

Courbes cycloïdales

1. Mouvement plan sur plan.
2. La cycloïde droite.
3. Les cycloïdes.
4. Epicycloïdes, hypocycloïdes, péricycloïdes.
5. Rectification, développée, équations intrinsèques.
6. Les courbes cycloïdales comme enveloppes.
7. Les courbes trochoïdales.
8. Courbes cycloïdales particulières.

à Christophe ,
Pierre-Jean Hormière

Introduction

Les courbes cycloïdales sont les lieux décrits par un point fixé sur un cercle roulant sans glisser sur une droite ou un cercle. Lorsque le point est attaché au cercle roulant mais ne se trouve pas sur la circonférence, son lieu est appelé courbe trochoïdale. Ces courbes peuvent être tracées par des enfants, grâce aux roues dentées du jeu appelé « spirographe ».

Ces courbes étaient connues dès l'antiquité. Elles ont été étudiées par Hipparque de Nicée (-190, -125 av. J.C.), fondateur de la trigonométrie, qui se livra à des observations astronomiques à Rhodes et à Alexandrie entre -161 et -127. En 1900, au large de l'île d'Anticythère, par 62 mètres de fond, des pêcheurs d'éponge découvrirent, dans une épave antique, outre des statues et des amphores, une calculatrice mécanique en bronze, de forme circulaire, d'une extrême sophistication, permettant de calculer les mouvements solaire et lunaire, de prévoir les éclipses et les mouvements de certaines planètes. Composée de plus de 82 éléments dont une trentaine de roues dentées, elle était sans doute actionnée par une manivelle. Antérieure d'au plus un siècle à 87 av. J.C., date de la conquête romaine, elle aurait été fabriquée à Rhodes, peut-être par Hipparque de Nicée, par Posidonios de Rhodes, par Archimède ou un de ses disciples.



Fragment principal de la machine d'Anticythère

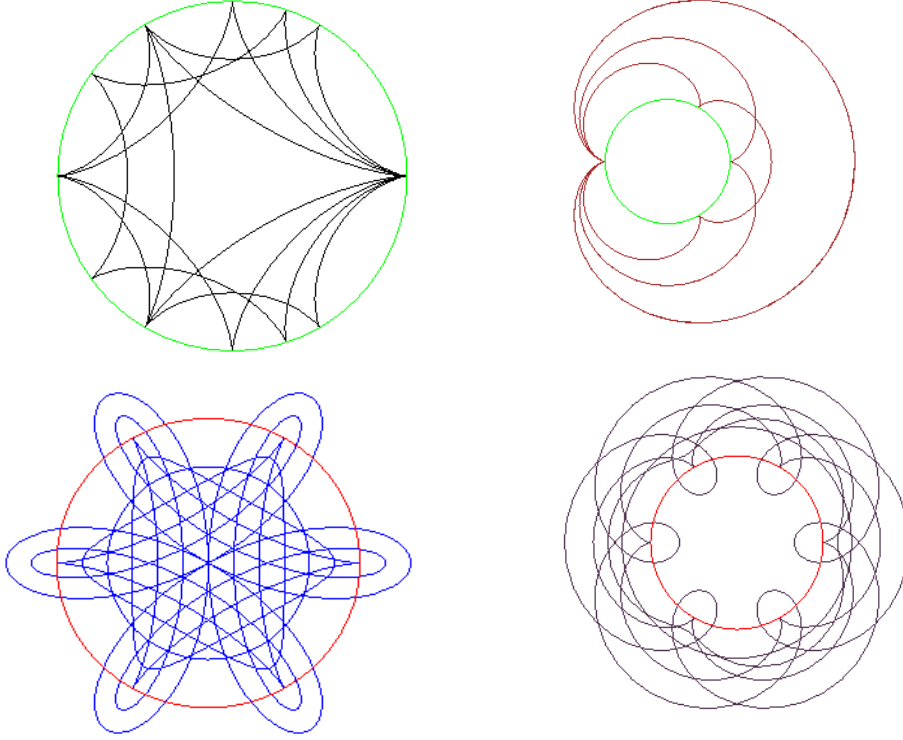


Modèle reconstruit par Mogi Vicentini

Les courbes cycloïdales ont été retrouvées dès le 16^{ème} siècle, par Bouvelles (1501) et Dürer (1525). Mais c'est surtout au 17^{ème} qu'elles furent étudiées, par Galilée, Descartes, Desargues, Fermat, Mersenne, Roberval, Pascal, La Hire, Wallis, Newton, Wren, Leibniz, Huygens, les Bernoulli (Jacob, Johann, Daniel), Euler, etc. Elles ont des applications en cinématique, dans la théorie des engrenages, et en optique.

Les calculs seront souvent conduits à l'aide des nombres complexes. Les figures ont été tracées avec Cabri-géomètre ou avec Maple.

Courbes hypocycloïdales, épicycloïdales, hypotrochoïdales et épitrochoïdales



1. Mouvement plan sur plan.

1.1. Généralités.

Soit P un plan affine euclidien orienté fixe, appelé **plan absolu**, rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{I}, \vec{J}) , d'axes OX et OY . On plonge ce plan dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3, et l'on pose $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$.

Soit (A, \dot{i}, \dot{j}) un repère orthonormé mobile du plan P , *i.e.* une application $t \in J \rightarrow (A(t), \dot{i}(t), \dot{j}(t))$ de classe C^k ($k \geq 1$) définie sur un intervalle J de \mathbf{R} , telle qu'à chaque instant t , $(\dot{i}(t), \dot{j}(t))$ soit un repère orthonormé. On dit que le plan $\Pi = (A, \dot{i}, \dot{j})$ glisse sur le plan P , ou que (P, Π) est un mouvement plan sur plan.

En vertu du théorème de relèvement, on peut écrire $\dot{i}(t) = \vec{u}(\theta(t))$ et $\dot{j}(t) = \vec{v}(\theta(t))$, où :

- $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ désigne le repère radial $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \cdot \vec{I} + \sin \theta \cdot \vec{J}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \pi/2)$
- $\theta : I \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe C^k . On a :

$$\dot{i}'(t) = \theta'(t) \cdot \vec{v}(\theta(t)) = \theta'(t) \cdot \dot{j}(t) = \theta'(t) \cdot (\vec{K} \wedge \dot{i}(t)).$$

$$\dot{j}'(t) = -\theta'(t) \cdot \vec{u}(\theta(t)) = -\theta'(t) \cdot \dot{i}(t) = \theta'(t) \cdot (\vec{K} \wedge \dot{j}(t)).$$

Soit $M(t)$ un point mobile dans le plan Π . Sa **trajectoire absolue** est l'arc paramétré $t \rightarrow \overrightarrow{OM}(t)$, sa **trajectoire relative** l'arc $t \rightarrow \overrightarrow{AM}(t)$.

On a : $\overrightarrow{AM}(t) = x(t) \cdot \dot{i}(t) + y(t) \cdot \dot{j}(t) = x(t) \cdot \vec{u}(\theta(t)) + y(t) \cdot \vec{v}(\theta(t))$ et $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA}(t) + \overrightarrow{AM}(t)$.

Si l'on dérive, il vient $\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{AM}}{dt}$, ou encore $\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M)$.

La vitesse absolue est somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. Ici :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + x'(t) \cdot \vec{i}(t) + y'(t) \cdot \vec{j}(t) + \theta'(t) \cdot \vec{K} \wedge \vec{AM}(t) \quad (1)$$

Si M est **lié au plan mobile**, c'est-à-dire si ses coordonnées relatives $x(t)$ et $y(t)$ sont constantes, alors :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \theta'(t) \cdot \vec{K} \wedge \vec{AM}(t) \quad (2)$$

1.2. Centre instantané de rotation.

Théorème : En tout point t de J tel que $\theta'(t) \neq 0$, il existe dans le plan un unique point I, lié au repère mobile, ayant une vitesse absolue nulle.

Preuve : On veut que $\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{0}$, donc $\frac{d\vec{A}}{dt} + \theta'(t) \cdot (\vec{K} \wedge \vec{AI}(t)) = \vec{0}$ ou $\vec{K} \wedge \vec{AI}(t) = \frac{-1}{\theta'(t)} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$

C'est un problème de division vectorielle ; il a des solutions, car \vec{K} et $\frac{d\vec{A}}{dt}$ sont orthogonaux ; elles sont données par $\vec{AI}(t) = \vec{K} \wedge \frac{d\vec{A}}{d\theta} + \lambda \cdot \vec{K}$. Comme I est dans le plan, $\lambda = 0$ et

$$\vec{AI}(t) = \vec{K} \wedge \frac{d\vec{A}}{d\theta} \quad (3)$$

Définition : Le point I est appelé **centre instantané de rotation (c.i.r.)** du mouvement plan sur plan. On appelle **base** le lieu absolu de I, **roulante** son lieu relatif.

1.3. Propriétés du centre instantané de rotation.

1) Le point I ne dépend que de la géométrie du mouvement : t ne figure par dans la formule (3).

2) Si M(t) est un point lié au plan mobile, on a $\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{M}}{dt} - \frac{d\vec{I}}{dt} = \theta'(t) \cdot (\vec{K} \wedge \vec{IM}(t))$.

Ainsi, la vitesse de M est la même que dans un mouvement de rotation de centre I : d'où le nom donné au point I. De plus, $\vec{V}_a(M)$ est orthogonal à \vec{IM} , donc la normale en M à sa trajectoire absolue est la droite IM. Dès que l'on connaît I, la tangente en M est la normale en M à IM.

3) Représentation paramétrique de la base : $\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{K} \wedge \frac{d\vec{A}}{d\theta}$.

Si l'on note $a(t)$ et $b(t)$ les coordonnées de A(t) dans le repère fixe, il vient :

$$x_I(t) = a - \frac{db}{d\theta} \quad \text{et} \quad y_I(t) = b + \frac{da}{d\theta} \quad . \quad \text{En complexes, } Z_I(t) = Z_A(t) + i \cdot \frac{dZ_A}{d\theta} .$$

4) Représentation paramétrique de la roulante : elle est donnée par (3).

5) La base et la roulante sont tangentes en I. En effet, $\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{AM}}{dt}$.

6) La roulante roule sans glisser sur la base, car si l'on oriente dans le même sens la base et la roulante au point de contact commun I, s_1 et s notant resp. les abscisses curvilignes de I sur la base et la roulante, orientée par le même vecteur tangent \vec{T} , la formule précédente se traduit par :

$$\frac{ds_1}{dt} \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \quad , \quad \text{donc } ds_1 = ds.$$

7) Réciproquement, si une courbe mobile roule sans glisser sur une courbe fixe, le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan ainsi défini est le point de contact I des deux courbes.

En effet, $s = s_1 + \text{cte}$, et même $s = s_1$ si l'on choisit les origines de façon qu'elles se correspondent. Cela implique $\frac{ds_1}{dt} \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$, $\vec{V}_a(I) = \vec{V}_r(I)$ et comme $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, on a bien $\vec{V}_e(I) = 0$.

2. La cycloïde.

2.1. Définition, paramétrisation.

Définition : La **cycloïde** (ou **roulette**) est la courbe décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe.

Cette courbe a été étudiée par Galilée, Roberval, Descartes, Fermat et Pascal¹ notamment.

Notons D la droite (base du mouvement), C le cercle (roulante), P le point de contact de D et C, a le rayon de C. Prenons D pour axe des abscisses, et supposons que le point fixe M du cercle passe en O à l'instant initial, et que le cercle roule vers la droite, donc tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Le roulement sans glissement se traduit par $\text{Arc}(\text{OM}) = \overline{OP}$.

Notons $u = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP})$, il vient $\text{Arc}(\text{OM}) = \overline{OP} = au$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, d'où, en complexes, $z(M) = au + ia - ia e^{-iu}$.

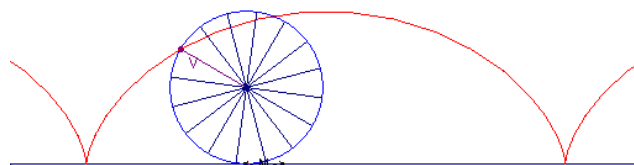
$$x = a(u - \sin u) \quad y = a(1 - \cos u)$$

2.2. Etude et graphe.

Intervalle d'étude : $\overrightarrow{OM}(u + 2\pi) = 2\pi a \cdot \vec{i} + \overrightarrow{OM}(u)$. De plus, $x(u)$ est impaire, $y(u)$ est paire : étude sur $[0, \pi] + \text{sym}(\text{Oy}) + \text{translations}$.

Variations : $x'(u) = 2a \sin \frac{u}{2}$, $y'(u) = 2a \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}$.

$u = 0$ est point critique ; $\frac{y}{x} \sim \frac{3}{u} \rightarrow +\infty$; tangente verticale.



Avec Maple :

```
> with(plots): p:=plot([u-sin(u),1-cos(u),u=-Pi..5*Pi/2]):
> q:=animate([u+cos(t),1+sin(t),t=0..2*Pi],u=-Pi/2..5*Pi/2):
> display({p,q},scaling=constrained);
```

Remarques : 1) Le graphe de la cycloïde est invariant par le groupe diédral infini engendré par la translation de vecteur $2\pi a \cdot \vec{i}$ et la symétrie par rapport à $y'Oy$.

2) La demi-arche $0 \leq u \leq \pi$ est le graphe d'une fonction $x = a \cdot \text{Arccos}(1 - \frac{y}{a}) - \sqrt{y(2a-y)}$.

3) Ce graphe est le graphe d'une vraie fonction $x \rightarrow y(x)$, composée de $u \rightarrow a(1 - \cos u)$ et de la bijection réciproque de $u \rightarrow a(u - \sin u)$. Celle-ci est implicite, mais élémentaire, et explicite si l'on prend le temps de la nommer et de l'étudier. Elle est continue, etc.

Exercice : Montrer que cette fonction $x \rightarrow y(x)$ est concave sur $[0, 2\pi]$.

¹ Les écrits de Pascal consacrés à la roulette se trouvent dans le tome 2 de ses Œuvres complètes (Pléiade, p. 319-377).

2.3. Rectification.

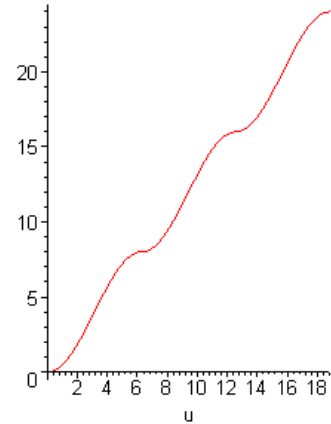
Orientons la cycloïde dans le sens des u croissants, et prenons O pour origine des abscisses curvilignes. Il vient $\frac{ds}{du} = 2a \left| \sin \frac{u}{2} \right|$.

Sur l'arche $u \in [0, 2\pi]$, $s(u) = 4a \left(1 - \cos \frac{u}{2} \right)$.

Théorème : La longueur d'une arche vaut $8a$.
(Wren, Roberval, Huygens, 1658).

N.B. : Du fait de la présence de points critiques, la fonction

$s(u) = \int_0^u 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$ est un homéomorphisme croissant de classe C^1 , mais non un C^1 -difféomorphisme, car sa dérivée s'annule en certains points.



2.4. Courbure, centre de courbure, développée.

$$\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j} = \sin \frac{u}{2} \cdot \vec{i} + \cos \frac{u}{2} \cdot \vec{j}, \text{ d'où } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} \pmod{2\pi}.$$

Conséquence géométrique : La tangente en M est MQ , la normale est MP . Cela découle aussi des propriétés du mouvement plan sur plan : P est centre instantané de rotation, les normales en M , A et Q à leurs lieux resp. se coupent en M , donc MP est normale à la cycloïde.

Rayon de courbure : $\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha} = -2 \frac{ds}{du} = -4a \sin \frac{u}{2}$.

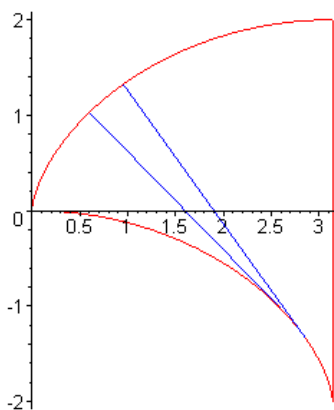
Centre de courbure I : Il a pour coordonnées $X = x - \mathcal{R} \sin \alpha = a(u + \sin u)$
 $Y = y + \mathcal{R} \cos \alpha = a(\cos u - 1)$

Notons que I est le symétrique de M par rapport à P .

La développée se déduit globalement de la cycloïde par la translation de vecteur $(a\pi, -2a)$.

Preuve géométrique : Soit M' le point diamétralement opposé à M sur le cercle roulant. Il décrit la cycloïde C' traduite de vecteur $(a\pi, 0)$. $M'Q$ est tangente à C' en M' , et parallèle à la normale MP en M . Si I est le symétrique de M par rapport à P , $\vec{QP} = 2\vec{AP} = \vec{MI}$, I décrit la traduite de C' par $(0, -2a)$, et la droite MI est tangente au lieu de I ; donc le lieu de I enveloppe les normales en M .

2.5. Aire de l'arche.



L'aire située sous une arche de cycloïde vaut, après calculs :

$$A = \int_0^{2\pi} y(x) dx = \int_0^{2\pi} y(u) \cdot x'(u) du = 3a^2\pi.$$

Théorème (Roberval, 1634) : L'aire de l'arche de cycloïde est trois fois celle du cercle roulant.

Galilée avait conjecturé ce résultat en pesant l'aire d'un arceau et en comparant son poids à celui du disque roulant. En 1634, après six ans de recherches, Roberval en donna une démonstration géométrique. Descartes fit de même en 1638 dans une lettre à Mersenne, ainsi que Fermat en 1640 et Pascal en 1658.

Voici une preuve géométrique, tirée de l'excellent petit livre de J. Lemaire :

Soit $S(a\pi, 2a)$ le sommet de l'arche, M et M' deux points infiniment voisins de la demi-arche OS, I et I' les intersections avec Ox des normales en M et M' à la cycloïde, P leur point d'intersection. On peut écrire au premier ordre près :

$$\frac{\text{Aire}(PII')}{\text{Aire}(PMM')} \approx \left(\frac{PI}{PM}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Si σ est le centre de courbure en S, l'aire délimitée par les deux demi-arceaux de cycloïdes OS, O σ , lesquels sont égaux, et la droite S σ , vaut quatre fois l'aire du triangle curviligne OA σ , où A est la projection de S sur Ox. Donc :

$$\text{Aire}(OAS) = \frac{3}{4} OA.OS = \frac{3}{4} \pi a.2a = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

2.6. Equation intrinsèque.

De $\mathcal{R} = -4a.\sin \frac{u}{2}$ et $s = 4a(1 - \cos \frac{u}{2})$ ($0 \leq s \leq 8a$), on tire :

$$\mathcal{R}^2 + (s - 4a)^2 = 16a^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = -\sqrt{s(8a-s)}.$$

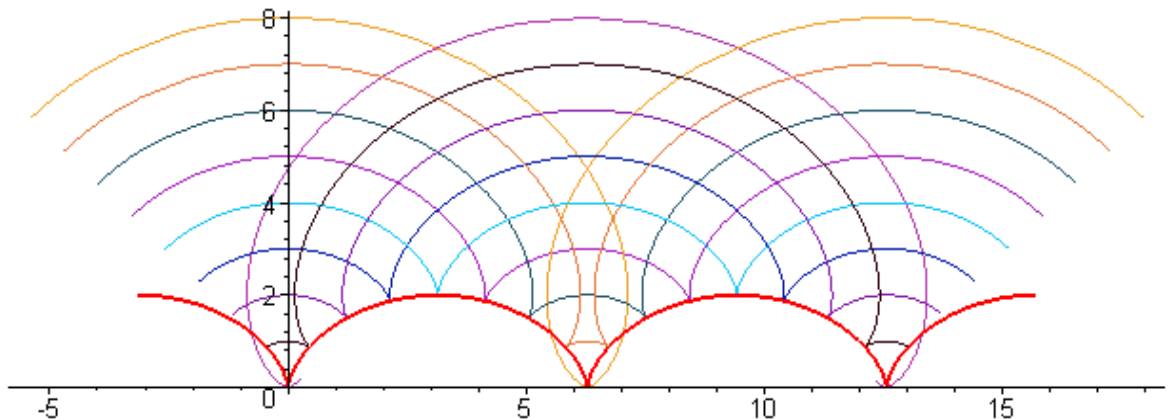
2.7. Développantes.

La formule est $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + (L - s)\vec{T}$. Posant $L - 4a = m$, il vient :

$$X = a.(u + \sin u) + m.\sin \frac{u}{2} \quad Y = a.(1 + \cos u) + 2a + m.\cos \frac{u}{2}$$

Si $m = 0$, on trouve une cycloïde translatée, ce qui est naturel compte tenu de 2.4.

```
> with(plots):
> p:=plot([u-sin(u),1-cos(u),u=-Pi..4*Pi+Pi],thickness=2):
> d:=m->plot([u+sin(u)+m*sin(u/2),3+cos(u)+m*cos(u/2),
u=-Pi/2..4*Pi+Pi/2],color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12,
rand()/10^12)):
> display({p,seq(d(m),m=-4..4)});
```



Développantes de cycloïde

2.8. Caustique par réflexion.

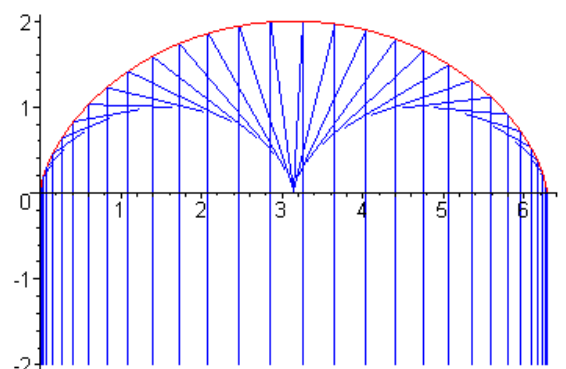
Problème : Des rayons lumineux arrivent perpendiculairement à la base venant de $y = -\infty$, et sont réfléchis par un miroir cycloïdal. Quelle est l'enveloppe des rayons réfléchis ?

Solution : Le rayon ∞M se réfléchit en MAM', où A est le centre du cercle roulant et M' le point de ce cercle diamétralement opposé à M. La caustique est donc l'enveloppe de la droite MA.

Elle a pour équation

$$(D_u) \quad X.\cos u - Y.\sin u + a(\sin u - u.\cos u) = 0.$$

L'intersection des droites (D_u) et $(D'_{u'})$ est le point



$$K\left(\frac{a}{2}x(2u), \frac{a}{2}y(2u)\right).$$

On obtient la cycloïde déduite de la cycloïde initiale par $\text{Hom}(O, \frac{1}{2})$.

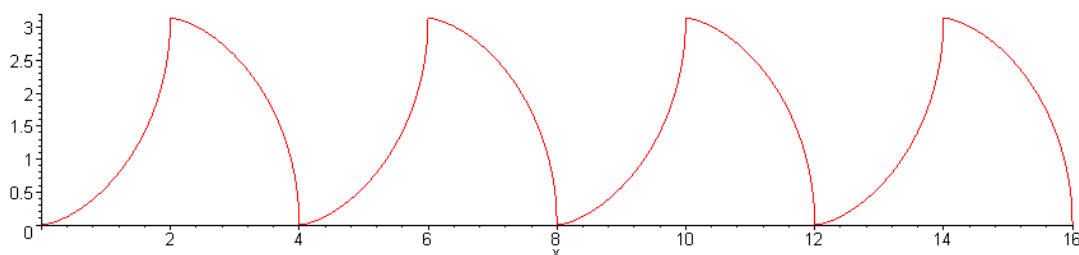
2.9. Une courbe autodéveloppée.

On peut fabriquer une courbe autodéveloppée à l'aide de morceaux de cycloïdes.

Soit $f: x \in [0, 2a] \rightarrow 2a\text{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}$.

Définissons $x \rightarrow y(x)$ par $y(x) = f(x - 4ak)$ si $4ak \leq x \leq 4ak + 2a$,
 $y(x) = a\pi - f(x - 4ak - 2a)$ si $4ak + 2a \leq x \leq 4a(k + 1)$

Le graphe de y est formé de morceaux d'arches de cycloïdes, chacun étant développé du précédent.



Mosaïque de la villa romaine de Séviac (Gers)

2.10. Le pendule cycloïdal isochrone de Huygens.

« Outre ses pirogues hissées à leurs potences, un navire baleinier américain se reconnaît à ses fourneaux. (...) C'est aussi un endroit propice à la réflexion mathématique la plus ardue. Ce fut dans la chaudière de gauche du Péquod, ma pierre de lard circulant diligemment en rond autour de moi, que je fus pour la première fois frappé indirectement par ce fait remarquable qu'en physique tout corps glissant sur une cycloïde, ma pierre de lard par exemple, tombe de n'importe quel point, d'une même hauteur pendant un intervalle de temps donné », écrit **Herman Melville** dans *Moby Dick*.

Expliquons cela. Soit A une arche de cycloïde placée dans un plan vertical, la base étant horizontale et l'arche située en-dessous de la base. Montrer que les oscillations d'un point matériel M abandonné à l'action de la pesanteur et assujéti à rester sur la cycloïde sont isochrones, quelle que soit l'amplitude.

Solution : Soient $M(x = a(u - \sin u), z = a(\cos u - 1))$, $S(a\pi, -2a)$.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg.(z_0 - z), \text{ d'où } v^2 = 2ga.(\cos u_0 - \cos u), \text{ avec } v = \frac{ds}{dt} = 2a\sin\frac{u}{2} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Le temps mis par M pour joindre M_0 à S avec une vitesse initiale nulle est

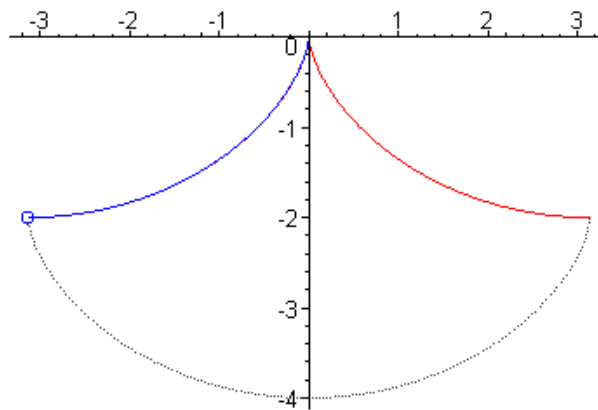
$$T = \int_{u_0}^{\pi} \frac{2a\sin(u/2)}{\sqrt{2ga.(\cos u_0 - \cos u)}} du = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \text{ après calculs : c'est une grandeur indépendante de } M_0.$$

L'oscillation est donc $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; on retrouve la valeur approchée du pendule simple.

Application au pendule isochrone de Huygens : élégante d'un point de vue mathématique, mais sans portée pratique en raison des frottements.

Avec Maple :

```
> with(plots):a:=Pi:f:=t->piecewise(t<=a,t-sin(t),t>=a,2*a-t+sin(t)):
> g:=t->-1+cos(t):base:=plot([f(t),g(t),t=a..3*a],scaling=constrained):
> ds:=2*sin(t/2):s:=-4*cos(t/2):
> fp:=t->piecewise(t<=a,1-cos(t),t<=3*a,-1+cos(t)):
> fil:=[f(t)-u*s*fp(t)/ds,g(t)+u*s*sin(t)/ds,u=0..1]:
> boule:=[f(t)-s*fp(t)/ds+cos(u)/15,g(t)-s*diff(g(t),t)/ds+sin(u)/15,
u=0..2*a]:cyclo_restante=[f(u*t),g(u*t),u=0..1]:
> trajectoire:=plot([subs(u=1,op(1,fil)),subs(u=1,op(2,fil)),t=-a..a],
color=violet,linestyle=2):
> pendule:=animate({boule,fil,cyclo_restante},t=-a..3*a,
color=blue,numpoints=30):display({base,pendule,trajectoire});
```



2.11. Cycloïde et brachistochrone.

La cycloïde possède une propriété plus remarquable encore : c'est la courbe « brachistochrone ». Expliquons cela. Considérons dans l'espace physique un plan vertical \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé xOy , Ox étant dirigé par l'accélération de la pesanteur γ .

Soit $A(1, a)$, et Γ une courbe d'équation $y = f(x)$ où $f \in C^1([0, 1], \mathbf{R})$, $f(0) = 0$ et $f(1) = a$. Un point matériel M de masse m est abandonné en O , sans vitesse initiale, et se déplace sur Γ sans frottement, sous l'influence de la seule pesanteur.

On démontre que la courbe Γ telle que le temps mis par le point M pour joindre O à A soit minimum est un arc de cycloïde joignant O à A . Ce célèbre et vieux problème est étudié dans mes Fonctions de plusieurs variables, D. Calcul des variations.

3. Les cycloïdes générales.

3.1. Définition, paramétrisation.

Définition : La **cycloïde droite**, ou **trochoïde**, est la courbe décrite par un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe.

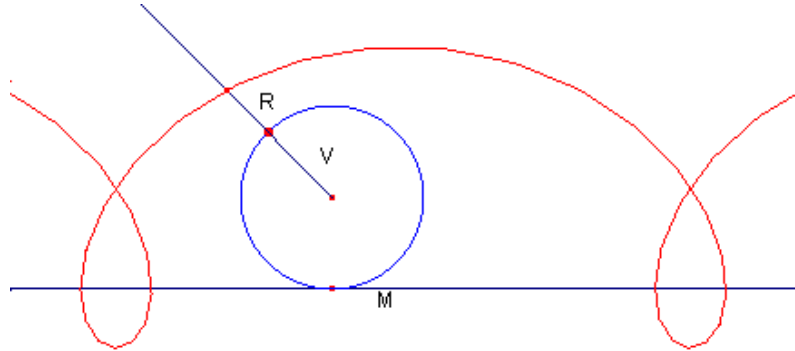
Notons D la droite (base du mouvement), C le cercle (roulante), P le point de contact de d et C , a le rayon de C . Prenons D pour axe des abscisses, et supposons que le point fixe M du cercle passe en O

à l'instant initial, et que le cercle roule vers la droite, donc tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Reprenant les notations du § 1, notons $u = (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CM})$ et $\overline{OP} = \text{Arc}(M'P) = au$.

$P(au, 0)$, $C(au, a)$, $Q(au, 2a)$. Il vient $z_M - z_C = \frac{b}{a} e^{-iu}$ ($z_P - z_C = -ib.e^{-iu}$), d'où

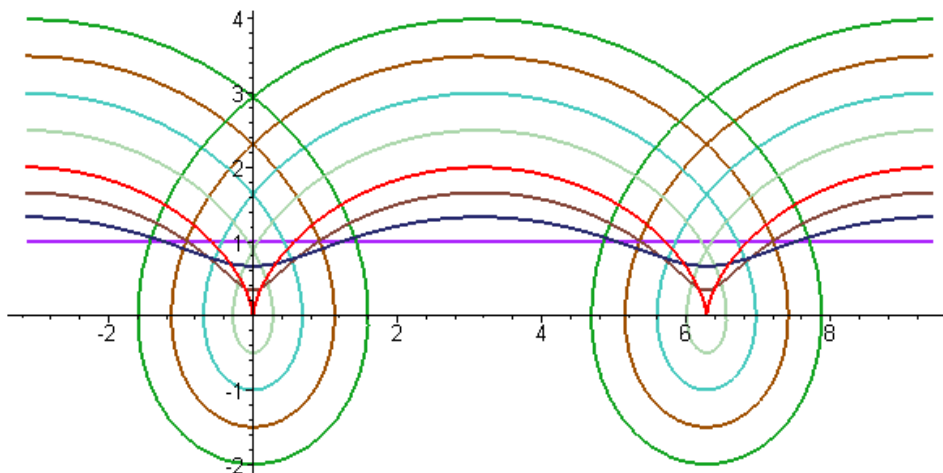
$$z_M = a.(u + i) - ib.e^{-iu} \quad \text{et} \quad x = au - b.\sin u, \quad y = a - b.\cos u.$$

3.2. Etude et graphe.



- Si $a > b$, on obtient les **cycloïdes raccourcies** ;
- Si $a = b$, on retrouve la **cycloïde usuelle** ;
- Si $a < b$, on obtient les **cycloïdes allongées**.

```
> with(plots):
> F:=(b,u)->(u-b*sin(u),1-b*cos(u));
> p:=b->plot([F(b,u),u=-Pi..3*Pi],color=COLOR(RGB, rand()/10^12,
rand()/10^12, rand()/10^12),thickness=2);
> q:=plot([F(1,u),u=-Pi..3*Pi],color=red,thickness=2);
> display({q,p(0),p(0.33),p(0.66),p(1.5),p(2),p(2.5),p(3)});
```



Cycloïdes droite, allongées et raccourcies

Remarques : 1) Le seul cas où il y a des points stationnaires est le cas $a = b$, $u = 2k\pi$.

2) Les cycloïdes raccourcies sont des arcs simples, *i.e.* tels que $u \rightarrow M(u)$ est injective. Les cycloïdes allongées ont des points doubles.

3.3. Rectification.

$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 + b^2 - 2ab.\cos u).du^2$. Orientons l'arc dans le sens des u croissants.

Il vient $s = \int_0^u \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}.d\theta = \int_0^{u/2} \sqrt{(a-b)^2.\cos^2\varphi + (a+b)^2.\sin^2\varphi}.d\varphi$.

On trouve l'élément d'arc d'ellipse, fait observé par Blaise Pascal en 1658.

3.4. Propriété cinématique.

On constate aisément que $\frac{dz_M}{du} = i (z_P - z_M)$.

Si l'on interprète le paramètre u comme un temps, le vecteur vitesse est perpendiculaire en M à MP ; autrement dit la normale en M à son lieu est la droite MP . Cela découle de ce que P est le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan : tout point M du plan mobile a une vitesse orthogonale à MP .

L'hodographe du mouvement, $\overrightarrow{Om}(u) (a - b \cdot \cos u, b \cdot \sin u)$ est la cercle de centre $(a, 0)$ de rayon b parcouru dans un mouvement uniforme. L'hodographe de l'hodographe est $(b \cdot \sin u, b \cdot \cos u)$: cercle de centre O et de rayon b .

4. Epicycloïdes, hypocycloïdes et péricycloïdes.

4.1. Définitions générales, paramétrisation.

Définition : Dans le plan, un cercle Γ roule sans glisser sur un cercle fixe B . Lorsque Γ reste intérieur à B , chacun de ses points décrit une courbe appelée **hypocycloïde**. Lorsque Γ reste extérieur à B , le contact étant extérieur, chacun de ses points décrit une courbe appelée **épicycloïde**. Lorsque Γ reste extérieur à B , mais contient B (le contact étant donc intérieur), chacun de ses points décrit une courbe appelée **péricycloïde**.

Notations :

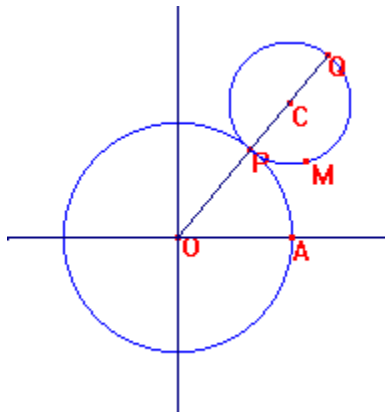
Le cercle de base B est de centre O , origine du repère, et de rayon a .

M est le point dont on suit le déplacement.

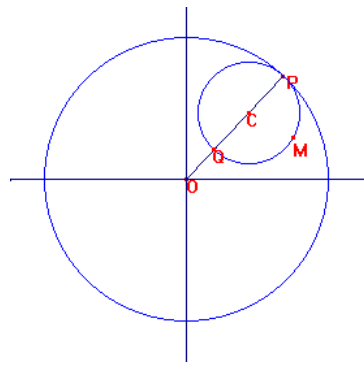
C est le centre du cercle roulant Γ , r son rayon, P son point de contact avec B .

On choisit l'axe des x de façon que le point M passe en $A(a, 0)$.

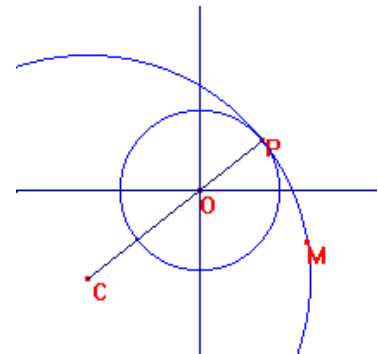
On pose $t = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ et $u = (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CM})$.



Epicycloïde



Hypocycloïde



Péricycloïde

Epicycloïde. Le roulement sans glissement s'écrit $\overline{Arc(AP)} = \overline{Arc(PM)}$, i.e. $at = ru$.

$$z_M - z_C = e^{iu} \cdot (z_P - z_C) = e^{iu} \cdot (a \cdot e^{it} - (a+r) \cdot e^{it}) = -r \cdot e^{i(t+u)} = -r \cdot e^{it \cdot (1+a/r)} = -r \cdot e^{imt}$$

d'où : $z_M = r \cdot (m \cdot e^{it} - e^{imt})$, où $m = \frac{a}{r} + 1$.

$$x(t) = r \cdot (m \cdot \cos t - \cos(mt)) \quad , \quad y(t) = r \cdot (m \cdot \sin t - \sin(mt)) .$$

Péricycloïde et hypocycloïde.

Le roulement sans glissement s'écrit $\overline{Arc(AP)} = \overline{Arc(MP)}$, i.e. $at = -ru$.

$$z_M - z_C = e^{iu} \cdot (z_P - z_C) = e^{iu} \cdot (a \cdot e^{it} - (a-r) \cdot e^{it}) = r \cdot e^{i \cdot (t+u)} = r \cdot e^{it \cdot (1-a/r)} = r \cdot e^{imt}$$

d'où : $z_M = -r.(m.e^{it} - e^{imt})$, où $m = 1 - \frac{a}{r}$.

$$x(t) = -r.(m.\cos t - \cos(mt)) \quad , \quad y(t) = -r.(m.\sin t - \sin(mt)) .$$

Les formules précédentes peuvent se résumer en un formalisme unique.

$$\rho = \overline{PC_i} = r \quad \text{si contact extérieur (épicycloïde)} \\ = -r \quad \text{si contact intérieur (hypocycloïde ou péricycloïde)}$$

$$m = 1 + \frac{a}{\rho} \quad , \quad at = \rho u \quad ,$$

$z = \rho.(m.e^{it} - e^{imt}) \quad x = \rho.(m.\cos t - \cos(mt)) \quad y(t) = \rho.(m.\sin t - \sin(mt)) .$
--

- $m > 1 \Leftrightarrow \rho > 0$ **épicycloïde**
- $0 < m < 1 \Leftrightarrow \rho < -a$ **péricycloïde**
- $m < 0 \Leftrightarrow -a < \rho < 0$ **hypocycloïde**

N. B. : On exclut le cas $a = 0$ ou $r = 0$; donc $m \neq 1$. De même $m = 0$ est exclu, car il conduit à $r = a$, $z = a$. Alors $\Gamma = B$ et M reste en A .

4.2. Isométries laissant invariante une courbe cycloïdale.

On vérifie que $z(-t) = \overline{z(t)}$ et que $z(t + \frac{2k\pi}{m-1}) = z(t).\exp(\frac{2ik\pi}{m-1})$.

On en déduit que la courbe est invariante globalement par les rotations $\text{Rot}(O, \frac{2k\pi}{m-1})$, $k \in \mathbf{Z}$, et par la symétrie s par rapport à Ox . $r = \text{Rot}(O, \frac{2\pi}{m-1})$ et s engendrent un sous-groupe diédral du groupe des déplacements. Nous préciserons ces résultats en 4.5.

4.3. Points critiques et réguliers.

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow e^{it} = e^{imt} \Leftrightarrow t = \frac{2k\pi}{m-1} \Leftrightarrow |z(t)| = a \quad , \quad \text{après un instant de réflexion.}$$

Les points critiques sont les points communs à la roulante Γ et à la base B . Ils se déduisent donc du point $A(t = 0)$ par les rotations $\text{Rot}(O, \frac{2k\pi}{m-1})$, $k \in \mathbf{Z}$.

Etudions donc le point A . $z(t) = a + \rho \frac{m(m-1)}{2} t^2 + \rho \frac{m(m^2-1)}{6} i.t^3 + O(t^4)$.

Proposition : En chaque point critique M de Γ la tangente est la droite OM et il y a rebroussement de première espèce.

Remarque : le cas $m = -1$ est très particulier. Alors $r = \frac{a}{2}$, $\varepsilon = -1$, $z = a.\cos t$. Le point M décrit une hypocycloïde à deux rebroussements, dont l'image est le segment $[-a, a]$. Il s'agit d'un mouvement vibratoire, appelé engrenage de La Hire.

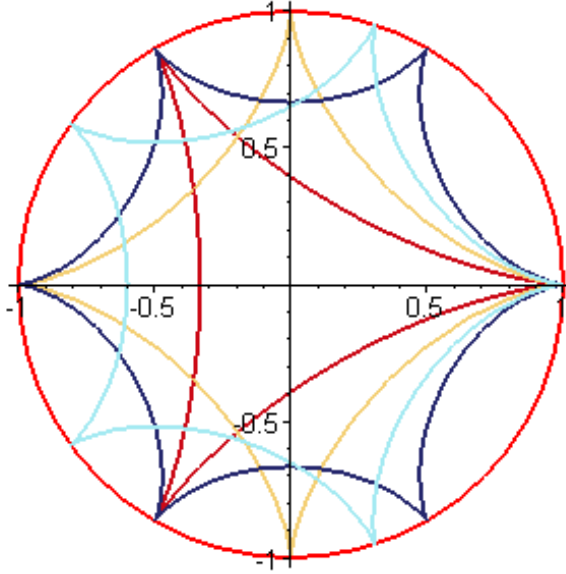
Proposition : En un point régulier M de Γ , la normale en M est la droite MP , la tangente est la droite MQ , Q point diamétralement opposé à P sur Γ .

Preuve : Cela découle de : $z_M - z_P = \rho.(e^{it} - e^{imt})$ et $\frac{dz}{dt} = \rho m i.(m.e^{it} - e^{imt})$.

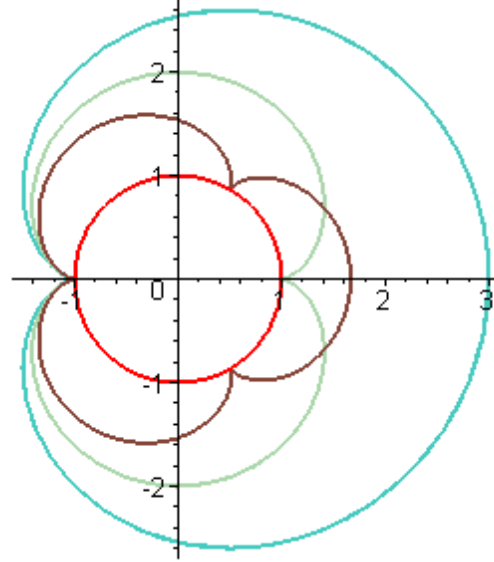
Cela découle aussi des propriétés du mouvement plan sur plan ; P est en effet le centre instantané de rotation.

4.4. Graphes.

```
> with(plots):
> F:=(r,m,t)->(r*(m*cos(t)-cos(m*t)),r*(m*sin(t)-sin(m*t))):
> p:=plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],color=red,thickness=2):
> h:=n->plot([F(-1/n,-n+1,t),t=0..2*Pi],color=COLOR(RGB, rand()/10^12,
rand()/10^12, rand()/10^12),thickness=2):
> display({p,h(3),h(4),h(5),h(6)},scaling=constrained);
> ee:=m->plot([F(1/(1-m),m,t),t=0..8*Pi],thickness=2,color=COLOR(RGB,
rand()/10^12, rand()/10^12, rand()/10^12)):
> display({p,ee(1/4),ee(1/3),ee(1/2)},scaling=constrained);
```



Hypocycloïdes



Epicycloïdes

4.5. Etude de l'ensemble des points critiques.

On est amené à distinguer deux cas :

- Si $m \notin \mathbb{Q}$, la courbe cycloïdale C a une infinité de points critiques, qui forment une partie dense du cercle B . Son intersection avec ce cercle contenant une infinité de points, C n'est pas une courbe algébrique. Son image est une partie dense de la couronne $u \leq |z| \leq v$, où

$$u = \inf(|a \frac{m-1}{m}|, |a \frac{m+1}{m}|) \quad \text{et} \quad v = \sup(|a \frac{m-1}{m}|, |a \frac{m+1}{m}|).$$

On ne représentera que quelques unes des arches.

- Si $m \in \mathbb{Q}$, $m = \frac{p}{q}$ ($p \wedge q = 1$), la courbe cycloïdale admet $N = |p - q|$ points critiques.

La courbe est unicursale, car, en posant $\frac{\theta}{q} = \varphi$, $\cos(p\varphi) = T_p(\cos \varphi)$, $\frac{\sin((p+1)\varphi)}{\sin \varphi} = U_p(\cos \varphi)$,

T_p et U_p étant les polynômes de Tchebychev.

$$x = \frac{\rho}{q} (p.T_q(\cos \varphi) - q.T_p(\cos \varphi)) \quad y = \frac{\rho \sin \varphi}{q} (p.U_{q-1}(\cos \varphi) - q.U_{p-1}(\cos \varphi)).$$

Posant $\tau = \tan(\varphi/2)$, x et y sont des fonctions rationnelles de τ .

Cette étude permet de préciser les résultats de 4.2. Tout déplacement laissant globalement invariante C est une rotation de centre O car O est isobarycentre de l'ensemble S des points critiques si S est fini, et, si S est infini, son adhérence est un cercle de centre O invariant. Il est donc du type $z \rightarrow \exp(\frac{2ik\pi}{m-1}).z$. On en déduit qu'en 4.2. on a trouvé toutes les isométries laissant invariante C .

4.6. Double génération d'une courbe cycloïdale (La Hire ²).

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$; \overrightarrow{OC} a pour affixe $\rho m e^{it}$; \overrightarrow{CM} a pour affixe $-\rho m e^{it}$.
Considérons le parallélogramme OCMC' :

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{CM} \text{ a pour affixe } -\rho m e^{it} ; \overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{OC} \text{ a pour affixe } \rho m e^{it}.$$

Peut-on trouver des constantes ρ' , m' et une variable t' telles que :

$$-\rho e^{imt} = \rho' m' e^{it'} , \quad \rho m e^{it} = -\rho' e^{im't'} ?$$

Ces relations sont compatibles et donnent $mm' = 1$, $\rho' = -\rho m$.

La courbe C peut donc être engendrée d'une seconde façon par le roulement d'un cercle sur un autre.

- Le cercle fixe a pour rayon $a' = (m' - 1)\rho' = (m - 1)\rho = a$: il coïncide avec B.
- Le cercle mobile Γ' touche B en P' d'angle polaire $t' = mt$ et son centre est tel que

$$(\overrightarrow{P'C'})_{t'} = \rho' = -\rho m = -\rho - a.$$

Dans le cas d'une hypocycloïde, Γ et Γ' sont tous deux intérieurs à B. Dans le cas d'une épicycloïde, Γ et Γ' ont, l'un un contact extérieur, l'autre un contact intérieur avec B.

5. Rectification, développée, équations intrinsèques.

5.1. Rectification (Newton, 1687).

$$ds^2 = dz.d\bar{z} = 4.\rho^2 m^2 .\sin^2\left(\frac{m-1}{2}t\right).dt^2 , \quad ds = 2.|\rho m .\sin\left(\frac{m-1}{2}t\right)|.dt , \quad s(t) = 2.|\rho m| \int_0^t \left|\sin\frac{m-1}{2}u\right|.du ,$$

en prenant A(a, 0) comme origine des abscisses curvilignes, et en orientant la courbe dans le sens des t croissants. Restreignons-nous à l'intervalle d'étude I.

1^{er} cas : $m > 1$, $\rho = r$: épicycloïde avec contact extérieur $I = [0, \frac{2\pi}{m-1}]$.

$$s(t) = 2.\rho m \int_0^t \sin\left(\frac{m-1}{2}u\right).du = \frac{4rm}{m-1} .[1 - \cos\left(\frac{m-1}{2}t\right)] .$$

$$\text{Longueur de l'arche : } L = \frac{8\rho m}{m-1} = \frac{8rm}{m-1} = 8r.(1 + \frac{r}{a})$$

Si $m = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, le nombre d'arches est $N = |p - q|$. La longueur totale est $N.L = 8Nr.(1 + \frac{r}{a})$.

Exemple 1 : E_1 ou cardioïde : $r = a$, $m = 2$, $L = 16a$.

Exemple 2 : E_2 ou néphroïde : $r = \frac{a}{2}$, $m = 3$, $L = 6a$, $NL = 12a$.

2^{ème} cas : $m < 1$: péricycloïde avec contact intérieur ou hypocycloïde $I = [0, \frac{2\pi}{1-m}]$.

$$s(t) = \frac{4rm}{1-m} .[1 - \cos\left(\frac{m-1}{2}t\right)] . \text{ Longueur de l'arche } L = \frac{8r|m|}{1-m} .$$

² **Philippe de LA HIRE** (Paris 1640 - Paris 1718) était le fils du graveur Laurent de La Hire (1606-1656), qui était, comme Abraham Bosse, disciple de Desargues. Il reçut une éducation artistique, notamment en dessin et en peinture. Il passa quatre ans en Italie pour perfectionner ses dons ; l'étude de la perspective le conduisit à apprendre la géométrie. Élu à l'Académie royale des sciences en 1678, il fut nommé en 1683 sur la chaire de mathématiques du Collège royal, et en 1687 sur la chaire d'architecture de l'Académie royale. Très influencé par Desargues, La Hire étudia les sections coniques d'un point de vue projectif. Il publia en 1673 *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*. Dans un livre plus ambitieux, *Sectiones conicae* (1675), il expose la géométrie projective de Desargues. Il rectifia la cardioïde en 1708. Il étudia aussi les carrés magiques, l'astronomie, la physique et la géodésie. En astronomie, il installa le premier théodolite à l'Observatoire de Paris, rédigea des tables donnant les mouvements du Soleil, de la Lune et des planètes. En géodésie, il mesura les côtes françaises, construisit un instrument pour trouver le niveau d'un site, et contribua à un projet de carte de France.

$L = 8r.(\frac{r}{a} - 1)$ si $0 < m < 1$ (péricycloïde) , $L = 8r.(1 - \frac{r}{a})$ si $m < 0$ (hypocycloïde).

Exemple 1 : E_1 ou cardioïde : $r = 2a$, $m = \frac{1}{2}$, $L = 16a$.

Exemple 2 : E_2 ou néphroïde : $r = \frac{3a}{2}$, $m = \frac{1}{3}$, $L = 6a$, $NL = 12a$.

Exemple 3 : H_3 ou deltoïde : $r = \frac{a}{3}$, $m = -2$, $L = \frac{16a}{9}$, $NL = \frac{16a}{3}$.

Exemple 4 : H_4 ou astroïde : $r = \frac{a}{4}$, $m = -3$, $L = \frac{3a}{2}$, $NL = 6a$.

Longueur de l'arche :	$L = \left \frac{8\rho m}{m-1} \right = 8 \left \frac{r^2}{a} + \epsilon r \right $
Longueur totale si $m = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$:	$N.L = \left \frac{8\rho m}{m-1} (p - q) \right $.

5.2. Aire d'une arche.

Aire d'une arche vue de O :	$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Im}(\bar{z}.dz) = \pi \rho^2 \frac{m(m+1)}{m-1}$
Aire totale si $m = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$:	$N.A = N \pi \rho^2 \frac{m(m+1)}{m-1}$

5.3. Développée.

Théorème (La Hire) : L'équation de la développée est $z(I) = \rho \frac{m-1}{m+1} (m.e^{it} + e^{imt})$.

C'est une courbe semblable à la courbe cycloïdale.

Preuve : $\vec{T} = \frac{dz}{ds} = \frac{\rho m}{|\rho m|} \frac{\sin(\frac{m-1}{2}t)}{\left| \sin(\frac{m-1}{2}t) \right|} e^{\frac{i(m+1)}{2}t}$. Restreignons-nous à l'intervalle d'étude.

- Si $m > 1$, $I = [0, \frac{2\pi}{m-1}]$, $\vec{T} = e^{\frac{i(m+1)}{2}t} = e^{i\alpha}$ où $\alpha = \frac{m+1}{2}.t$.
- Si $0 < m < 1$, $\rho < -a$, $I = [0, \frac{2\pi}{1-m}]$, $\vec{T} = e^{\frac{i(m+1)}{2}t} = e^{i\alpha}$ où $\alpha = \frac{m+1}{2}.t$.
- Si $m < 0$, $-a < \rho < 0$, $I = [0, \frac{2\pi}{1-m}]$, $\vec{T} = -e^{\frac{i(m+1)}{2}t} = e^{i\alpha}$ où $\alpha = \pi + \frac{m+1}{2}.t$.

$$\mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2}{m+1} \frac{ds}{dt} = \frac{4|\rho m|}{m+1} \left| \sin \frac{m-1}{2}t \right|.$$

Il reste à écrire $\vec{OI} = \vec{OM} + \mathcal{R} \vec{N}$, et à distinguer les trois cas ci-dessus.

Notons pour finir que $z_I(t) = \frac{m-1}{m+1} \exp(\frac{-i\pi}{m-1}).z_M(t + \frac{\pi}{m-1})$.

Cela montre que la développée est globalement invariante par la similitude $z \rightarrow \frac{m-1}{m+1} \exp(\frac{-i\pi}{m-1}).z$,

c'est-à-dire par $\text{Hom}(O, \frac{m-1}{m+1}) \circ \text{Rot}(O, \frac{-\pi}{m-1}) = S$.

5.4. Preuve géométrique.

Traisons le cas de l'épicycloïde contact extérieur : $m > 1$, $\rho > 0$.

\vec{T} a même orientation que \overrightarrow{MQ} car $\frac{dz}{dt} = m i \overrightarrow{MP}$, en

confondant vecteurs et complexes.

$$\begin{aligned}\alpha &= (\overrightarrow{Ox}, \vec{T}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MQ}) \\ &= (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OQ}) + (\overrightarrow{QO}, \overrightarrow{QM}) = t \frac{m+1}{2}.\end{aligned}$$

Transformons la figure par $\text{Hom}(O, \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OQ}})$,

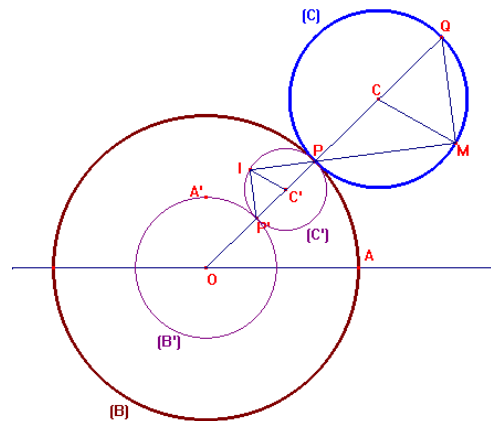
$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OQ}} = \frac{a}{a+2r} = \frac{m-1}{m+1}.$$

B devient B'(0, $a \frac{m-1}{m+1}$), Γ devient Γ' (C', $a \frac{m-1}{m+1}$).

La normale MP en M à C recoupe Γ' en I.

L'arc IP' est égal à l'arc P'A', en notant A' le point de B' d'angle polaire $\pi \frac{r}{a} = \frac{\pi}{m-1}$.

Tout se passe comme si Γ' roulait sur B'. I décrit une épicycloïde image de C par S. Et IP est la tangente en I à son lieu. Donc la normale MP enveloppe une épicycloïde semblable, le point caractéristique étant I.



5.5. Equation intrinsèque.

Les formules exprimant \mathfrak{R} et s en fonction de t , si l'on choisit $s = \frac{-4\rho m}{m-1} \cos(\frac{m-1}{2}t)$, donnent :

$$(m+1)^2 \cdot \mathfrak{R}^2 + (m-1)^2 \cdot s^2 = 16 \cdot \rho^2 \cdot m^2.$$

Si on fait rouler la courbe cycloïdale sur la tangente, le lieu du centre de courbure est une ellipse :

$$(m+1)^2 \cdot y^2 + (m-1)^2 \cdot x^2 = 16 \cdot \rho^2 \cdot m^2.$$

5.6. Développantes.

Elles sont données par la formule générale : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + (L - s) \vec{T}$.

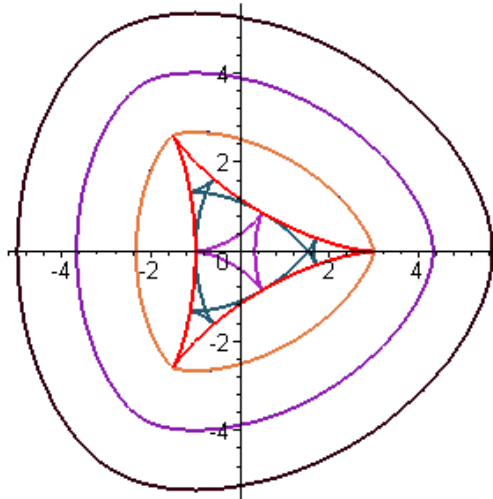
Traisons le cas de l'hypocycloïde. On trouve $Z_P = r \frac{1-3m}{1-m} e^{imt} - rm \frac{3-m}{1-m} e^{it} + (\frac{4mr}{1-m} - L) \cdot e^{i\frac{m+1}{2}t}$.

Dans mon étude sur les roues est établi le résultat suivant (cf. aussi § 8.2. pb 4) :

Théorème : Pour tout entier impair $n \geq 3$, les hypocycloïdes à n rebroussements admettent pour développantes des roues, c'est-à-dire des corps convexes de largeur constante.

Exemple : développantes d'hypocycloïde à 3 rebroussements (ou deltoïde).

```
> with(plots):
> x:=t->2*cos(t)+cos(2*t);y:=t->2*sin(t)-sin(2*t);s:=t->8/3*(1-cos(3*t/2));
> F:=(L,t)->(x(t)-(L-s(t))*cos(t/2),y(t)+(L-s(t))*sin(t/2));
> q:=L->plot([F(L,t),t=0..4*Pi],color=COLOR(RGB, rand()/10^12,
rand()/10^12, rand()/10^12),thickness=2);
> p:=plot([x(t),y(t),t=0..2*Pi],color=red,thickness=2):
> display({p,q(0),q(4/3),q(8/3),q(4),q(16/3),q(20/3),q(8)},
scaling=constrained);
```

Développantes d'hypocycloïdes à 3 rebroussements (ou deltoïde)

6. Les courbes cycloïdales comme enveloppes.

On peut définir, ou caractériser les courbes cycloïdales comme enveloppes de droites.

Théorème (Eckardt) : Deux points mobiles A et B se déplacent sur un cercle fixe, l'un avec une vitesse angulaire constante v , l'autre avec la vitesse angulaire constante $m.v$. La droite AB enveloppe une hypocycloïde si $m < 0$, une épicycloïde si $m > 0$.

On exclut les cas $m = 0$ (un point reste fixe) et $m = 1$ (AB enveloppe un cercle homothétique).

Preuve géométrique : Vérifions que les courbes cycloïdales possèdent cette propriété.

Cas de l'épicycloïde \mathfrak{E} . MQ recoupe le cercle (O, $a + 2r$) en Q', MP recoupe la base B en P'.

On a $\text{Arc}(AP') = a(t + u) = amt = m \cdot \text{Arc}(AP)$.

P et P' se déplacent sur la base B et enveloppent une épicycloïde de paramètre m , à savoir la développée de \mathfrak{E} .

Cas de l'hypocycloïde \mathfrak{H} . MQ recoupe le cercle (O, $a - 2r$) en Q', MP recoupe la base B en P'.

On a $\text{Arc}(AP') = a(t + u) = amt = m \cdot \text{Arc}(AP)$.

P et P' se déplacent sur la base B et enveloppent une hypocycloïde de paramètre m , à savoir la développée de \mathfrak{H} .

Preuve analytique : $A(a \cdot \cos t, a \cdot \sin t)$, $B(a \cdot \cos(mt), a \cdot \sin(mt))$.

Après simplification, la droite AB a pour équation d'Euler :

$$(D_m) \quad x \cdot \cos\left(\frac{m+1}{2}t\right) + y \cdot \sin\left(\frac{m+1}{2}t\right) = a \cdot \cos\left(\frac{m-1}{2}t\right).$$

$$\text{Dérivons } (D'_m) \quad -x \cdot \sin\left(\frac{m+1}{2}t\right) + y \cdot \cos\left(\frac{m+1}{2}t\right) = -a \cdot \frac{m-1}{m+1} \cdot \sin\left(\frac{m-1}{2}t\right).$$

$$D_m + i \cdot D'_m \text{ donne } z = \frac{a}{m+1} (m \cdot e^{it} + e^{imt}).$$

7. Les courbes trochoïdales.

7.1. Définition générale, paramétrisation.

Définition : On appelle **trochoïde** ou **courbe trochoïdale**, le lieu décrit par un point M attaché à un cercle Γ roulant sans glisser sur un cercle fixe B.

Reprenons les notations de 4.1. Cette fois-ci M n'appartient plus forcément à Γ . Notons $CM = L.r$.

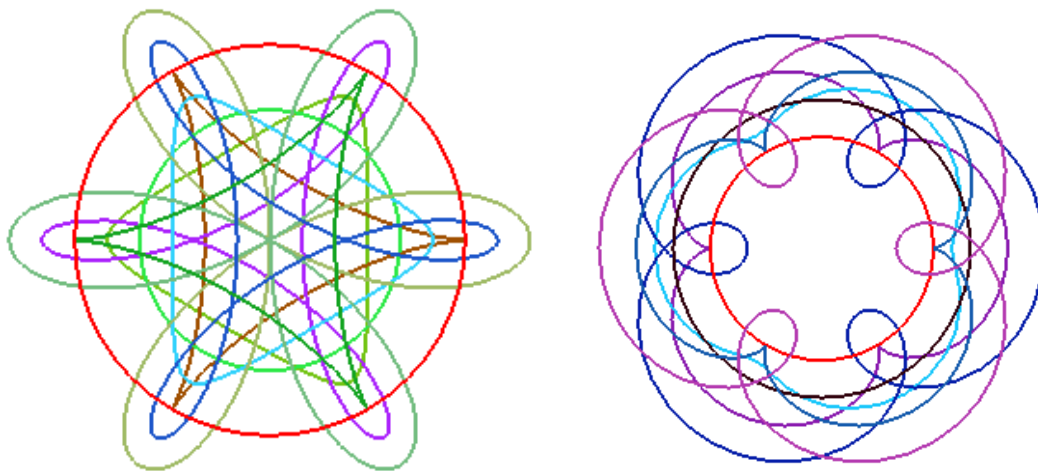
On trouve facilement $z = \rho \cdot (m \cdot e^{it} - L \cdot e^{imt})$.

Proposition : Une courbe paramétrée par $z(u) = a.e^{i\alpha(u-u_0)} + b.e^{i\beta(u-u_1)}$

où u_0 et u_1 sont des constantes arbitraires, et où a, b, α et β sont des constantes réelles non nulles telles que $\alpha \neq \beta$, est une courbe trochoïdale.

7.2. Graphes.

```
> with(plots):
Ta:=(r,m,l,t)->(r*(m*cos(t)-l*cos(m*t)),r*(m*sin(t)-l*sin(m*t)));
> ht:=1->plot([Ta(-1/3,-2,1,t),t=0..2*Pi],color=COLOR(RED, rand()/10^12,
rand()/10^12, rand()/10^12),thickness=2);
> display({p,ht(1),ht(0.5),ht(1.5),ht(2),ht(0),ht(-0.5),ht(-1),ht(-
1.5),ht(-2)},scaling=constrained,axes=None);
> et:=1->plot([Ta(1/3,4,1,t),t=0..2*Pi],color=COLOR(RED, rand()/10^12,
rand()/10^12, rand()/10^12),thickness=2);
> display({p,et(1),et(2),et(0),et(-1),et(-2),et(0.5)},
axes=None,scaling=constrained);
```



Courbes trochoïdales associées à une hypocycloïde et à une épicycloïde à trois rebroussements

7.3. Les courbes cycloïdales sont les seules courbes trochoïdales ayant des points critiques.

En effet $\frac{dz}{dt} = \rho m i (e^{it} - L e^{imt}) = 0$ ssi $L = e^{i(m-1)t}$; comme L est réel, $L = \pm 1$.

Si $L = 1$, on trouve $z = \rho.(m.e^{it} - e^{imt})$; c'est bon !

Si $L = -1$, on trouve $z = \rho.(m.e^{it} + e^{imt})$; mais alors $z(t+c) = \rho e^{ic} (m.e^{it} - e^{imt})$ pour $c = \frac{\pi}{m-1}$: une rotation ramène à $L = 1$.

7.4. Trochoïdes et équations différentielles.

L'équation différentielle $z'' - (\alpha + \beta).z' + \alpha\beta.z = 0$, $\alpha \neq \beta$ réels, a pour solutions

$$z = a.e^{i\alpha t} + b.e^{i\beta t} \quad (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

$z(t)$ décrit une courbe trochoïdale.

Exercice : Résoudre le système différentiel suivant (la variable est t) :

$$x'' = 3x - 4y', \quad y'' = 3y + 4x'.$$

Tracer la solution correspondant à $x(0) = 2$, $x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$.

8. Courbes cycloïdales particulières.

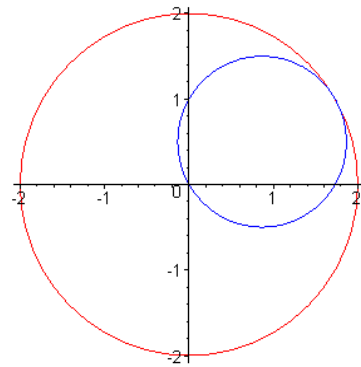
8.1. L'hypocycloïde à 2 rebroussements, ou engrenage de La Hire.

Définition : L'hypocycloïde à deux rebroussements est le lieu décrit par un point d'un cercle de rayon $a/2$ roulant sans glisser sur le cercle $C(O, a)$ en restant à l'intérieur de celui-ci.

L'H2 n'est autre qu'un segment de droite.

Paramétrisation : $x = a \cdot \cos t$

On l'appelle aussi « mouche de La Hire ». Elle a été étudiée par Cardan en 1570, et La Hire en 1699.



8.2. L'hypocycloïde à 3 rebroussements, ou deltoïde.

Définition : L'hypocycloïde à trois rebroussements est le lieu décrit par un point d'un cercle de rayon $a/3$ roulant sans glisser sur le cercle $C(O, a)$ en restant à l'intérieur de celui-ci.

L'H3 se nomme aussi **deltoïde** en raison de sa forme en Δ curviligne.

Equations, paramétrisations.

$$\begin{aligned} \text{Paramétrisation :} \quad x &= \frac{a}{3} [2 \cdot \cos \theta + \cos(2\theta)] & y &= \frac{a}{3} [2 \cdot \sin \theta - \sin(2\theta)] \\ x &= \frac{a \cdot (3 - 6u^2 - u^4)}{3(1+u^2)^2} & y &= \frac{8a \cdot u^3}{3(1+u^2)^2} \end{aligned}$$

Equation polynomiale :

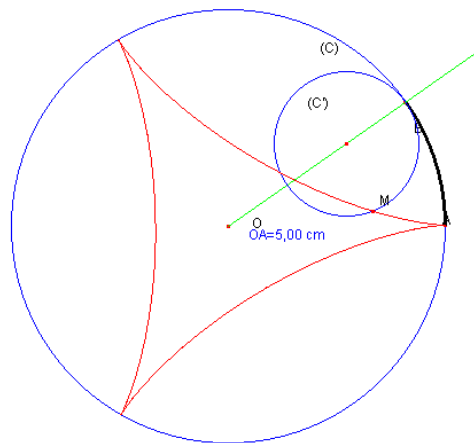
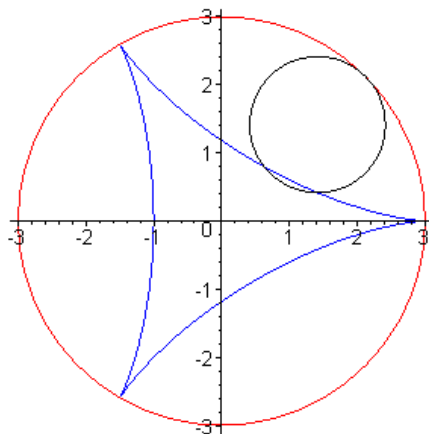
$$3(x^2 + y^2)^2 + 6a^2(x^2 + y^2) + 24a \cdot xy^2 - 8a \cdot x^3 - a^4 = 0$$

Equation intrinsèque : $9 \cdot \mathcal{R}^2 + 81 \cdot s^2 = 64 \cdot a^2$

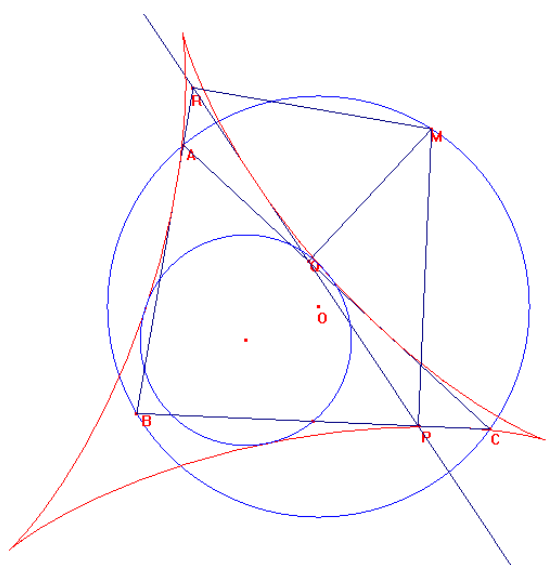
Longueur totale : $L = \frac{16}{3} a$.

Aire délimitée : $A = \frac{2\pi a^2}{9}$ (double de celle du cercle inscrit).

La deltoïde est une quartique.



Problème 1 : hypocycloïde de Steiner d'un triangle (1856).



0) Question préliminaire. Soit C un cercle de centre O , Ox un axe issu de O . Deux points P et P' décrivent C de façon que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP'}) = -2.(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$. Montrer que l'enveloppe de la droite PP' est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Soit $T = ABC$ un triangle. On note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre, Ω le centre du cercle d'Euler (milieu de OH).

1) Montrer que les projections orthogonales P , Q et R de M sur BC , CA et AB resp. sont alignées si et seulement si M est sur le cercle circonscrit. La droite PQR sera alors notée $\Sigma(M)$ (« droite de Simson » relative à M). Montrer qu'elle coupe le segment HM en son milieu N .

2) Montrer que si M et M' sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit, les droites $\Sigma(M)$ et $\Sigma(M')$ sont perpendiculaires, et que le lieu de leur point d'intersection est le cercle d'Euler.

3) La droite de Simson $\Sigma(M)$ relative à M coupe le cercle d'Euler en N et Z . Montrer que, lorsque M varie les arcs décrits par N et Z sont dans le rapport -2 , i.e. que $-2NN' = ZZ'$.

4) Montrer que $\Sigma(M)$ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements \mathcal{H} , tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle. Quel est le point de contact de $\Sigma(M)$ et de \mathcal{H} ? Montrer que \mathcal{H} est tri-tangente au cercle d'Euler, en des points qui forment un triangle équilatéral.

Problème 2 : hypocycloïde de Steiner d'un triangle.

Soit un triangle ABC , qu'on supposera inscrit dans le cercle unité. On note a , b et c les affixes resp. de A , B et C . Un point $M(z)$ se projette en P , Q et R sur les droites BC , CA et AB resp.

1) Calculer l'afixe p de P ; en déduire celles de Q et R .

2) Montrer l'équivalence : PQR sont alignés $\Leftrightarrow M$ appartient au cercle circonscrit au triangle ABC . La droite PQR est appelée **droite de Simson** associée au point M .

3) Soient M et M' deux points du cercle circonscrit à ABC . Montrer que les droites de Simson associées à M et M' sont perpendiculaires ssi M et M' sont diamétralement opposés.

4) Soient $ABCD$ quatre points cocycliques distincts. Montrer que les droites de Simson de chacun des points par rapport au triangle formé par les trois autres sont concourantes.

5) Soit $M(e^{i\theta})$ un point du cercle circonscrit. Ecrire sous forme d'un déterminant l'équation de la droite de Simson associée. On suppose à rotation près du repère que $a = 1$. On pourra admettre que cette droite de Simson a pour équation :

$$-2Z.e^{i2\theta} + 2\bar{Z}.e^{i\theta}bc + e^{i3\theta} + e^{i2\theta}(b+c+1) - e^{i\theta}(bc+b+c) - bc = 0.$$

6) Trouver le point caractéristique $Z(\theta)$ de cette famille de droites, et vérifier qu'il a pour affixe :

$$Z(\theta) = \omega + \frac{e^{-i\varphi}}{2} (2.e^{i\psi} + e^{-i2\psi}) \quad , \quad \text{où } \omega = \frac{b+c+1}{2} \quad , \quad bc = e^{i2\alpha} \quad , \quad \psi = \theta + \varphi.$$

En déduire que l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle est une hypocycloïde à 3 rebroussements, ayant pour centre le centre du cercle d'Euler, tritangente à ce cercle (théorème de Steiner³).

³ Jakob Steiner (1796-1863), grand géomètre suisse qui enseigna à Berlin.

Problème 3 : deltoïde et paraboles.

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé xOy . Soient $P(a, 0)$, $Q(0, b)$ (a et $b \neq 0$).

- 1) Montrer que la parabole tangente à Ox en P et à Oy en Q a pour équation $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1)^2 = \frac{4xy}{ab}$.

Montrer que son foyer F appartient au segment $[P, Q]$ et vérifie $\frac{FP}{FQ} = \frac{a^2}{b^2}$.

Montrer que son axe a pour équation $bx - ay = ab \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$

Soit R non nul. Montrer que cette parabole est tangente à la droite $D : x + y = R$ ssi $R = \frac{ab}{a+b}$.

- 2) Montrer que l'enveloppe des axes des paraboles tangentes à Ox , Oy et D est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Problème 4 : deltoïdes et roues.

- 1) Montrer que la famille de droites $(D_\theta) \quad x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = 8 + \cos(3\theta)$ enveloppe une développante d'hypocycloïde à trois rebroussements, qui est de surcroît la frontière d'un convexe compact de largeur constante dans toutes les directions (de tels convexes s'appellent des roues).

- 2) Plus généralement, montrer que, parmi les développantes d'une H_3 figurent des roues.

Remarque : pour des compléments, cf. mon chapitre sur les roues.

8.3. L'hypocycloïde à 4 rebroussements, ou astroïde.

Définition : L'**astroïde**⁴ est le lieu décrit par un point d'un cercle de rayon $a/4$ roulant sans glisser sur un cercle fixe de rayon a , en restant à l'intérieur de celui-ci.

Equations, paramétrisations.

Paramétrisation : $x = \frac{a}{4} [3 \cdot \cos \theta + \cos(3\theta)] = a \cdot \cos^3 \theta \quad y = \frac{a}{4} [3 \cdot \sin \theta - \sin(3\theta)] = a \cdot \sin^3 \theta$

Equation rationnelle : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Equation polynomiale : $(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27 \cdot a^2 x^2 y^2 = 0$

Equation tangentielle : $w^2(u^2 + v^2) - a^2 u^2 v^2 = 0$ ou $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{a^2}{w^2}$.

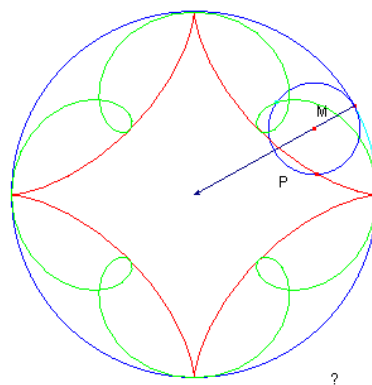
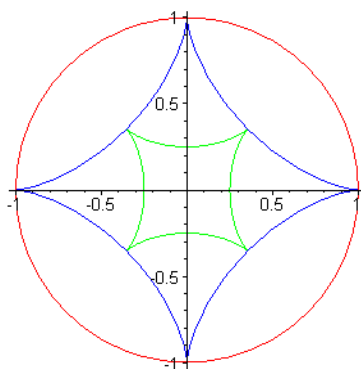
Rappelons que c'est une cns pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à la courbe.

Equation intrinsèque : $\mathcal{R}^2 + 4 \cdot s^2 = 9 \cdot a^2$

Longueur totale : $L = 6a$.

Aire délimitée : $A = \frac{3\pi a^2}{8}$

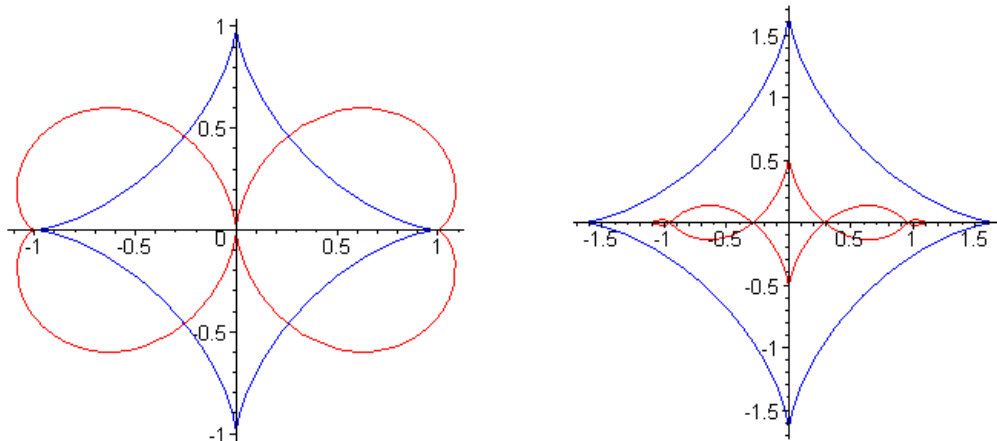
L'astroïde est une sextique.



⁴ Dénomination proposée par le mathématicien et astronome bohémien Joseph von Littrow en 1838.

Théorème : L'astroïde est l'enveloppe des segments variables AB de longueur fixe a , dont les extrémités A et B sont astreintes à rester sur des droites fixes et perpendiculaires.

Preuve : $A(a.\cos\theta, 0)$, $B(0, a.\sin\theta)$. La droite AB a pour équation $x.\cos\theta + y.\sin\theta = a.\sin\theta.\cos\theta$.
Son point caractéristique est $M(x = a.\sin^3\theta, y = a.\cos^3\theta)$.



Images d'une astroïde par la transformation de Joukowski $z \rightarrow \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$. Hommage à F. Le Lionnais.

Exercice : Le scarabée. Soit A un point de la bissectrice $x = y$. Etudier et représenter la podaire de A par rapport à l'astroïde, c'est-à-dire le lieu des projections de A sur les tangentes d'icelle, pour différents points A. Cas où $A = O$?

8.4. L'épicycloïde à 1 rebroussement, ou cardioïde.

« L'église n'était pas très éloignée. La voiture décrivit une élégante cardioïde et s'arrêta en bas des marches. »

Boris Vian, L'Écume des jours, XXI, p.105

Définition : La **cardioïde**⁵ est le lieu d'un point d'un cercle qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon a , en restant tangent extérieurement à ce cercle.

Equations, paramétrisations.

Equations paramétriques : $x = a.[2.\cos t - \cos(2t)]$, $y = a.[2.\sin t - \sin(2t)]$

$$x = \frac{2a(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \quad , \quad y = \frac{4au}{(1+u^2)^2}$$

Equation cartésienne : $(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$

Equation tangentielle : $27a^2 w(u^2 + v^2) = 2(au + v)^3$

Equation intrinsèque : $9.\mathcal{R}^2 + 4.s^2 = 64.a^2$

Longueur totale : $L = 16a.$

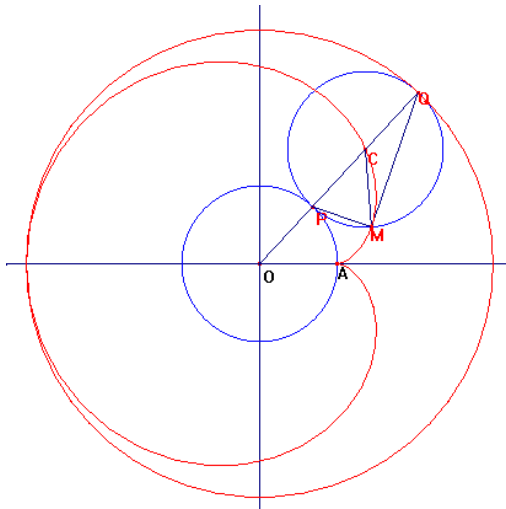
Aire délimitée : $A = 6\pi a^2.$

La cardioïde est une quartique rationnelle.

⁵ La découverte de cette courbe est attribuée à Jacques Koersma ; sa dénomination est due à Castillon (1741).

Constructions.

Avec Cabri-géomètre :

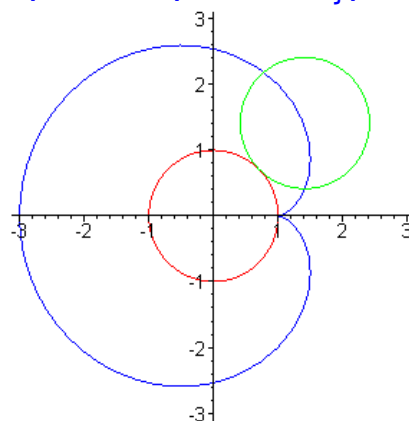


Avec fantaisie :



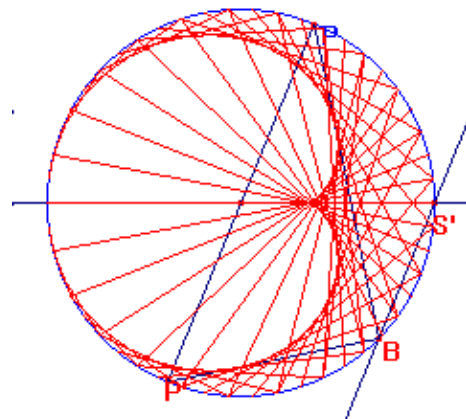
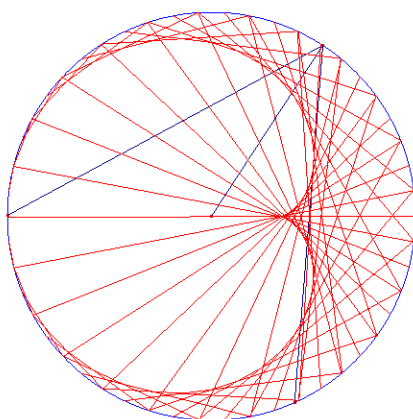
Avec Maple :

```
> with(plots):base:=plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi]):
> roulante:=animate([2*cos(t)+cos(u),2*sin(t)+sin(u),u=0..2*Pi],
t=Pi/4..Pi/4+4*Pi,frames=20,color=green):
> cardioide:=plot([2*cos(t)-cos(2*t),2*sin(t)-sin(2*t),t=0..2*Pi],
color=blue):display({base,roulante,cardioide},scaling=constrained);
```



La cardioïde comme enveloppe de droites.

1) Une source lumineuse est placée en un point S d'un disque. Les rayons lumineux issus de S se réfléchissent sur la surface du disque. L'enveloppe des rayons réfléchis (ou caustique par réflexion) est une cardioïde.



2) Sur un cercle C de centre O on se donne un point fixe S' . Un diamètre PP' tourne autour de O . On mène la corde $S'B$ parallèle à ce diamètre. L'enveloppe des droites BP et BP' est la cardioïde de cercle directeur C , et de sommet le point diamétralement opposé à S' .

La cardioïde comme limaçon de Pascal.

La cardioïde est la conchoïde d'un cercle par rapport à un de ses points, pour une longueur égale au diamètre de ce cercle.

Exercice 1 : les amours de la cardioïde et de la cycloïde.

Une cardioïde d'équation polaire $r = b (1 + \cos \theta)$ roule sans glisser à l'intérieur d'une arche de cycloïde $x = a (u - \sin u)$, $y = a (1 - \cos u)$.

1) Quelle relation y a-t-il entre a et b pour que les deux courbes aient même longueur totale ?

2) On suppose cette condition remplie, et on suppose qu'à l'instant initial le point de rebroussement de la cardioïde est en O . Quel est le lieu de ce point de rebroussement ? Animation Maple ?

Exercice 2 : Montrer que la courbe orthoptique de la cardioïde $C : z = a.(2e^{it} - e^{2it})$, c'est-à-dire le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à C , est la réunion du cercle $(O, 3a)$ et de la trochoïde $Z = \frac{3a\sqrt{3}}{4} (2e^{iu} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{2iu})$.

Exercice 3 : Soit $E = \{ z + \frac{z^2}{2} ; z \in \mathbf{C} \text{ et } |z| \leq 1 \}$. Représenter E et calculer son aire. [Oral X 2009]

8.5. L'épicycloïde à 2 rebroussements, ou néphroïde.

Si la cardioïde était chérie par Boris Vian, à la néphroïde va ma dilection. Elle se dessine tous les matins sur la surface de mon bol de café, tous les soirs sur celle de mon whisky préféré.

Définition : La **néphroïde** est le lieu d'un point d'un cercle de rayon $a/2$ qui roule sans glisser sur un cercle fixe de rayon a , en restant tangent extérieurement à ce cercle.

Equations, paramétrisations.

Equations paramétriques : $x = \frac{a}{2} [3.\cos t - \cos(3t)]$, $y = \frac{a}{2} [3.\sin t - \sin(3t)]$

$$x = a.\cos t . [3 - 2.\cos^2 t], \quad y = 2a.\sin^3 t.$$

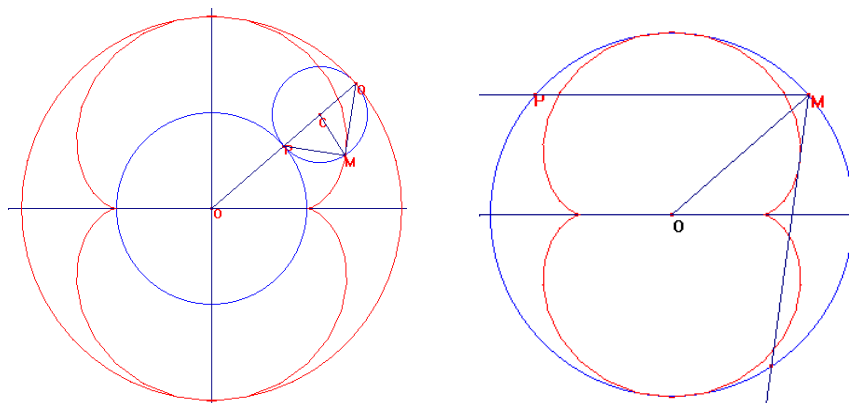
Equation cartésienne : $4.(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27a^4 y^2$

Longueur totale : $L = 12a.$

Aire délimitée : $A = 3\pi a^2.$

La néphroïde est une sextique rationnelle.

Avec Cabri :



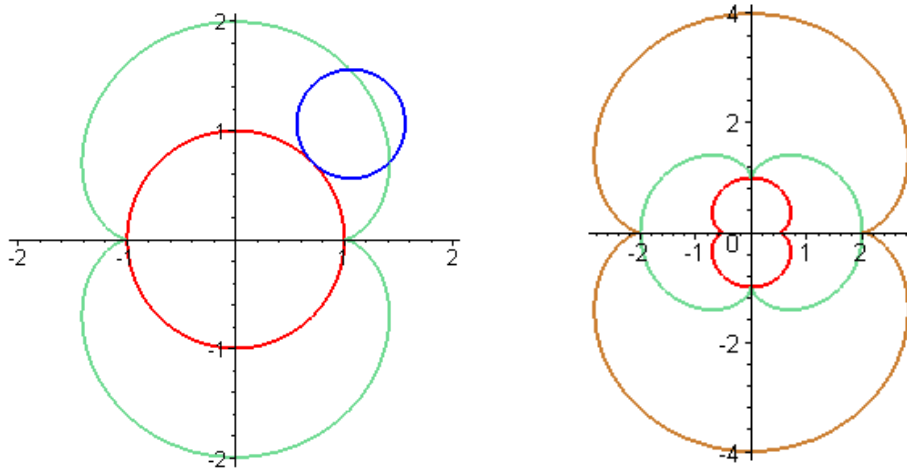
Avec Maple :

```
> with(plots):
> base:=plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],thickness=2):
```

```

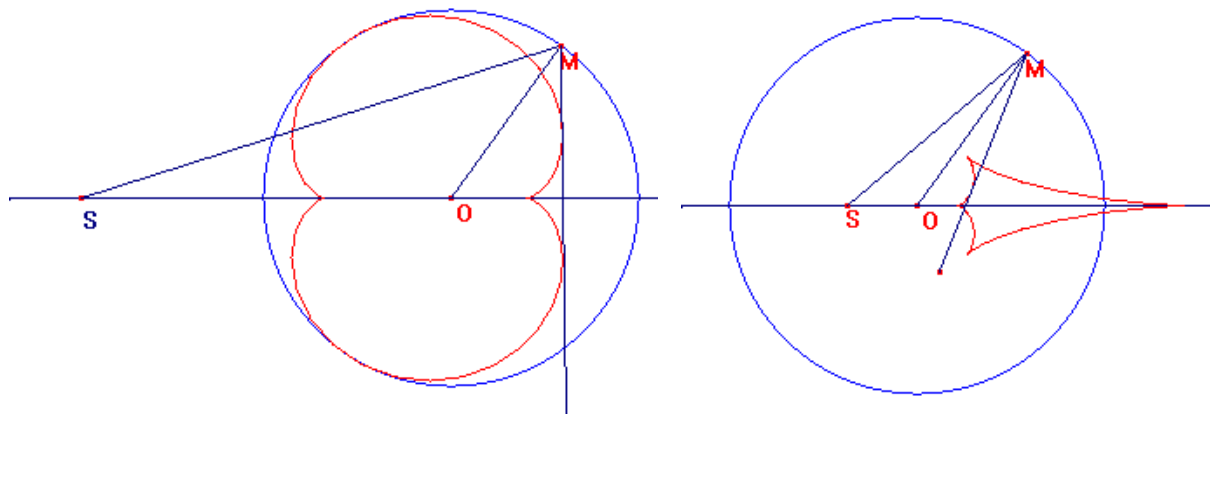
>roulante:=animate([3/2*cos(t)+1/2*cos(u),3/2*sin(t)+1/2*sin(u),u=0..2*Pi],
t=Pi/4..Pi/4+4*Pi,frames=20,color=blue,thickness=2);
>nephroide:=plot([3/2*cos(t)-1/2*cos(3*t),3/2*sin(t)-1/2*sin(3*t),t=0..2*Pi],
color=aquamarine,thickness=2);
display({base,roulante,nephroide},scaling=constrained);
>x:=t->3*cos(t)-cos(3*t);y:=t->3*sin(t)-sin(3*t);
x2:=t->1/4*(3*cos(t)-cos(3*t));y2:=t->1/4*(3*sin(t)-sin(3*t));
>x1:=t->1/2*(3*sin(t+Pi/2)-sin(3*(t+Pi/2)));
y1:=t->1/2*(3*cos(t+Pi/2)-cos(3*(t+Pi/2)));
>p:=plot([x(t),y(t),t=0..2*Pi],color=gold,thickness=2);
q:=plot([x1(t),y1(t),t=0..2*Pi],color=aquamarine,thickness=2);
r:=plot([x2(t),y2(t),t=0..2*Pi],color=red,thickness=2);
display({p,q,r},scaling=constrained);

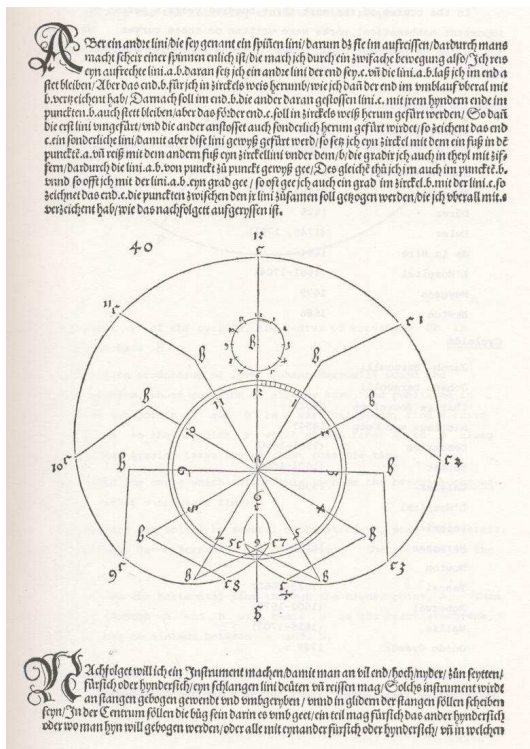
```



Annexe : Caustiques par réflexion d'un cercle.

Lorsque la source lumineuse se situe sur un diamètre du cercle de réflexion, la caustique par réflexion n'est plus une courbe cycloïdale. Cependant, il est facile de la visualiser avec Cabri, et l'on peut trouver son équation et la tracer avec Maple. Lorsque la source varie du point à l'infini à un point du cercle, on obtient une caustique à deux rebroussements qui évolue continûment d'une néphroïde à une cardioïde (l'un des points de rebroussement disparaît alors). Lorsque la source pénètre à l'intérieur du cercle, la caustique a trois rebroussements. Lorsque la source tend vers le centre, elle se résorbe et se concentre au voisinage du centre.





Une épitrochoïde, Albrecht Dürer (1525)

Par malheur, l'esprit de mon père à la recherche d'une solution se trompa de chemin. Comme notre hypercritique, il ne vit rien que le temps écoulé entre le coup de sonnette et le coup à la porte, si préoccupé de sa mesure qu'il ne pouvait penser à rien d'autre – banale infirmité des plus grands mathématiciens fascinés par leur démonstration et y dépensant tant de forces qu'il ne leur en reste plus pour tirer le corollaire dont ils feraient bon usage.

Le pont-levis ayant été jugé irréparable, *Trim* reçut l'ordre d'en édifier sur-le-champ un autre, mais d'un modèle différent. (...) Mais mon père, ayant le plus sérieusement du monde conseillé à son frère d'éviter désormais les ponts à va-et-vient mon oncle, pour ne pas perpétuer le souvenir des mésaventures de *Trim*, se tourna vers l'invention du marquis de l'Hôpital, que *Bernouilli* cadet a si longuement et si savamment décrite, comme Votre Grâce peut le voir, dans les *Act. Erud. Lips* an. 1695 : un poids de plomb y maintient un équilibre constant et le pont se trouve automatiquement gardé aussi bien que par deux sentinelles, la courbe de sa construction étant une cycloïde approchée sinon une cycloïde elle-même.

Mon oncle *Toby* connaissait une parabole aussi intimement qu'aucun homme d'Angleterre ; sa maîtrise des cycloïdes n'était pas aussi totale ; il en parlait bien tous les jours mais le pont n'avancait pas.

Laurence Sterne, *Tristram Shandy*, II.X et III.XXV

Cycloïde

Qu'est-ce que dirait
La sinusoïde,

S'il lui fallait cogner
À bas de chaque courbe

Et regimber à pic
Après le choc reçu ?

Guillevic, *Euclidiennes*

Bibliographie

- J. Lemaire : Epicycloïdes et hypocycloïdes (Vuibert)
- G. Cagnac, E. Ramis : Cours de math spé, t. IV p. 174-185 (Masson)
- J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudière : Cours de math spé t. 3, p.413-435 (Dunod)
- M. Berger : Géométrie, t. 2 n° 9.14.34 p. 146-150 (Nathan)
- J. Rivaud : Exercices de géométrie, 1 p. 44, 226 (Vuibert)
- E. Brieskorn, H. Knörrer : Plane algebraic curves (Birkhäuser)
- C. Zwikker : The advanced geometry of plane curves and their applications (Dover)
- L.-G. Vidiani : Les épi et hypo-trochoïdes
- Problème de Centrale 2007, MP
- Sites Internet :

Machine d'Anticythère, Wikipedia

<http://www.mathcurve.com/>

<http://aesculier.chez.tiscali.fr/>