : penser à $\{-1, 1\} \subset [-1, 1]$. Cependant :

Définition 2 : Un sous-espace Y d'un espace métrique (ou topologique) X est un **rétracte** de X s'il existe une application continue $r : X \to Y$ telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in Y$. On dit alors que r est une **rétraction** de X sur Y. Si i est l'injection canonique $Y \to X$, on a $r \circ i = id_Y$.

Soit p une fonction continue $X \to X$ telle que $p \circ p = p$. Alors $Y = p(X)$ est un rétracte de X (via $r = p|_X^Y$). La réciproque est aussi vraie. Ainsi les rétractions sont les projections topologiques.

Exemples : 1) Un point de X est un rétracte de X.

2) $\{0, 1\}$ n'est pas un rétracte de $[0, 1]$ pour une raison de connexité.

3) Dans un espace normé E, la sphère unité S est un rétracte de $E-\{0\}$; une rétraction est donnée par $r(x) = x/\|x\|$.

Proposition : Si X possède la propriété du point fixe, tout rétracte de X aussi.

Preuve : Soit $g : Y \to Y$ une application continue.
L'application $f : X \to X$ définie par $\forall x \in X \ f(x) = (g \circ r)(x)$ est continue, donc admet un point fixe x. Mais f est à valeurs dans Y, donc $x = f(x)$ implique $x \in Y$, donc $r(x) = x$ et $x = g(x)$. cqfd.

Remarque : Ce résultat fonctionne dans les deux sens, direct et contraposé :
– d'une part, il fournit une vaste classe d'espaces vérifiant la PPF ;
– d'autre part, si un rétracte de X ne vérifie pas la PPF, X non plus.

5.2. Théorème de Brouwer.

Théorème de Brouwer [5] : Soit B_n la boule unité d'un espace euclidien de dimension n, $f : B_n \to B_n$ une application continue. Alors f a au moins un point fixe.

[5] Luitzen Egbertus Jan BROUWER (Overschie 1881 - Blaricum 1966), logicien et mathématicien hollandais, a fait toute sa carrière à l'Université d'Amsterdam. De 1909 à 1913 il fit des travaux de topologie algébrique,

Le théorème de Brouwer se traduit alors en disant que les boules unités B_n possèdent la propriété de point fixe. Il en résulte aussitôt tout espace topologique homéomorphe à B_n vérifie la même propriété. La réciproque est aussi vraie, de sorte que, pour établir le théorème de Brouwer, il suffit d'établir que l'un quelconque des espaces homéomorphes à B_n possède la propriété de point fixe.

<u>Le cas *n* = 1</u>.

Pour $n = 1$, B_1 est le segment $[-1 , 1]$. Le théorème est une conséquence facile du théorème des valeurs intermédiaires : la fonction $f(x) - x$ change de signe entre -1 et 1, donc s'annule.

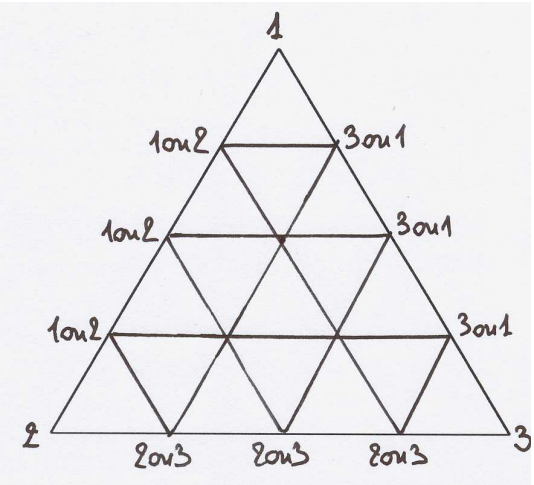
Voici une démonstration élémentaire et ludique de ce résultat : partageons $[-1, 1]$ en 2, 4, 8, … , 2^n segments égaux, par dichotomie. Affectons à chaque point de la subdivision obtenue, 0 si $x \leq f(x)$, et 1 si $f(x) \leq x$ (en cas d'égalité, on aura le choix), en convenant d'affecter à -1 la valeur 0 et à 1 la valeur +1. Dans la subdivision, il y a forcément deux points consécutifs a_n et b_n qui se voient affecter des valeurs distinctes. Il y a même, en y réfléchissant, un nombre impair de couples de points consécutifs qui sont dans ce cas. Si l'on extrait par compacité de la suite (a_n, b_n) une suite convergente $(a_{n(k)}, b_{n(k)}) \to (c, d)$, alors $c = d$ parce que les longueurs tendent vers 0. Et $f(c) \leq c \leq f(c)$, donc c est un point fixe de f.

Voici une autre preuve, lorsque f est de classe C^1, par absurde. Si pour tout x, $f(x) \neq x$, la demi-droite d'origine $f(x)$ passant par x rencontre $\{-1, +1\}$ en un seul point $\varphi(x)$. La fonction $\varphi : [-1, 1] \to \{-1, +1\}$ ainsi définie est de classe C^1 (pourquoi ?) Dérivant l'identité $\varphi(x)^2 = 1$, il vient $2\varphi(x)\varphi'(x) = 0$, donc $\varphi'(x) = 0$. Ainsi, φ est constante, contredisant $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(-1) = -1$.
Si f est continue, f est limite uniforme d'une suite (f_n) de fonctions de classe C^1 (polynomiales par exemples). Chaque f_n a au moins un point fixe x_n, et on peut procéder par extraction.

<u>Le cas *n* = 2 : la preuve simpliciale de Sperner</u>.

Pour $n = 2$, B_2 est un disque unité fermé. Il existe deux preuves classiques du théorème de Brouwer, l'une liée à la géométrie différentielle, l'autre combinatoire et polygonale, due à Sperner, que nous allons exposer pour commencer.

Commençons par noter que le disque est homéomorphe à un triangle équilatéral plein T.
Cela est laissé en exercice.



<u>Le jeu des bons triangles</u>

Numérotons les trois sommets de T 1, 2 et 3. Découpons T en 4 triangles égaux, en joignant les milieux des côtés, et répétons cette opération n fois. On découpe ainsi T en 4^n triangles équilatéraux égaux $T_{n,i}$ $(1 \leq i \leq 4^n)$ dont la réunion est T.

On numérote chacun des 3.2^n sommets situés sur les côtés de T en posant la règle suivante : les sommets situés sur le coté [i, j] de T portent un numéro $\in \{i, j\}$. Quant aux sommets intérieurs, ils sont numérotés librement dans $\{1, 2, 3\}$.

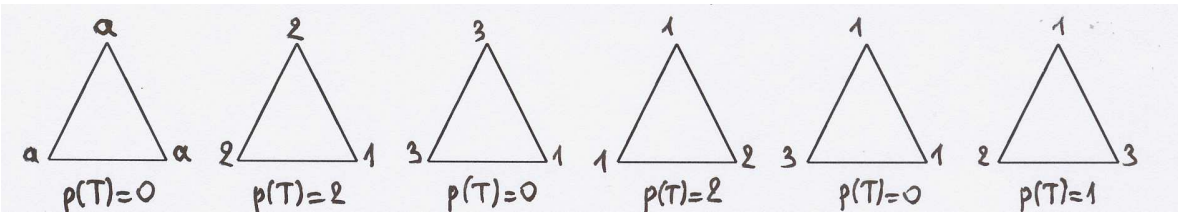
---

démontrant l'un des plus beaux théorèmes, le théorème du point fixe, dont les applications et généralisations, de la théorie des jeux aux équations différentielles, se sont révélées fondamentales. Après 1907, à partir d'une philosophie originale du raisonnement mathématique, il développe l'intuitionnisme, prolongeant certaines idées de Kronecker, et rejoint par Hermann Weyl. L'intuitionnisme est devenu aujourd'hui, sans doute contre sa volonté, une des grandes branches formalisées de la logique ; mais Brouwer ne réussit pas à imposer les mathématiques intuitionnistes, qui demeurent un objet de curiosité. (E. U.)

Je dis, que, quelle que soit la façon dont on a procédé, il existera toujours au moins un petit triangle $T_{n,i}$ dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3.

Pour tout triangle $T_{n,i}$ de sommets numérotés 1, 2 ou 3, notons $p(T_{n,i})$ le nombre d'arêtes de $T_{n,i}$ d'extrémités (1, 2). On vérifie dans tous les cas l'équivalence :

$$p(T_{n,i}) \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow \text{les sommets de } T_{n,i} \text{ sont numérotés } (1, 2, 3).$$



Nous dirons alors que $T_{n,i}$ est un « bon triangle » s'il a pour sommets 1, 2 et 3.

Le nombre N de bons triangles parmi les 4^n vérifie $N \equiv \sum_{i=1}^{4^n} p(T_{n,i}) \pmod 2$.

Mais $p(T_{n,i})$ est le nombre des bonnes arêtes de $T_{n,i}$, c'est-à-dire des arêtes (1, 2).
Or, dans la somme précédente, les arêtes intérieures sont comptées deux fois.
Donc $N \equiv k \pmod 2$, où k est le nombre d'arêtes extérieures d'extrémités (1, 2).
Ces arêtes se trouvent toutes sur le côté [1, 2] du triangle.
Tout revient à montrer que k est impair.

Soient $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ ou 2, $a_2 = 1$ ou 2, … , $a_{2\wedge(n-1)} = 1$ ou 2, $a_{2\wedge n} = 2$ les numéros des sommets consécutifs situés sur le côté [1, 2].

On a $1 = a_{2\wedge n} - a_0 = \sum_{i=0}^{2^n-1}(a_{i+1}-a_i) \equiv k \pmod 2$, donc $N \equiv 1 \pmod 2$.

Conclusion : le nombre N de bons triangles n'est pas nul, car il est impair !

<u>Revenons à nos moutons</u>.

Soit *f* une fonction continue $T \to T$.
Tout point M du triangle T s'écrit de manière unique comme barycentre des sommets 1, 2 et 3 affectés des masses $\alpha(M)$, $\beta(M)$ et $\gamma(M)$ positives et de somme 1.
Considérons les trois ensembles :

$F_1 = \{ M \in T ; \alpha(f(M)) \leq \alpha(M) \}$ $F_2 = \{ M \in T ; \beta(f(M)) \leq \beta(M) \}$ $F_3 = \{ M \in T ; \gamma(f(M)) \leq \gamma(M) \}$.

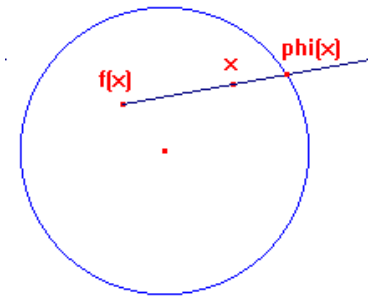
Ce sont trois fermés, de réunion T. Il est en effet impossible que l'on ait à la fois $\alpha(f(M)) > \alpha(M)$, $\beta(f(M)) > \beta(M)$ et $\gamma(f(M)) > \gamma(M)$, puisque les deux sommes sont égales à 1.
De plus (cas d'égalité dans une somme d'inégalités) :

$$F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{ M \in T ; \alpha(f(M)) = \alpha(M), \beta(f(M)) = \beta(M) \text{ et } \gamma(f(M)) = \gamma(M) \}$$
$$= \{ M \in T ; f(M)) = M \}$$

C'est l'ensemble des points fixes de f !
Le sommet 1 appartient à F_1, car $\alpha(1) = 1$, $\beta(1) = \gamma(1) = 0$.
De même le sommet 2 appartient à F_2, et le sommet 3 à F_3.
Les points appartenant au côté [1, 2] vérifient $\gamma(M) = 0$; donc ils sont tous dans $F_1 \cup F_2$.
Idem pour les points appartenant aux côtés [2, 3] et [3, 1].
A chaque point intérieur affectons un numéro i tel que $M \in F_i$.
Cette règle d'affectation obéit aux règles du jeu précédent.
En vertu de ce qui précède, pour tout n, il existe toujours au moins un bon petit triangle $A_nB_nC_n$, tel que $A_n \in F_1$, $B_n \in F_2$, $C_n \in F_3$.
Par compacité de $T \times T \times T$, il existe une suite extraite telle que $(A_{n(k)}, B_{n(k)}, C_{n(k)})$ converge vers $(P, Q, R) \in F_1 \times F_2 \times F_3$. Comme les côtés du triangle tendent vers 0, $P = Q = R \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$.
Il y a donc au moins un point fixe. Cqfd.

La démonstration que nous venons d'exposer est loin d'être anecdotique. On notera son caractère combinatoire et algébrique, lié à une triangulation du domaine T. Elle se généralise en dimension n, donnant naissance à un important chapitre de la topologie algébrique, l'homologie simpliciale.

<u>Preuve différentielle du théorème de Brouwer</u>.



Dans cette preuve, on revient à la boule initiale B_2.
Soient donc E le plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, B la boule unité fermée, S la sphère unité, U un ouvert contenant B.

1) <u>Soit f : U $\to$ E une fonction de classe C^1 telle que f(B) $\subset$ B. Je dis que $\exists$x$\in$B f(x) = x</u>.

<u>Raisonnons par absurde</u> : supposons $(\forall x \in B)\ f(x) \neq x$.
Pour $x \in B$, la demi-droite d'origine $f(x)$ passant par x recoupe S en un point unique $\varphi(x)$.
Ecrivons $\varphi(x) = x + \lambda.(x - f(x))$. $\|\varphi(x)\|^2 = 1$ conduit à une équation du second degré que l'on formera, et dont le lecteur explicitera la racine $\lambda \geq 0$.
On en déduit que la fonction $x \to \varphi(x)$ est de classe C^1, vérifiant bien sûr $x \in S \Leftrightarrow x = \varphi(x)$.
Notons $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ les composantes de $\varphi(x)$.

La formule de Riemann-Green : $\int_{\partial K} P.dx+Q.dy = \iint_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}).dxdy$

implique, avec Q = x, et P = 0 : $\pi = \iint_B dxdy = \int_S x.dy = \int_S \varphi_1.d\varphi_2 = \iint_B d\varphi_1 d\varphi_2 = 0\ldots$

car $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$ sont deux vecteurs tangents à S, donc liés ($d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = 0$). Ainsi $\pi = 0$!

2) <u>Soit f : B $\to$ B une fonction continue. Je dis que $\exists$x $\in$ B f(x) = x</u>.

Raisonnons toujours par absurde : supposons $(\forall x \in B)\ f(x) \neq x$.

Lemme 1 : Il existe $r \in\ ]0, 1[$ tel que $g = r.f : B \to B$ soit sans point fixe.

En effet, sinon, pour tout $r \in\ ]0, 1[$, il existerait $x_r \in B$ tel que $r.f(x_r) = x_r$.
Prenant $r = 1 - 1/n$, il existerait $x_n \in B$ tel que $(1 - 1/n).f(x_n) = x_n$.
Conclure par compacité et extraction…

Lemme 2 : $\exists\ a > 0\ \ \forall x \in B\ \ \|g(x) - x\| \geq a$.

Simple conséquence du théorème des bornes, et du lemme 1.

Lemme 3 : Il existe une fonction $\overline{g} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ continue à support compact prolongeant g.

$\overline{g}(x) = g(x)$ pour $\|x\| \leq 1$, $\overline{g}(x) = (2 - \|x\|)g(\frac{x}{\|x\|})$ pour $1 \leq \|x\| \leq 2$, $\overline{g}(x) = 0$ pour $2 \leq \|x\|$

Lemme 4 : Il existe une fonction $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de classe C^∞ telle que :

$$\forall x \in B \quad \|h(x) - g(x)\| < \inf(a, 1 - r).$$

Ce résultat s'obtient par régularisation. Il suffit de choisir une suite « en delta » (φ_n) de fonctions de classe C^∞ à support compact vérifiant les trois axiomes :

(Δ1) $\forall n\ \ \forall (x, y)\ \ \varphi_n(x, y) \geq 0$;

(Δ2) $\forall n\ \ \iint_{R^2} \varphi_n(x,y).dxdy = 1$;

(Δ3) $\forall \alpha > 0\ \ \lim_n \iint_{x^2+y^2 \geq \alpha^2} \varphi_n(x,y).dxdy = 0$.

On montre alors que les convolées $h_n(x, y) = \iint_{R^2} \overline{g}(s,t)\varphi_n(x-s,y-t).dsdt$ tendent uniformément vers $\overline{g}$ sur $\mathbf{R}^2$. Concluons !

$h(B) \subset B$ car $\forall x \in B$ $\|h(x)\| \leq \|g(x)\| + \|h(x) - g(x)\| \leq r + \inf(a, 1-r) \leq r + (1-r) = 1$;
h est sans point fixe, car $(\exists x \in B)$ $h(x) = x \Rightarrow \|x - g(x)\| = \|h(x) - g(x)\| < a$, contredisant le lemme 2. Or h a un point fixe par le 1).

Cette preuve s'étend elle aussi en dimension *n*, via la formule de Stokes.

5.3. <u>Applications et métamorphoses du théorème de Brouwer</u>.

Dans ces applications et généralisations on supposera le théorème de Brouwer établi pour tout n.

Théorème de Brouwer général : Soit K un compact convexe non vide de $\mathbf{R}^n$. Toute application continue $f : K \to K$ possède au moins un point fixe ; autrement dit, K possède la PPF.
Plus généralement, soient K un compact convexe non vide de $\mathbf{R}^n$, $f : K \to \mathbf{R}^n$ une application continue telle que $f(\mathrm{Fr}\, K) \subset K$. Alors f possède au moins un point fixe dans K.

<u>Preuve</u> : Soit P la projection convexe sur K. Elle est continue car 1-lipschitzienne.
1) Il existe une boule fermée $B = \overline{B}(O,r)$ contenant K. La restriction à B de la projection convexe, $r = P|_B^K$ est une rétraction, et K est un rétracte de B. On conclut via la prop. 1 de 5.1.

2) K et f(K) étant compacts donc bornés, il existe $r > 0$ tel que $K \cup f(K) \subset \overline{B}(O,r)$.
Soit $h : \overline{B}(O,r) \to \mathbf{R}^n$ définie par $h(x) = f(P(x))$. Déduire de l'étude de h que f possède au moins un point fixe dans K.

Théorème de non rétraction : Soit B la boule unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, S la sphère unité. Il n'y a pas de fonction continue $f : B \to S$ telle que $(\forall x \in S)$ $f(x) = x$.

<u>Preuve</u> **:** Considérer la fonction $-f$…
Au fond, B vérifie la PPF, S ne la vérifie pas $(x \to -x)$; S ne peut être un rétracte de B

Théorème : **La sphère unité n'est pas contractile**, en ce sens qu'il n'existe pas d'application continue $h : S\times[0, 1] \to S$ telle que $h(x, 0) = x$ pour tout $x\in S$ et $h(x, 1) = y$ pour tout $x\in S$.

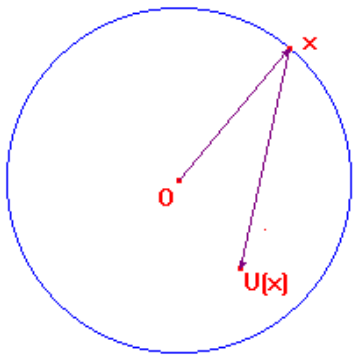
<u>Preuve</u> : On définit $f : B \to S$ par $f(x) = h\left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right)$ si $x \neq 0$, $f(x) = y$ si $x = 0$.

On montrera que f est continue et contredit le théorème de non rétraction.

Théorème du champ rentrant : Soit B la boule unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, S la sphère unité, $U : B \to \mathbf{R}^n$ une application continue telle que $(\forall x \in S)$ $(Ux \mid x) < 0$.
Alors U s'annule en un point de B.

Géométriquement, U est un champ de vecteurs défini sur la boule tel qu'en tout point x de la sphère, les vecteurs x et U(x) fassent un angle obtus.

<u>Preuve</u> : Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $f : x \to x + \varepsilon.U(x)$ laisse stable B.



Alors f aura un point fixe dans B, c'est-à-dire que U s'annulera.
La fonction $\varphi(x) = (Ux \mid x)$ est continue, donc uniformément continue sur B.
Notons $-\alpha = \max_{x\in S} (Ux \mid x) < 0$.
Alors $\exists\eta > 0$ $\forall(x, y) \in B^2$ $\| x - y \| \leq \eta \Rightarrow | \varphi(x) - \varphi(y) | \leq \frac{\alpha}{2}$.

$$1 - \eta \leq \| y \| \leq 1 \Rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(x) + \frac{\alpha}{2} \leq -\frac{\alpha}{2},$$

en notant $x = \frac{y}{\|y\|}$, qui vérifie bien $\| x - y \| \leq \eta$.

Notons $M = \max_{x \in S} \| Ux \|^2$. On a, pour $1 - \eta \leq \|y\| \leq 1$,

$$\| y + \varepsilon.U(y) \|^2 = \|y\|^2 + 2\varepsilon\,(U(y) \mid y) + \varepsilon^2 \| U(y) \|^2 \leq 1 - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 M^2$$

pour $\|y\| \leq 1 - \eta$, $\| y + \varepsilon.U(y) \|^2 \leq (1 - \eta)^2 + 2\varepsilon.M + \varepsilon^2 M^2$.

On peut choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que ces deux majorants soient ≤ 1. cqfd.

5.4. Aspects calculatoires.

Le théorème de Brouwer assure l'existence d'au moins un point fixe d'une fonction continue *f* de B_n dans B_n, mais jusqu'à la fin des années 1960, les méthodes de calcul pour trouver un tel point fixe étaient très limitées, et supposaient des propriétés additionnelles de *f*. Scarf développa en 1967 un algorithme fini basé sur le lemme de Sperner pour approcher ce point fixe. Pour améliorer la précision, les premiers programmes utilisaient en subroutine une méthode de Newton dépendant de *f*. Par des techniques d'homotopie, Eaves améliora en 1972 l'algorithme de Scarf en évitant la méthode de Newton (cf. Granas-Dugundji, p. 108). Quant à trouver l'épi dans la chevelure d'un joli spécimen de l'un ou l'autre sexe, nul besoin d'un savant algorithme pour le repérer…

5.5. Théorèmes de Schauder, Tychonov et Leray.

L'extension du théorème de Brouwer en dimension infinie pose des problèmes qui ont été élucidés à partir des années 1930 par le polonais J. Schauder [6], le russe A. Tychonov et le français J. Leray.

---

[6] Pavel Julius SCHAUDER (Lemberg, auj. Lvov, 1899 - Lvov 1943) est né dans une famille juive de Galicie, région de Pologne alors rattachée à l'Empire austro-hongrois. Son père, Samuel Schauder, était avocat. Pavel fit ses études à Lvov et fut enrôlé dans l'armée austro-hongroise en 1917. Il combattit en Italie où il fut fait prisonnier. Après l'effondrement de l'Empire austro-hongrois, il rejoignit l'armée polonaise organisée en France et revint en 1919 à Lvov, devenue polonaise, pour suivre les cours de l'Université Jan Kazimierz. Il passa son doctorat en 1923, sous la direction de Steinhaus, avec une thèse sur *La theorie des mesures de surface*. Il enseigna au lycée tout en travaillant pour une firme d'assurances. En 1927, il publia un article intitulé *Contributions à la théorie des applications continues sur les espaces fonctionnels*, dans lequel il définit et étudie les bases de Schauder (généralisation aux espaces de Banach des bases des espaces vectoriels de dimension finie). Il put alors enseigner à l'Université, tout en poursuivant ses cours dans le secondaire (car il était mal payé). Schauder épousa en 1929 Emilia Löwenthal, issue elle aussi d'une famille juive, bien que son grand-père ait été expulsé de la communauté juive pour athéisme ; ils eurent une fille prénommée Eva.

Schauder fit partie de l'école d'analyse dirigée par Banach, et fit des travaux d'analyse fonctionnelle et de topologie algébrique. Il étudia les opérateurs compacts dans les espaces de Banach. En 1930, il démontra des théorèmes de point fixe généralisant celui de Brouwer aux espaces de Banach. En 1932-33, une bourse Rockefeller lui permit d'aller étudier à Leipzig, puis à Paris, avec Hadamard. C'est là qu'il fit la connaissance de Jean Leray (1906-1998). Leur collaboration déboucha sur un article publié en 1934 dans les *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* sous le titre *Topologie et équations fonctionnelles* : il porte sur les équations aux dérivées partielles. Généralisant des résultats de Courant, Friedrichs et Lewy sur les EDP hyperboliques, la théorie de Leray-Schauder valut à leurs auteurs le Grand prix international de mathématiques Malaxa en 1938. Schauder collabora aussi avec le mathématicien napolitain Renato Caccioppoli sur les équations aux dérivées partielles elliptiques.

Lorsque éclate la Seconde guerre mondiale, Lvov est englobée dans la zone d'occupation soviétique. Schauder est bien traité, et nommé professeur à l'université, rebaptisée Ivan Franko. En 1941, l'armée allemande entre à Lvov, et extermine systématiquement les juifs. Schauder envoie des appels à Hopf et Heisenberg, leur disant qu'il a beaucoup d'importants résultats, mais pas de papier pour les rédiger. Il y a deux versions de sa mort : selon la première, il fut livré à la Gestapo, et disparut comme de nombreux juifs ; selon l'autre, il fut assassiné par la Gestapo en septembre 1943. Sa femme Emilia et sa fille Eva furent ensuite cachées les égouts de Lvov par la résistance polonaise. Emilia se rendit aux nazis et fut envoyée au camp de concentration de Lublin, où elle mourut. Sa fille Eva survécut et rejoignit en Italie le frère de son père.

Après guerre, Jean Leray écrivit à Stanislas Ulam pour obtenir une photo de Schauder, pour lui-même et pour Eva Schauder. Plusieurs mois après la mort de Von Neumann, Ulam découvrit dans sa bibliothèque une

Commençons par un constat négatif : le théorème de Brouwer ne s'étend pas aux boules unités des espaces normés de dimension infinie.

Théorème 1 (Kakutani, 1943) : La boule unité fermée de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{N}^*)$ des suites de carré sommable ne possède pas la propriété de point fixe.

<u>Preuve</u> : Rappelons que $B = \{ x = (x_n) ; \sum_{n=1}^{+\infty}(x_n)^2 \leq 1 \}$ n'est pas compacte, puisque de la suite $(e_n) = (\delta_{n,k})_k$ d'éléments de B, qui vérifie $\| e_m - e_n \| = \sqrt{2}$, on ne peut extraire aucune suite convergente.

Considérons la fonction $f : B \to B$ définie par :

$$f : x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (\sqrt{1-\|x\|^2} , x_1, x_2, \dots).$$

On a pour tout x, $\| f(x) \| = 1$. De plus, f est continue et sans point fixe : exercice !

Théorème 2 (Dugundji, 1955) : Plus généralement, la boule unité fermée B d'un espace normé E de dimension infinie ne possède jamais la propriété de point fixe.

<u>Etapes de la preuve</u> :

1) Construire par récurrence une suite (e_n) de vecteurs de norme 1 telle que, pour tout n, $d(e_{n+1}, \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = 1$ (voir chapitre sur les evn, § 9).

2) Montrer que la réunion L des segments $[e_1, e_2] \cup [e_2, e_3] \cup \dots$ est un fermé de B, homéomorphe à la demi-droite $[1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$. Soit $\theta : L \to [1, +\infty[$ un tel homéomorphisme.
C'est assez évident géométriquement.

3) Appliquer le théorème de Tietze-Urysohn qui affirme que, si A est un fermé non vide d'un espace métrique (E, d), toute fonction continue f de A dans $\mathbf{R}$ peut se prolonger en une fonction continue $g : E \to \mathbf{R}$.
L'identité de L peut se prolonger en une fonction continue $B \to L$.
En effet, en vertu de Tietze-Urysohn, θ peut se prolonger en une fonction g continue : $B \to [1, +\infty[$; alors $\theta^{-1} \circ g$ est continue et prolonge id_L.
L est donc un rétracte de B. Or L ne possède pas la PPF (penser à $x \to x + 1$), donc B non plus.

Si l'on veut obtenir des théorèmes de point fixe dans les espaces de dimension infinie, il faut, soit renforcer les propriétés de l'ensemble de définition, soit renforcer celles des fonctions considérées.

Théorème de Schauder-Tychonov : Soit K un compact convexe non vide d'un espace de Banach. Toute application continue $f : K \to K$ possède au moins un point fixe dans K.

Autrement dit, tout compact convexe non vide d'un Banach possède la PPF.

Nous allons montrer ce théorème dans le cas particulier du cube de Hilbert :
Soient $L^2(\mathbf{N}^*)$ l'espace de Hilbert des suites de carré sommable à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$,

Q l'ensemble des suites $u = (u_n)$ telles que $\forall n \geq 1 \ \ | u_n | \leq \frac{1}{n}$.

Q est un convexe compact, appelé **cube de Hilbert**.
Soit $f : Q \to Q$ une fonction continue. Montrons que f admet un point fixe.
Soit p_n la projection : $u = (u_k) \to p_n(u) = (u_0, u_1, \dots, u_n, 0, 0, \dots)$.
$Q_n = p_n(Q)$ est homéomorphe à la boule unité de $\mathbf{K}^n$, et $p_n \circ f$ induit une application continue de Q_n dans Q_n. Le théorème de Brouwer implique l'existence de x_n tel que $(p_n \circ f)(x_n) = x_n$.

Comme Q est compact, la suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{n(k)})$ convergente vers un point a de Q.
Comme $\| (p_n \circ f)(x_n) - f(x_n) \|^2 \leq \sum_{k>n}\frac{1}{k^2}$, on a :

---

photo de groupe de topologistes participant à la Conférence de Moscou de 1935. Schauder y figurait en compagnie notamment d'Alexandrov, Lefschetz et Borsuk.

$\| (p_{n(k)} \circ f)(x_{n(k)}) - f(x_{n(k)}) \|^2 = \| x_{n(k)} - f(x_{n(k)}) \|^2 \to 0$, donc $f(a) = a$.

Cette preuve est utile dans la démonstration du théorème général (cf. Edwards § 3.6., p. 161, RMS nov 1994, p. 282, Gonnord Tosel, p. 94, Doukhan-Sifre, Granas-Dugundji, p. 147).

Théorème de Leray[7]**-Schauder** (1934) : Soient E un espace de Banach, f une application compacte de E dans lui-même (*i.e.* l'image de tout borné est relativement compacte). On suppose qu'existe C > 0 tel que $\forall(\lambda, x) \in [0, 1]\times E \quad x = \lambda f(x) \Rightarrow \|x\| \leq C$. Alors f admet un point fixe.

<u>Preuve</u> : Soit r > C tel que $\|x\| \leq C \Rightarrow \| f(x) \| < r$.
Soient B la boule fermée de centre 0 et de rayon r, et g l'application de B dans B définie par :

$$g(x) = f(x) \text{ si } \| f(x) \| \leq r \quad , \quad g(x) = \frac{r.f(x)}{\|f(x)\|} \text{ sinon .}$$

Il est facile de voir que g vérifie les hypothèses du théorème de Schauder ; g a dont un point fixe dans B. Il suffit alors de prouver $\| f(x) \| \leq r$. Mais si ce n'était pas le cas, on aurait $x = \frac{r.f(x)}{\|f(x)\|}$, ce qui impose $\|x\| \leq C$ vu l'hypothèse, et donc $\| f(x) \| \leq r$: contradiction !

Ce théorème, corollaire du précédent, est très utile pour montrer l'existence de solutions d'équations différentielles ou aux dérivées partielles à l'aide d'estimations a priori des solutions.
(cf Gonnord-Tosel, p.95, ENS Ulm 1998, Granas-Dugundji).

5.6. <u>Théorème de Kakutani</u>.

---

[7] Jean LERAY (Chantenay 1906 - 1998), mathématicien français dont les travaux sont centrés sur les équations aux dérivées partielles; c'est à propos de problèmes posés par cette théorie qu'il a forgé de nouveaux outils mathématiques qui sont devenus fondamentaux, en analyse et en topologie algébrique notamment.

Né près de Nantes, Jean Leray fut élève de l'École normale supérieure de 1926 à 1929. Il alla en 1932 à Berlin, puis à Leipzig, et il comptait se rendre à Göttingen lorsque la situation politique allemande le contraignit à interrompre ses études. Il a enseigné à la faculté des sciences de Nancy, puis à celle de Paris ; de 1947 à 1978 il a occupé la chaire de théorie des équations différentielles et fonctionnelles au Collège de France. Membre de l'Académie des sciences, Jean Leray a obtenu de nombreux prix nationaux et internationaux.

Dans sa thèse (1933), Leray établit un théorème d'existence pour la solution stationnaire de l'équation du mouvement d'un liquide visqueux incompressible. C'est pour systématiser sa nouvelle approche des problèmes non linéaires que Leray, dans l'article *Topologie et espaces fonctionnels* (1934), écrit en collaboration avec J. Schauder, étend aux espaces de Banach la théorie du degré topologique d'une application, ce qui permet d'obtenir pour ces espaces les théorèmes les plus importants de la topologie algébrique ; cette nouvelle technique lui permet d'obtenir des théorèmes d'existence dans la théorie du sillage et dans la théorie des jets.

Leray consacra ses cinq années de captivité pendant la Seconde Guerre mondiale à élaborer et à développer des concepts tout à fait nouveaux : c'est ainsi qu'on lui doit les notions de faisceau, de cohomologie à coefficients dans un faisceau et de suite spectrale, pour ne citer que les plus importantes, qui ont complètement transformé tant la géométrie algébrique que la topologie algébrique contemporaines (Il se consacra volontairement à ces sujets abstraits pour éviter de voir ses travaux utilisés par les Allemands). En 1952, il généralise le calcul symbolique de Heaviside sous une forme qui lui permet d'obtenir d'importants résultats sur les équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, tandis que, dans une série de cinq articles fondamentaux sur le problème de Cauchy, publiés de 1957 à 1962, il développe le calcul différentiel et intégral (formule des résidus, transformation de Laplace) sur une variété analytique complexe et l'applique aux équations aux dérivées partielles. Leray fit d'importants travaux jusqu'à un âge avancé. Ses derniers travaux portent sur la théorie de Maslov des développements asymptotiques.

Jean Leray n'a presque pas eu d'élèves. Contemporain exact d'André Weil, auquel il n'a pas pardonné sa quasi-désertion en 1940, Leray renonça dès l'été 35 à participer au groupe Bourbaki, et fut remplacé par Ehresmann. Les circonstances expliquent peut-être ce départ, mais sans doute aussi le fait que Leray était opposé à l'idée d'une refondation complète, *ex nihilo*, des mathématiques : ce grand créateur dans la lignée de Poincaré, était, sur le plan philosophique, un homme de continuité et non de ruptures ; la *tabula rasa* lui semblait illusoire.

En 1941, Kakutani [8] a généralisé le théorème de Brouwer à des applications multivoques, c'est-à-dire des applications qui associent à tout point un convexe compact.

Théorème de Kakutani (1941) : Soient K un compact convexe de $\mathbf{R}^n$, T : x $\to$ T(x) une application qui à tout élément x de K associe un convexe compact non vide de K.
On suppose que G = { (x, y) $\in$ K×K ; y $\in$ U(x) } est fermé.
Alors il existe un point x $\in$ K tel que x $\in$ U(x).

<u>Preuve</u> : cf. Smart, p. 69, et Granas-Dugundji, p. 166.

Le théorème de Brouwer et ce théorème de Kakutani ont des applications à la théorie de l'équilibre général en microéconomie. Grâce à eux, Gérard Debreu a énoncé l'un des théorèmes d'existence les plus complets et les plus généraux. On pourra consulter à ce sujet Henderson & Quandt, etc.

6. <u>Points fixes dans les ensembles convexes</u>.

6.1. <u>Fonctions affines</u>.

Définition : Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines réels, A une partie convexe de $\mathcal{E}$. Une application T : A $\to$ $\mathcal{F}$ est dite **affine** si :

$$\forall(x_1, ..., x_p) \in A^p \quad \forall(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbf{R}_+^p \quad \sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1 \Rightarrow T(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i.x_i) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i.T(x_i).$$

Théorème de Markov-Kakutani (1936) : Soient E un espace normé, K un compact convexe non vide de E.

1) Soit T : E $\to$ E une application affine continue telle que T(K) $\subset$ K. T admet un point fixe.

2) Soit $(T_i)_{1\le i\le n}$ une famille commutative d'applications affines continues de E dans E stabilisant K. Alors les T_i admettent un point fixe commun.

3) Soit $\mathcal{F} = (T_i)_{i\in I}$ une famille commutative d'applications affines continues de E dans E stabilisant K. Alors les T_i admettent un point fixe commun.

---

[8] Shizuo KAKUTANI (Osaka, 1911-New Haven, 2004). Second fils d'un homme de loi, Shizuo Kakutani était destiné à suivre les traces de son père. Il fut initié aux mathématiques par son frère aîné Seiichi, de huit ans plus âgé, étudiant en physique à l'Université de Kyoto. Hélas Seiichi mourut de la typhoïde à 20 ans. Shizuo entra à l'Ecole supérieure de Konan à Kobe, pour préparer son entrée à l'Université. En voyant son fils si passionné de mathématiques, son père fléchit et le laissa suivre sa vocation. Fautes de références suffisantes, Shizuo ne put se présenter aux Universités de Tokyo et de Kyoto, et fut admis de justesse à celle de Tohoko à Sendai. C'est là qu'il fut initié à la théorie des fonctions analytiques. Il lut divers textes classiques, de Stone et Banach notamment, et acquit une solide formation en analyse moderne. Nommé assistant à l'Université d'Osaka en 1934, il rédigea avec K. Yosida un article sur la théorie de Nevanlinna. Il publia un grand nombre de papiers en analyse fonctionnelle et théorie ergodique, ainsi que sur les surfaces de Riemann. Ces articles attirèrent l'attention de H. Weyl, qui l'invita en 1940, pour deux ans, à l'Institute for Advanced Studies de Princeton. Kakutani collabora avec les équipes de Weyl et de von Neumann (théorie de la mesure, théorie ergodique), et rencontra Ambrose, Halmos, Doob, Erdös, Birkhoff père et fils, Stone, Wiener et Hille. Lorsqu'en décembre 1941 éclata la guerre entre les Etats-Unis et le Japon, Kakutani se trouva dans une situation délicate, mais il resta à Princeton et ne rentra au Japon qu'à l'été 1942. Nommé assistant à l'Université d'Osaka, il reprit ses travaux avec Yosida, qui était à Nagoya, et entama une collaboration avec un collègue de Yosida, K. Ito. Malgré les difficultés de la guerre, Kakutani continua à produire un grand nombre d'articles originaux. A nouveau invité en 1948 à l'Institute for Advanded Studies de Princeton, il fut nommé en 1949 à l'Université de Yale, où il resta jusqu'à sa retraite en 1982. Lors d'un de ses fréquents voyages à New-York, il rencontra Kay Uchida, qu'il épousa en 1952 ; ils eurent une fille Michiko.

Les travaux de Kakutani concernent divers domaines des mathématiques : analyse complexe, groupes topologiques, théorèmes de point fixe, espaces de Banach et de Hilbert, processus de Markov, théorie de la mesure, flots, mouvement brownien et théorie ergodique.

Preuve : 1) Soit $a \in$ K ; la suite $x_n = \dfrac{a+Ta+T^2a+...+T^n a}{n+1}$ est à valeurs dans K par convexité.

$T(x_n) - x_n = \dfrac{T^{n+1}(a)-a}{n+1}$ tend vers 0 car $\| T(x_n) - x_n \| \leq \dfrac{D}{n+1}$, où D est le diamètre de K.

D'autre part, K étant compact, (x_n) admet au moins une valeur d'adhérence b : si $x_{n(k)} \to b$, il vient $T(x_{n(k)}) - x_{n(k)} \to T(b) - b$. Donc $T(b) = b$.

2) Raisonnons par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ vient d'être traité. Supposons le théorème vrai au rang n. Soit $(T_i)_{1\leq i\leq n+1}$ une famille commutative d'applications affines continues de E dans E stabilisant K. K' = { $x \in$ K ; $\forall i \in [1, n]$ $T_i(x) = x$ } est non vide d'après l'hypothèse de récurrence. De plus, c'est un convexe compact, comme intersection du convexe compact K et de n convexes fermés. Enfin, K' est stable par T_{n+1}. Le cas $n = 1$ dit qu'il existe $x \in$ K' tel que $T_{n+1}(x) = x$. cqfd.

3) Pour tout $i \in$ I, K_i = { $x \in$ K ; $T_i(x) = x$ } est un convexe compact non vide. Il s'agit de montrer que l'intersection des K_i est non vide. D'après la propriété de Borel-Lebesgue, si tel était le cas, il existerait une partie finie J de I telle que $\bigcap_{j\in J} K_j = \varnothing$. Or on a vu en 2) qu'elle est non vide.

3 bis) (preuve directe) Pour tout T $\in \mathfrak{F}$ et tout entier $n > 0$, posons $T^{(n)} = \dfrac{I+T+T^2+...+T^{n-1}}{n}$.

Il est clair que $T^{(n)}$(K) $\subset$ K. Les $T^{(n)}$ forment une famille commutative d'applications affines continues stabilisant K.

Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des $T^{(n)}$(K) : ce sont tous des compacts convexes inclus dans K.

De plus $(T_1^{(n_1)} \circ T_2^{(n_2)} \circ \ldots \circ T_p^{(n_p)})(K) \subset \bigcap_{j=1}^{p} T_j^{n_j}(K)$ par commutativité des $T_i \in \mathfrak{F}$.

Il en résulte que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{K}$ est non vide.

Il résulte alors de la compacité de K que l'intersection de tous les $T^{(n)}$(K) est non vide.[9]

Montrons alors que tout point x_0 de cette intersection est point fixe commun des T.

Pour tout T $\in \mathfrak{F}$ et tout $n \geq 1$, $x_0 \in T^{(n)}$(K) , donc $\exists x \in$ K $x_0 = T^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n}(x + Tx + \ldots + T^{n-1}x)$.

Il en résulte $Tx_0 - x_0 = \dfrac{1}{n}(T^n x - x)$. D'où $\| T(x_0) - x_0 \| \leq \dfrac{D}{n}$, où D est le diamètre de K.

Faisons tendre n vers l'infini, il vient $T(x_0) = x_0$. cqfd.

NB 1 : L'extension aux EVTLC est immédiate ; seules les 2 dernières lignes sont à modifier ainsi :

On a $Tx_0 - x_0 \in \dfrac{1}{n}$(K – K). Si U est un voisinage ouvert de O dans E, $\exists n \geq 1$ $\dfrac{1}{n}$(K – K) $\subset$ U, donc $Tx_0 - x_0 \in$ U, et ce, pour tout voisinage ouvert U de O. Donc $Tx_0 = x_0$.

NB 2 : En 1938, Kakutani a démontré un théorème non commutatif : cf. Gonnord-Tosel, p. 78.

Application aux matrices stochastiques.

Une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ est dite stochastique si $\forall(i, j)$ $a_{ij} \geq 0$ et $\forall i$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

[9] Un espace compact possède la propriété de l'intersection finie : Si (F_i) est une famille de fermés telle que toute sous-famille finie a une intersection non vide, alors la famille (F_i) a une intersection non vide. Cela découle de l'axiome de Borel-Lebesgue par complémentation.

Soit K = { x = ${}^t(x_1, \dots, x_n)$; $\forall i\ x_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ }.

Je dis que $\exists x \in K\ A.x = x$ et $\exists y \in K\ {}^t y.A = {}^t y$.
Pour x, il suffit de choisir x = (1, …, 1). Pour y, appliquer le théorème de Markov-Kakutani.

<u>Application aux sous-groupes compacts de</u> $Gl_n(\mathbf{R})$:

Théorème : Soit E un espace normé de dimension finie, G un sous-groupe compact de Gl(E), K un compact convexe non vide tel que $(\forall g \in G)\ g(K) \subset K$. Alors $(\exists a \in K)\ (\forall g \in G)\ g(a) = a$.

<u>Preuve</u> : Antetomaso, RMS, oct 1993

<u>Application à la mesure de Haar</u> :

cf. Bourbaki, Edwards, Rudin, etc., mais cela utilise les EVTLC.

<u>Exercice 1</u> : Soient K un convexe compact non vide de $\mathbf{R}^n$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ telle que $f(K) \subset K$.

Pour tout $a \in K$, on pose $u_0 = a$, $u_k = \frac{1}{k+1}(a + f(a) + \dots + f^k(a))$

1) Montrer que $u_k \in K$, et que (u_k) a une sous-suite convergente dans K.
2) Montrer que $f(u_k) - u_k \to 0$.
3) Montrer que f a un point fixe dans K.

(Oral Centrale 1999, RMS n° 311)

<u>Solution</u> : 1) $u_k \in K$ en tant qu'isobarycentre de points de K ; (u_k) a une sous-suite convergente dans K, par compacité de K : $(u_{k(p)}) \to b \in K$.

2) $f(u_k) - u_k = \frac{f^{k+1}(a) - a}{k+1} \to 0$, car $\left\| \frac{f^{k+1}(a) - a}{k+1} \right\| \leq \frac{diam(K)}{k+1}$.

3) $f(u_{k(p)}) - u_{k(p)}$ tend vers 0 par 2) et tend vers $f(b) - b$, par 1) car f est continue. Donc $b = f(b)$.

NB : Ceci s'étend à un convexe compact d'un evn, à condition de supposer f linéaire et continue.

6.2. <u>Applications lipschitziennes</u>.

Le résultat suivant est une conséquence du théorème de Picard-Banach.

Théorème : Soient E un espace normé, K un compact convexe non vide, $f : K \to K$ une application telle que $\forall (x, y) \in K^2\ \| f(x) - f(y) \| \leq \| x - y \|$. Alors f possède au moins un point fixe.

<u>Preuve</u> : Fixons $w \in K$. $f_n(x) = (1 - \frac{1}{n}) f(x) + \frac{w}{n}$ est une suite de fonctions de K dans K.

De plus f_n est $(1 - \frac{1}{n})$-lipschitzienne, donc contractante.

En vertu du théorème de Picard-Banach, elle admet un point fixe unique x_n : $f_n(x_n) = x_n$.
De la suite (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente $x_{n(k)} \to a$.
De $\| f_n(x) - f(x) \| \leq \frac{D}{n}$, où D est le diamètre de K. On en déduit aisément $f(a) = a$.

<u>Exercice 2</u> : Soient E un **R**-espace de Banach, B sa boule unité fermée, $T : B \to B$ une fonction telle que $\forall (x, y) \in B^2\ \| T(x) - T(y) \| \leq \|x - y\|$.

1) Montrer que $(\forall r > 0)\ T_r = \frac{T}{1+r}$ a un unique point fixe, noté x(r).
2) Montrer que $(\forall y \in B)\ (\forall r > 0)\ r.\| x(r) \| \leq 2r.\|y\| + \| T(y) - y \|$.
3) Montrer que $\inf_{y \in B} \| T(y) - y \| = \lim_{r \to 0} r.\| x(r) \|$.
4) Quelle précision peut-on donner si E est de dimension finie ?

(Oral Centrale 1985, RMS n° 210)

S. Banach

L. E. J. Brouwer

J. Schauder

S. Kakutani

Bibliographie

Andrzej Granas, James Dugundji : Fixed Point Theory (Springer, 2000)
D. R. Smart : Fixed points theorems (Cambridge press)
H. Spanier : Algebraic Topology, p. 194 (Mc Graw-Hill)
M. Zisman : Topologie algébrique élémentaire (A. Colin)
M. Berger et B. Gostiaux : Géométrie différentielle, p. 217 (A. Colin)
R. E. Edwards : Functional Analysis, chap. 3 (Dover)
J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudiès : Cours de taupe, tome 4 n° 32 et 33 p. 439 (Dunod)
J. Mawhin : Le théorème des indéboulonnables (Pour la Science, février 2003)
A. Pommellet : Cours d'agrégation [10] (Ellipses)
P. Doukhan, J.-C. Sifre : Cours d'agrégation (Dunod)
S. Gonnord, N. Tosel : Topologie et analyse fonctionnelle, p. 94 (Ellipses)
J. M. Henderson, R. E. Quandt : Microéconomie, chap. 5 (Dunod, 1974)
Sylvia Nasar : Un homme d'exception [11] (Calmann-Lévy, 2002)
ENSAE 1997 : deuxième composition de maths
Concours communs polytechniques 2001, filière MP

Revue de mathématiques spéciales :

- Une application qui devient contractante, Leccia, RMS mai 1991
- Un théorème de point fixe, application aux sous-groupes compacts de $\mathbf{R}^n$, Antetomaso, oct. 1993
- Points fixes des involutions continues de **C**, Pommellet, janv. 1995
- Théorème de Brouwer, Pépin, RMS octobre 1995, mai et juin 1997
- Théorème de point fixe et courbes de Peano, Guénard, RMS janvier 1998
- Points fixes de deux fonctions, RMS 2001-2002, n° 2, R 406, p. 299

Sources Internet :

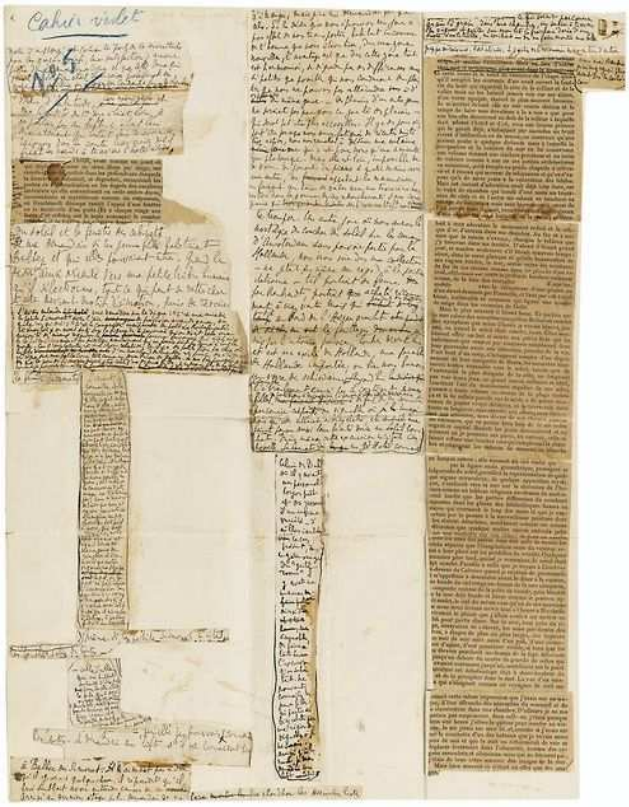
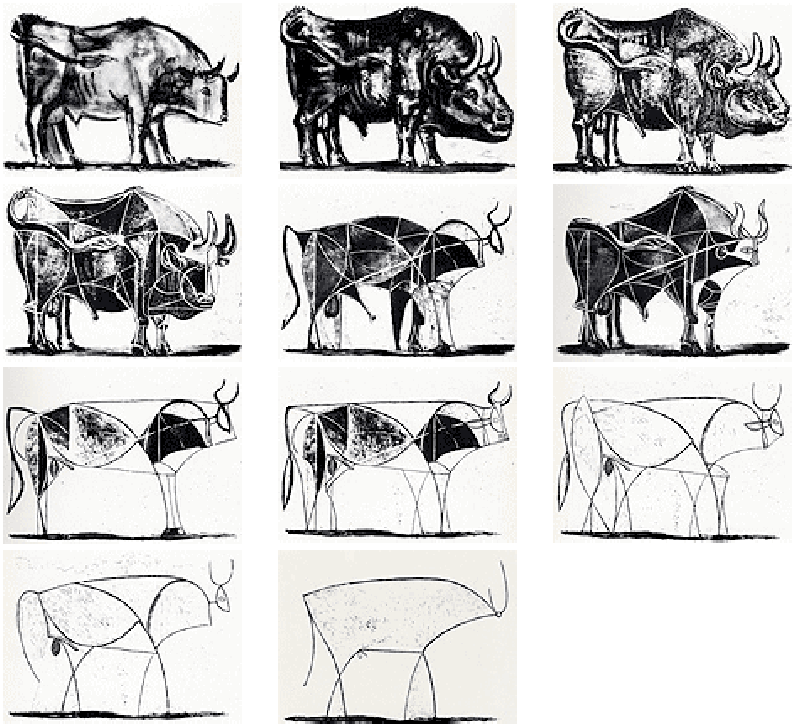
Wikipedia : Théorèmes de point fixe, etc.
Google : Théorèmes de point fixe, etc.

[10] Un passage de ce cours étudie les liens entre le théorème de Brouwer et ceux de Schauder et Cauchy-Arzelà (cf aussi Edwards, § 3.6.3 et 3.6.4)

[11] La vie de John Forbes Nash, porté à l'écran par Russell Crowe.

approximations successives :

des paperolles de proust ...



... aux taureaux de picasso