

ESPACES MÉTRIQUES

A. Géométrie d'un espace métrique

- A.1. Distances, espaces métriques
- A.2. Boules, sphères, diamètres
- A.3. Premiers exemples d'espaces métriques
- A.4. Espaces vectoriels normés
- A.5. Semi-distances, semi-normes

B. Topologie d'un espace métrique

- B.1. Ouverts, intérieur d'une partie
- B.2. Voisinages, suites convergentes
- B.3. Fermés, adhérence, ensembles denses
- B.4. Sous-espaces d'un espace métrique
- B.5. Topologie d'un espace semi-métrique

C. Limites, fonctions continues

- C.1. Limite d'une fonction
- C.2. Applications continues
- C.3. Homéomorphismes
- C.4. Applications uniformément continues
- C.5. Comparaison des distances
- C.6. Théorèmes élémentaires de prolongement
- C.7. Théorème de Tietze-Urysohn
- C.8. Valeurs d'adhérence

D. Espaces métriques complets

- D.1. Suites de Cauchy, espaces métriques complets
- D.2. Complétion d'un espace métrique
- D.3. Théorème du point fixe de Picard-Banach
- D.4. Prolongement des applications uniformément continues
- D.5. Théorème de Baire

E. Espaces métriques compacts

- E.1. Définitions de la compacité
- E.2. Ensembles compacts dans un espace métrique
- E.3. Compacité et applications continues : théorème des bornes
- E.4. Compacité et applications continues : théorème de Heine
- E.5. Espaces localement compacts

F. Espaces métriques connexes par arcs

- F.1. Espaces connexes par arcs, composantes connexes par arcs
- F.2. Théorème des valeurs intermédiaires
- F.3. Exemples

G. Espaces métriques de type dénombrable

- G.1. Définition, caractérisations
- G.2. Exemples et contre-exemples
- G.3. Propriétés

H. Distance de Hausdorff

- H.1. L'ensemble triadique de Cantor
- H.2. Distance et dimension de Hausdorff
- H.3. Applications aux ensembles fractals
- H.4. Applications aux systèmes dynamiques

Pierre-Jean Hormière

Ce chapitre suppose connues les propriétés de la droite réelle. Il se propose d'abord de définir axiomatiquement la distance de deux objets mathématiques appartenant au même ensemble : distance entre deux réels, deux complexes, deux vecteurs, deux matrices, deux polynômes, deux fonctions, etc. Ensuite, il se propose de classer les différentes parties d'un espace métrique selon leur forme, ce qu'on appelle leurs propriétés « topologiques » : parties ouvertes et fermées. Et si A est une partie quelconque, on définira son intérieur, son adhérence, son extérieur, sa frontière, etc. Tous ces mots sont empruntés au langage courant, et leur choix ne fut pas gratuit, comme toujours en mathématiques. Tout en conservant une partie de la métaphore dont ils sont issus, ils reçoivent ici une définition précise : « *Le concept est la coquille vide d'une métaphore qu'innervait autrefois l'intuition* », écrivit Eugen Fink. En troisième lieu, on définit rigoureusement les notions de limite et de continuité, qui sont le point de départ de l'analyse.

Les objectifs de ce chapitre sont à la fois abstraits et appliqués. Les espaces métriques sont indispensables, non seulement en analyse théorique, mais aussi en analyse numérique et théorie de l'approximation. Qu'est-ce, en effet, qu'approcher un réel par un rationnel, une matrice par une autre, une fonction continue par un polynôme ou une fonction en escaliers, si ce n'est minimiser leur distance ? Encore faut-il choisir celle-ci, et en connaître les propriétés.

La théorie des espaces métriques n'a vu le jour qu'au début du XX^{ème} siècle, une fois dégagées et clarifiées les propriétés fondamentales de la droite réelle, avec **Augustin Cauchy** (1789-1857), **Bernard Bolzano** (1781-1848), **Karl Weierstrass** (1815-1897), **Charles Méray** (1835-1911), et **Richard Dedekind** (1831-1916). Après 1850, l'école d'analyse de Berlin, animée par Weierstrass et l'école de Pise, groupée autour d'**Ulisse Dini** (1845-1918) commencent à étudier les divers types de convergence de suites de fonctions, et leurs relations.

Le premier mathématicien à entrevoir la topologie générale fut peut-être **Bernhard Riemann** (1826-1866). Dans sa célèbre conférence inaugurale à Göttingen (1854), il annonce l'émergence nécessaire d'« *une partie de la théorie des grandeurs, indépendante de la mesure, et où les grandeurs ne sont pas considérées comme ayant une existence indépendante de leur position, ni comme exprimables au moyen d'une unité de mesure, mais comme des parties d'une multiplicité* ». Mais le premier à avoir mis en œuvre ce projet fut **Georg Cantor** (1845-1918). La théorie qu'il fonda sous le nom de « *théorie des ensembles* » désignait à la fois la théorie des ensembles purs, et la topologie. En 1906, **Maurice Fréchet** (1878-1973) crée les espaces métriques afin de présenter dans un cadre unifié la convergence dans les espaces ponctuels et fonctionnels. Les notions d'espaces compact, connexe, et complet sont alors dégagées. Dans son ouvrage fondamental *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), **Félix Hausdorff** (1868-1942) fixa une grande part du vocabulaire de la topologie générale. Il introduisit en 1919 les notions de distance et de dimension de Hausdorff, aujourd'hui utilisées dans l'étude des fractals.

Entre les deux guerres, les écoles mathématiques polonaise, groupée autour de **Stefan Banach** (1892-1945), et russe groupée autour de **Nikolaï Lusin** (1883-1950), ont développé systématiquement cette branche des mathématiques. À la fin des années 1930, le mathématicien français polycéphale **Nicolas Bourbaki** a couronné l'édifice dans ses remarquables fascicules de Topologie générale. Trois de ses membres ont apporté des contributions substantielles à ce domaine : **Henri Cartan** (1904) a créé en 1937 la théorie des filtres, qui sont aux espaces topologiques généraux ce que les suites sont aux espaces métriques ; **Jean Dieudonné** (1906-1992) a défini et étudié les espaces paracompacts ; **André Weil** (1906-1998) s'est aperçu que les espaces métriques sont au confluent de deux types de structures plus fondamentales, les structures topologiques, déjà connues, et les structures uniformes.

La topologie générale fournit le cadre conceptuel nécessaire pour étudier l'analyse fonctionnelle, la théorie de la mesure et de l'intégration, et la théorie de l'approximation. Mais elle est aussi le point de départ d'autres branches de la topologie, la topologie combinatoire et algébrique, qui définit les invariants algébriques (homotopiques et homologiques) faisant obstacle à la déformation des espaces par homéomorphisme, et la topologie différentielle, qui étudie et classifie les formes des variétés différentielles, notamment au voisinage de leurs points critiques (théorie des catastrophes de Thom).

A. Géométrie d'un espace métrique

« L'un est blanc, l'autre est noir, c'est la distance. »

François Villon, *Le débat du cœur et du corps de Villon*.

« Etant donnés deux points, A et B, situés à égale distance l'un de l'autre, comment faire pour déplacer B, sans que A s'en aperçoive ? »

Jean Tardieu, *Petits problèmes et travaux pratiques*.

« Ses tout premiers souvenirs étaient des distances : entre lui et sa mère, entre sa mère et son père, entre le sol et le plafond, entre l'inquiétude et la joie. Sa vie entière se résumait à des distances à mesurer, à raccourcir ou à rallonger. »

Henning Mankell, *Profondeurs*.

A.1. Distances, espaces métriques.

Définition 1 : Soit E un ensemble. Une **distance** sur E est une application

$d : (x, y) \in E \times E \rightarrow d(x, y) \in \mathbf{R}_+$ vérifiant les trois axiomes de Fréchet :

(D 1) séparation $\forall (x, y) \in E \times E \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D 2) symétrie $\forall (x, y) \in E \times E \quad d(x, y) = d(y, x)$

(D 3) inégalité du triangle $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

On appelle **espace métrique**¹ un couple (E, d) formé d'un ensemble E et d'une distance d sur E².

Conséquences des axiomes :

1. pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$.

2. $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad |d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$.

Exercice 1 : Plus généralement, montrer l'inégalité du quadrilatère :

$\forall (x, y, z, t) \in E^4 \quad |d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t)$.

Exercice 2 : Soit $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction vérifiant les deux axiomes :

(D 1) $\forall (x, y) \in E \times E \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D'3) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E \quad d(x, z) \leq d(z, y) + d(y, x)$.

Montrer que d est une distance sur E

Définition 2 : Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Une application $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ est dite **métrique** si $\forall (x, y) \in E \times E \quad d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Une **isométrie** est une application métrique bijective. Les espaces métriques (E, d) et (E', d') sont dits **isométriques** s'il existe une isométrie de l'un sur l'autre.

Propriétés :

1) Toute application métrique est injective.

2) La composée de deux applications métriques est métrique.

3) La composée de deux isométries, la bijection réciproque d'une isométrie, sont des isométries.

¹ La notion d'espace métrique remonte à **Maurice Fréchet** (1906), le terme *espace métrique* (*metrischer raum*) est dû à **Felix Hausdorff** (*Grundzüge der Mengenlehre*, 1914), dont je reparlerai en annexe.

² En mathématiques, la distance entre deux points est une mesure de leur différence ; elle est toujours finie, et symétrique. En matière psychologique, les avis divergent, comme le montrent ces deux réflexions : « Si nous pouvions mesurer la distance qui nous sépare de ceux que nous croyons les plus proches, nous aurions peur. » (Cocteau). « Si un homme me tient à distance, ma consolation est qu'il s'y tient aussi.. » (Swift). « Tout est distance, — et nulle part ne se ferme le cercle. », affirme quant à lui Rilke. Lorsque (D2) n'est pas satisfaite, on parle de quasimétrie ; ainsi, la plus courte distance d'une ville à une autre n'est pas la même si certaines routes sont à sens unique.

4) L'ensemble $\text{Is}(E, d)$ des isométries de l'espace métrique (E, d) sur lui-même est un groupe pour la composition des applications, sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}(E)$ des permutations de E .

5) Soient (E, d) un espace métrique et f une bijection de E sur un ensemble E' (sur lequel aucune distance n'est définie a priori). On peut alors définir une distance d' sur E' par :

$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ou plutôt par $d'(x', y') = d(g(x'), g(y'))$, où g est la bijection réciproque de f . Cette distance, dite **transportée** par la bijection f , est l'unique distance telle que f soit une isométrie de (E, d) sur (E', d') . On en verra en A.4 de multiples exemples.

6) Si (E, d) et (E', d') sont isométriques, les groupes $\text{Is}(E, d)$ et $\text{Is}(E', d')$ sont isomorphes.

A.2. Boules, sphères, diamètres, etc.

Toutes les notions introduites dans ce paragraphe proviennent des espaces euclidiens.

Définition 1 : Soit (E, d) un espace métrique, $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_+^*$. On appelle :

boule ouverte de centre a et de rayon r $B(a, r) = \{ x \in E ; d(a, x) < r \}$

boule fermée de centre a et de rayon r $B'(a, r) = \{ x \in E ; d(a, x) \leq r \}$

sphère³ de centre a et de rayon r $S(a, r) = \{ x \in E ; d(a, x) = r \}$

On a bien sûr $B'(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$, $a \in B(a, r) \subset B'(a, r)$ mais $S(a, r)$ peut parfois être vide.

Définition 2 : distance d'un point à une partie, distance de deux parties.

Soit A une partie non vide de E . On appelle distance de x à A le réel $d(x, A) = \inf \{ d(x, y) ; y \in A \}$

Soient A et B deux parties non vides de E . Leur distance est $d(A, B) = \inf \{ d(x, y) ; x \in A, y \in B \}$.

Propriétés :

1) On a $d(A, B) = \inf \{ d(x, B) ; x \in A \} = \inf \{ d(y, A) ; y \in B \}$ en vertu du théorème d'associativité des bornes inférieures.

2) Ces bornes inférieures ne sont pas atteintes en général. Ainsi :

— dans \mathbf{R} muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, $d(0, \mathbf{R}_+^*) = d(\mathbf{R}_-^*, \mathbf{R}_+^*) = 0$, mais ces distances ne sont pas atteintes.

— dans \mathbf{R}^2 muni de la distance euclidienne usuelle, la distance du point O à la spirale logarithmique $r = C \cdot \exp(m\theta)$ est nulle, la distance d'une hyperbole à ses asymptotes est nulle, sans qu'elles se touchent⁴.

3) Si $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties non vides de E , la fonction $d : (A, B) \rightarrow d(A, B)$ n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(E)$, contrairement à ce que suggère son nom⁵. Elle vérifie (D2), mais ne vérifie ni (D1), ni (D3). Ainsi $d(A, B) = 0$ n'implique pas $A = B$! Et $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ n'est pas toujours vrai : si B rencontre A et C , par exemple.

$d(A, B)$ devrait plutôt être appelée écartement, ou mesure d'écartement, entre A et B .

Si l'on veut définir à l'aide de d une véritable distance sur $\mathcal{P}(E)$, utile pour faire varier continûment des ensembles de points, il faut faire appel à la distance de Hausdorff (cf. H).

4) Distance à une boule, distance de deux boules.

$$(\forall x \in E) \quad d(x, B(a, r)) \geq \max(d(a, x) - r, 0) \quad \text{et} \quad d(x, B'(a, r)) \geq \max(d(a, x) - r, 0)$$

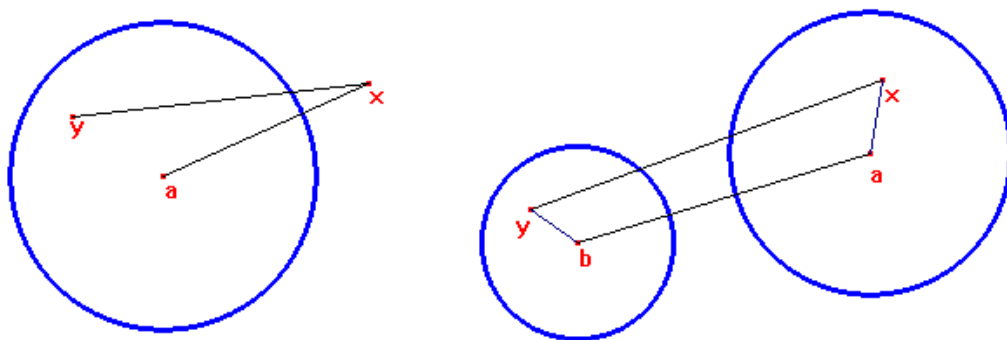
$$(\forall a, b \in E) \quad (\forall r, s \in \mathbf{R}_+^*) \quad d(B(a, r), B(b, s)) \geq \max(d(a, b) - r - s, 0)$$

³ Ces définitions, dans le contexte des espaces métriques, sont dues à Bourbaki.

⁴ «et l'on m'a dit qu'en la Géométrie (qui pense avoir gagné le haut point de certitude parmi les sciences) il se trouve des démonstrations inévitables, suvertissans la vérité de l'expérience : comme Jacques Peletier me disoit chez moi qu'il avait trouvé deux lignes s'acheminans l'une vers l'autre pour se joindre, qu'il vérifiait toutes fois ne pouvoir jamais, jusques à l'infinité, arriver à se toucher» (Montaigne, Essais, livre II, chap XII)

⁵ Les américains la nomment *gap*, qu'on peut traduire par *écartement* ou *espacement*.

Attention il n'y a pas égalité en général ⁶.



5) La fonction $d(\cdot, A)$ vérifie $\forall (x, y) \in E^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
En effet $(\forall z \in A) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Il en découle, d'abord que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, puis $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Il reste à échanger x et y .

Remarque : Il en découle, en anticipant sur la suite, que $d(\cdot, A)$ est une fonction lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue.

Exercice 1 : Dans le plan euclidien, étudier la fonction $d(\cdot, A)$ lorsque A est un disque circulaire, un carré plein.

Définition 3 : diamètre d'une partie A : $\text{diam } A = \sup\{d(x, y) ; (x, y) \in A \times A\}$. A est dite **bornée** si $\text{diam}(A) < +\infty$. Une fonction $f : X \rightarrow (E, d)$ est dite **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E .

Propriétés :

- 1) \emptyset est bornée car $\text{diam}(\emptyset) = -\infty$.
 - 2) $A \subset B \Rightarrow \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
 - 3) $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + d(A, B) + \text{diam}(B)$. En particulier A, B bornées $\Rightarrow A \cup B$ bornée.
 - 4) $\text{diam}(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est un singleton.
 - 5) $\text{diam } B(a, r) \leq 2r$, $\text{diam } B'(a, r) \leq 2r$, $\text{diam } S(a, r) \leq 2r$.
- Attention ! on ne peut rien dire de plus en général : cf. cependant A.3.1, et A.4.
- 6) On a l'équivalence des propriétés :
- (i) A est bornée (ii) $(\forall x \in E) \quad (\exists r > 0) \quad A \subset B(x, r)$ (iii) $(\exists x_0 \in E) \quad (\exists r_0 > 0) \quad A \subset B(x_0, r_0)$.

Exercice 2 : Dans le plan euclidien, quel est le diamètre d'un triangle ? d'une plaque triangulaire ? d'un polygone convexe ? d'une ellipse ou d'un disque elliptique ?

Enfin, on peut aussi étendre aux espaces métriques les notions de segments et de droites rencontrées en géométrie euclidienne.

Définition 4 : segments et droites. Soient a et b deux points de E .

On nomme **segment** d'extrémités a et b l'ensemble $[a, b] = \{x \in E ; d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$.

On nomme **droite** passant par a et b l'ensemble

$$(ab) = [a, b] \cup \{x \in E ; d(a, x) = d(a, b) + d(x, b)\} \cup \{x \in E ; d(b, x) = d(b, a) + d(a, x)\}.$$

Attention ! même si la distance est associée à une norme, la forme de ces ensembles n'est pas toujours celle que l'on croit.

⁶ En effet, comme le note J.-L. Verley, «le langage géométrique que l'on introduit dans les espaces métriques constitue un support pour une intuition géométrique qui est très utile mais doit être soigneusement contrôlée car elle n'est pas sans surprise et risque d'utiliser, implicitement, sans s'en rendre compte, des propriétés de l'espace euclidien plus riches que sa seule structure métrique» (E.U.). Les espaces discrets, et ultramétriques, sont, comme les espaces euclidiens, des espaces métriques, mais ont des propriétés très différentes.

A.3. Premiers exemples d'espaces métriques.

Afin d'illustrer l'universalité des espaces métriques, nous donnons dès maintenant de nombreux exemples ; tout savoir étant cyclique, certains exemples anticipent sur la suite, d'autres supposent des connaissances en géométrie. Le lecteur n'est pas tenu de tout comprendre pour passer à la suite.

A.3.1. Espaces métriques discrets.

Soit E un ensemble. L'application $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ est une distance sur E , dite **distance 0–1** ou **distance discrète**. (E, d) est dit **espace discret**.

C'est un espace borné, de diamètre 1 si $\text{card}(E) \geq 2$, et 0 si E est un singleton.

$B(a, r) = \{a\}$ si $r \leq 1$, $B(a, r) = E$ si $r > 1$; par suite, $\text{diam } B(a, r) = 0$, resp. $\text{diam } E$.

$B'(a, r) = \{a\}$ si $r < 1$, $B'(a, r) = E$ si $r \geq 1$; par suite, $\text{diam } B'(a, r) = 0$, resp. $\text{diam } E$.

$S(a, r) = \{a\}$ si $r = 0$, $S(a, r) = E - \{a\}$ si $r = 1$, \emptyset sinon.

$\text{Is}(E, d)$ est formé de toutes les permutations de E .

Remarque : La notion d'espace discret sera généralisée en C.3.

A.3.2. La droite réelle.

\mathbf{R} est un espace métrique pour la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Sauf mention expresse du contraire, \mathbf{R} sera toujours supposé muni de cette distance.

Les boules ouvertes ou fermées de centre a sont les intervalles ouverts ou fermés de centre a .

\mathbf{R} est non borné pour d , et les parties bornées pour d sont les parties majorées et minorées pour l'ordre usuel.

Muni de la distance induite par celle de \mathbf{R} , le segment $[0, 1]$ est un espace métrique.

Exercice 1 : Décrire avec soin les boules ouvertes, fermées, les sphères de $[0, 1]$.

Exercice 2 : Décrire $\text{Is}(\mathbf{R}, d)$ et $\text{Is}([0, 1], d_{[0,1]})$.

Exercice 3 : Dans (\mathbf{R}, d) , étudier et représenter les fonctions $x \rightarrow d(x, A)$, pour :

$A = \{0\}$, $\{a\}$, $\{0, 1\}$, \mathbf{R}_+ , \mathbf{R}_- , $[-1, 1]$, \mathbf{Z} , \mathbf{N} , \mathbf{Q} , K (ensemble de Cantor).

Exercice 4 : 1) Démontrer que $\delta(x, y) = |\ln(x/y)|$ définit une distance sur \mathbf{R}_+^* . Boules et sphères ?

2) Reconnaître le milieu de x et y pour cette distance.

3) Montrer que les isométries de (\mathbf{R}_+^*, δ) sont les homothéties $x \rightarrow \lambda x$ et $x \rightarrow \lambda/x$, $\lambda > 0$.

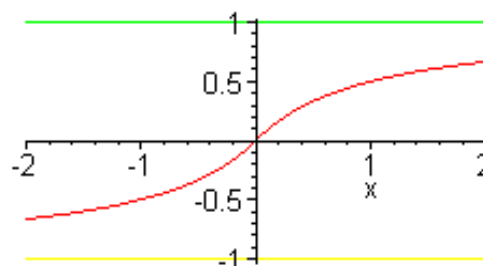
Exercice 5 : Soient a et b deux réels, $a < b$. Démontrer que $I =]a, b[$ est un espace métrique pour

$\delta(x, y) = |\ln [x, y, a, b]|$, où $[x, y, a, b] = \frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b}$ est le birapport de x, y, a et b .

Trouver les isométries de (I, δ) . (On pourra se ramener à l'ex précédent via $h(x) = \frac{x-a}{b-x}$).

A.3.3. La droite numérique achevée.

Adjoignons à l'ensemble ordonné \mathbf{R} deux éléments notés $+\infty$ et $-\infty$, et prolongeons la relation d'ordre usuelle de \mathbf{R} à $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, de façon que $+\infty$ soit le plus grand et $-\infty$ le plus petit élément de $\overline{\mathbf{R}}$. Ce faisant, on détruit sa structure de corps (comment définir $+\infty - \infty$, ou $+\infty \times 0$?), mais l'ensemble totalement ordonné ainsi défini est *achevé* en ce sens que toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure, y compris la partie vide



La fonction $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ est une bijection croissante $\mathbf{R} \rightarrow]-1, 1[$. On la prolonge en une bijection croissante $\overline{\mathbf{R}} \rightarrow [-1, 1]$, en posant $f(+\infty) = 1$ et $f(-\infty) = -1$, et l'on munit $\overline{\mathbf{R}}$ de la distance transportée de la distance usuelle de $[-1, 1]$ via cette bijection.

Autrement dit on pose : $\forall (x, y) \in \overline{\mathbf{R}}^2 \quad \delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$

En tant qu'espace isométrique à $[-1, 1]$, $\overline{\mathbf{R}}$ est borné de diamètre 2.

Exercice 6 : Décrire les boules ouvertes et fermées de centre $a \in \mathbf{R}$, de centre $\pm\infty$. Décrire $\text{Is}(\overline{\mathbf{R}}, \delta)$.

Solution : La boule fermée de centre $+\infty$ et de rayon 1 est la demi-droite $[0, +\infty]$.

La boule fermée de centre $+\infty$ et de rayon $r \leq 2$ est la demi-droite $[\bar{f}^{-1}(1-r), +\infty]$.

Remarque : On aurait pu choisir comme distances :

$$d(x, y) = \frac{2}{\pi} \left| \int_x^y \frac{dt}{1+t^2} \right| = \frac{2}{\pi} |\text{Arctan } y - \text{Arctan } x| \quad \text{ou} \quad d(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_x^y e^{-t^2/2} dt \right|,$$

mais ces distances anticipent sur la suite du cours.

A.3.4. Le plan affine euclidien.

Un plan affine euclidien \mathcal{P} , associé à un plan vectoriel euclidien P , est un espace métrique pour la distance $d(a, b) = \|\overrightarrow{ab}\|$. Cela va résulter du § A.4 et du cours de géométrie.

On peut aussi *définir* le plan affine euclidien en tant qu'espace métrique particulier, sans le supposer muni *a priori* d'une structure vectorielle. Dans cette optique, on appellera plan euclidien un espace métrique (\mathcal{P}, d) vérifiant les axiomes additionnels :

(D4) axiome de la droite. Pour tout couple (a, b) de points de \mathcal{P} et tout réel $x \geq 0$, il existe un et un seul point $c \in \mathcal{P}$ tel que : $d(b, c) = x$, $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$.

On appelle segment $[a, b] = \{ m ; d(a, m) + d(m, b) = d(a, b) \}$,

et droite $(a, b) = [a, b] \cup \{ m ; d(a, m) = d(a, b) + d(b, m) \}$
 $\cup \{ m ; d(m, b) = d(m, a) + d(a, b) \}$.

(D5) axiome du dédoublement.

Si 5 points a, b, c, b', c' de \mathcal{P} vérifient

$d(a, b') = 2.d(a, b) = 2.d(b, b')$ et $d(a, c') = 2.d(a, c) + 2.d(c, c')$,
alors $d(b', c') = 2.d(b, c)$.

(D6) axiome de la dimension.

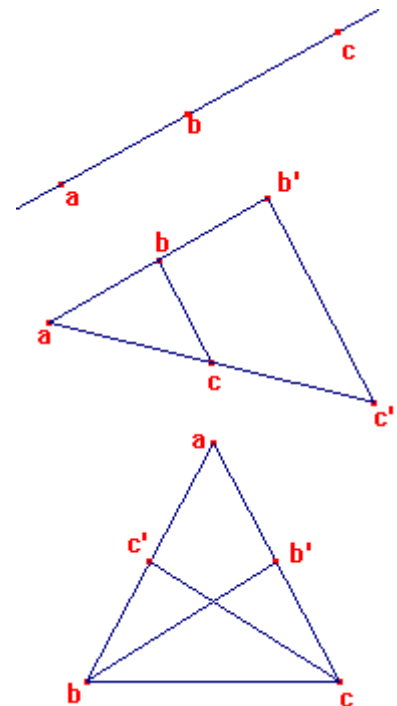
Il existe une droite $\mathcal{D} \neq \mathcal{P}$ telle que, pour tous points a, b, c de $\mathcal{P} - \mathcal{D}$ tels que $[a, b] \cap \mathcal{D} = \emptyset$ et $[b, c] \cap \mathcal{D} = \emptyset$, on ait $[a, c] \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

(D7) axiome des médianes.

Si a, b, c sont trois points tels que $d(a, b) = d(a, c)$, si b' est le milieu de $[a, c]$ et c' le milieu de $[a, b]$, alors $d(b, b') = d(c, c')$.

Comment fonder un calcul vectoriel dans un tel plan, et montrer que ces 7 axiomes équivalent à ceux du cours de géométrie euclidienne, cela est exposé dans P. Gabriel (*Matrices, géométrie, algèbre linéaire*, Cassini, p. 109, etc). Quant aux isométries de ce plan, ce ne sont autres que les isométries affines (translations, rotations, symétries et symétries glissées).

L'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes est un espace métrique pour la distance $d(z, z') = |z - z'|$. Rappelons que l'on peut considérer \mathbf{C} soit comme un plan vectoriel réel, soit comme une droite vectorielle complexe.



A.3.5. Le cercle unité, et le groupe quotient $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Notons $S^1 = \mathbf{U}$ le cercle unité du plan euclidien \mathcal{P} , identifié à l'ensemble des complexes de module 1. \mathbf{C} est un groupe commutatif, que l'on peut munir de deux distances naturelles :

— la première est la distance euclidienne induite par celle de \mathcal{P} , ou de \mathbf{C} : $d(x, y) = |x - y|$. C'est la **distance cordale**.

— la seconde est la longueur du petit arc de cercle joignant x et y sur S^1 : $\delta(x, y) = \text{Arccos}(x | y)$. C'est la **distance géodésique**. Le lecteur est invité à montrer que δ est bien une distance, et que c'est la distance du « plus court chemin » sur S^1 .

Une fois cela établi, il reste à montrer que ces deux distances sont équivalentes, et que S^1 est compact et connexe par arcs pour chacune d'elles.

Exercice 7 : Montrer que les groupes $\text{Is}(S^1, d)$ et $\text{Is}(S^1, \delta)$ sont égaux ; trouver leurs éléments.

On sait d'autre part que $\theta \in (\mathbf{R}, +) \rightarrow \exp(i\theta) \in (\mathbf{U}, \times)$ est un homomorphisme continu surjectif, de noyau $2\pi\mathbf{Z}$. On en déduit aussitôt par passage au quotient un isomorphisme de groupes $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$, que l'on souhaiterait continu. Encore faudrait-il munir $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ d'une distance. Le plus simple est de procéder par transport, et de poser $d(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) = |\exp(i\theta) - \exp(i\varphi)|$, en notant $\bar{\theta}$ la classe de θ modulo 2π . $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ est alors un espace métrique isométrique à \mathbf{U} muni de la distance cordale, donc compact connexe par arcs, etc.

A.3.6. Le plan complexe complété.

De même qu'il y a nécessité de compléter \mathbf{R} par deux points à l'infini, il est utile de compléter le plan complexe par un point à l'infini *sans signe* : $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Cela permet d'étudier de manière satisfaisante les homographies propres

$$h : z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \quad (\text{où } ad - bc \neq 0)$$

comme des bijections continues $\tilde{\mathbf{C}} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}$ en posant si $c \neq 0$, $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$, et si $c = 0$ (donc

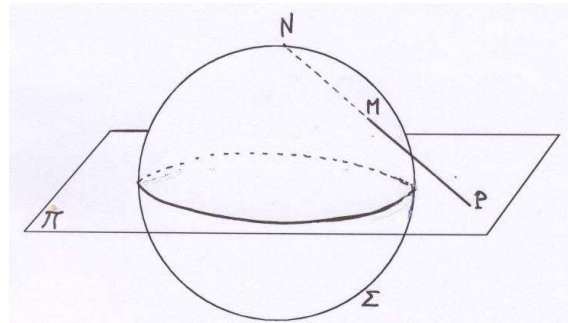
$d \neq 0$), $h(\infty) = \infty$.

Pour construire $\tilde{\mathbf{C}}$, on va encore une fois utiliser un transport de distance. On se place dans l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, et l'on identifie \mathbf{C} avec le plan Π d'équation $Z = 0$. La sphère unité Σ de E a alors $\mathbf{C} = \Pi$ comme « plan équatorial » ; notons $N(0, 0, 1)$ son « pôle nord ». La **projection stéréographique**⁷ de pôle N établit une bijection entre $\Sigma - \{N\}$ et le plan \mathbf{C} . Au point sphérique $M(X, Y, Z) \in \Sigma - \{N\}$ elle associe son image plane $P(x, y, 0)$ d'affixe $z = x + iy$.

Exercice 8 : Montrer que M et P sont liés par les formules :

$$X = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \quad x = \frac{X}{1-Z} \quad y = \frac{Y}{1-Z}$$

Si l'on munit Σ de la distance euclidienne induite par celle de E (ou « distance cordale »), on peut transporter cette distance en une distance sur \mathbf{C} via la projection stéréographique. Mais avant cela, on complète \mathbf{C} en lui adjoignant un point à l'infini $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, et on prolonge la projection stéréographique en convenant que le projeté de N est ∞ . Alors $\tilde{\mathbf{C}}$ devient un espace métrique pour une distance k , définie par :



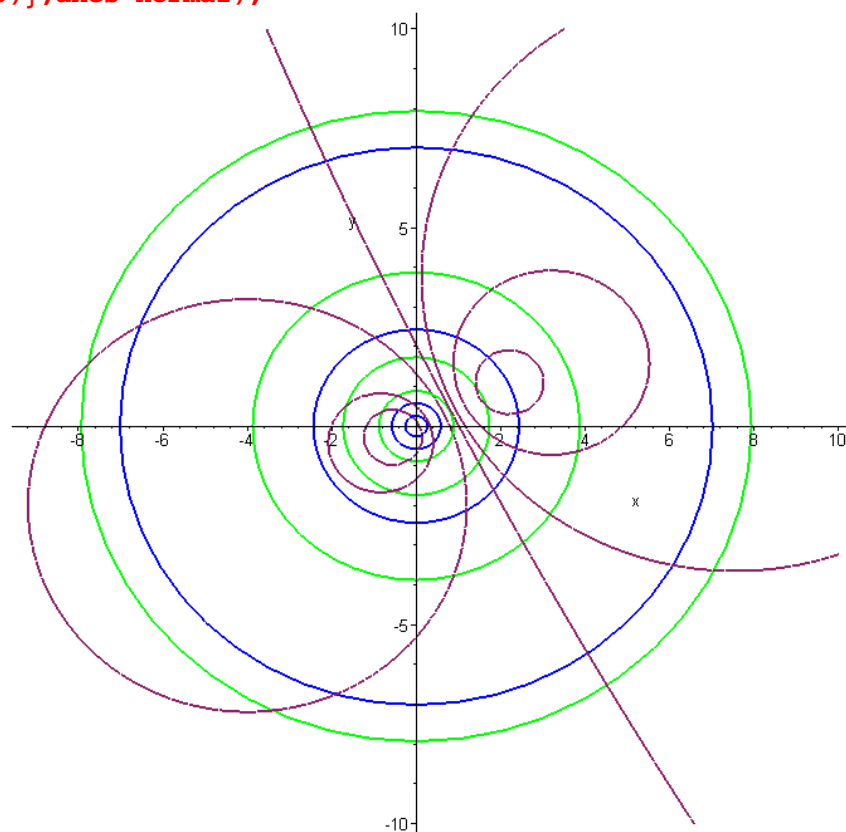
⁷ La projection stéréographique est due à l'astronome grec **Hipparque** (-180, -125 av JC)

$$k(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}} \quad , \quad k(z, \infty) = k(\infty, z) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad , \quad k(\infty, \infty) = 0$$

$(\tilde{\mathbb{C}}, k)$ est isométrique à Σ , donc borné, de diamètre 2, compact et connexe par arcs.

Exercice 9 : Déterminer les cercles et les boules de centres O , ∞ , $A(a)$, pour la distance k . Commenter, et confirmer, les résultats obtenus ci-dessous via Maple.

```
> with(plots):
> C:=(a,b,r)->implicitplot(4*((x-a)^2+(y-b)^2)
=r^2*(1+a^2+b^2)*(1+x^2+y^2),x=-10..10,y=-10..10,color=maroon,
numpoints=5000,thickness=2):
> B:=r->polarplot(r/sqrt(4-r^2),thickness=2,color=blue):
A:=r->polarplot(sqrt(4/r^2-1),thickness=2,color=green):
> display({B(0.5),B(1),B(1.85),B(1.98),A(0.25),A(0.5),A(1),A(1.5),
C(2,1,0.25),C(2,1,0.5),C(2,1,0.70),C(2,1,0.81),C(2,1,1),C(2,1,1.5),
C(2,1,1.75)},axes=normal);
```



Les boules de centre $(2, 1)$ sont des disques circulaires contenant $(2, 1)$ dans leur intérieur, ou des complémentaires de disques circulaires ouverts contenant $(-1/2, -1.4)$, image plane de son antipode, dans leur intérieur. Cela se voit en se reportant sur la sphère de Riemann Σ , et avec quelques connaissances sur l'inversion.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on a $z \rightarrow z_0$ dans $(\tilde{\mathbb{C}}, k)$ ssi $z \rightarrow z_0$ pour la distance usuelle, mais le fait nouveau est que $z \rightarrow \infty$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$ si et seulement si $|z| \rightarrow +\infty$ dans \mathbb{R}^+ .

Convenablement prolongées à $\tilde{\mathbb{C}}$, les homographies forment un groupe d'homéomorphismes, l'application qui à la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ associe l'homographie h ci-dessus est un homomorphisme de

$\text{Gl}_2(\mathbb{C})$ dans le groupe des homéomorphismes de $\tilde{\mathbb{C}}$. C'est pourquoi on peut noter $h(z) = A.z$, convention fort utile pour l'étude des itérées $h^n(z) = A^n.z$, et des fractions continues.

Si l'on se restreint à \mathbf{R} , on obtient la droite réelle complétée $\check{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, qui s'identifie au cercle, et ne doit pas être confondue avec $\overline{\mathbf{R}}$ (c'est la droite projective réelle).

A.3.7. Le plan non euclidien hyperbolique de Lobatchevski.

Si $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ sont deux points de \mathbf{R}^2 , définissons leur distance de Lobatchevski par :

$$d(M, M') = \text{Argch}(\text{ch}(x - x') \cdot \text{ch } y \cdot \text{ch } y' - \text{sh } y \cdot \text{sh } y')$$

$\text{ch}(x - x') \cdot \text{ch } y \cdot \text{ch } y' - \text{sh } y \cdot \text{sh } y' \geq \text{ch } y \cdot \text{ch } y' - \text{sh } y \cdot \text{sh } y' = \text{ch}(y - y') \geq 1$, donc d est bien définie.

$d(M, M') = 0 \Leftrightarrow \text{ch}(x - x') \cdot \text{ch } y \cdot \text{ch } y' - \text{sh } y \cdot \text{sh } y' = 1 \Rightarrow \text{ch}(y - y') = 1 \Rightarrow y = y'$.

Reportant, $\text{ch}(x - x') \cdot \text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1$, donc $\text{ch}(x - x') \cdot \text{ch}^2 y = \text{ch}^2 y$, et $x = x'$.

Voilà pour (D 1) ; (D 2) est immédiat ; nous admettrons (D 3).

On peut démontrer que les droites de ce plan (au sens du § 2) se partagent en quatre classes :

La première classe est formée de la droite euclidienne $D_1 = \{ (x, y) ; y = 0 \}$.

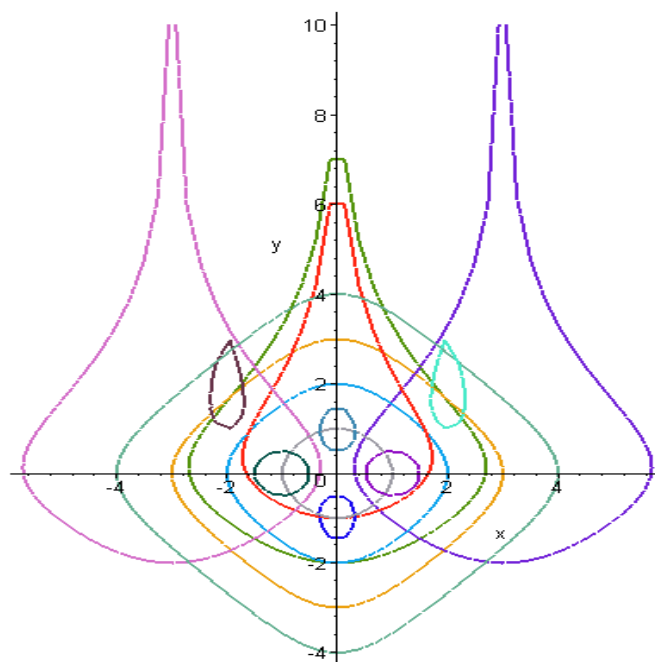
La seconde classe est formée des courbes $D_2(a, c) = \{ (x, y) ; c \cdot \text{th } y = \text{sh}(x - a) \} \ (a, c) \in \mathbf{R}^2$.

La troisième classe est formée des courbes $D_3(c, \epsilon) = \{ (x, y) ; \text{th } y = c \cdot \exp(\epsilon \cdot x) \} \ (c, \epsilon) \in \mathbf{R}^* \times \{\pm 1\}$.

La quatrième classe est formée des courbes $D_4(a, c) = \{ (x, y) ; \text{th } y = \text{th } c \cdot \text{th}(x - a) \} \ (a, c) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$.

Exercice 10 : Démontrer que la distance d est topologiquement équivalente aux distances usuelles sur \mathbf{R}^2 . Quelle distance induit-elle sur les axes ? sur les verticales ? Etudier les cercles de centre O , de centre $A(0, b)$. Représenter quelques cercles pour la distance d , ainsi que quelques « droites ». ⁸

J'ai ici représenté quelques « cercles non euclidiens » (sphères) avec Maple.



```
> with(plots):
> DL:=(a,b,x,y)->arccosh(cosh(a-x)*cosh(b)*cosh(y)-sinh(b)*sinh(y));
> p:=(a,b,r)->implicitplot(DL(a,b,x,y)=r,x=-10..10,y=-10..10,
thickness=2,color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12, rand()/10^12),
numpoints=6000);
```

⁸ Les droites non-euclidiennes sont un peu courbes, justifiant ce cri du cœur de **Henri Roorda** : « Si M. Einstein réussissait à nous prouver que la ligne droite s'écarte elle-même du droit chemin, nous ne pourrions plus avoir confiance en personne. » (Le roseau pensant). Je ne suis pas sûr de l'équation de la 4^{ème} classe de droites : peut-être y a-t-il une coquille dans le livre de P. Gabriel (p. 208).

> `display({p(0,0,1),p(0,0,2),p(0,0,3),p(0,0,4),p(1,0,0.5),p(0,1,0.5),p(-1,0,0.5),p(2,2,1),p(0,-1,0.5),p(-2,2,1),p(2,2,1),p(0,3,4),p(0,3,5),p(3,5,7),p(-3,5,7)})`;

A.3.8. Le demi-plan de Poincaré (1882).

Soit $\mathbf{H} = \{ z \in \mathbf{C} ; \text{Im } z > 0 \}$. On appelle « distance non euclidienne » de u à v :

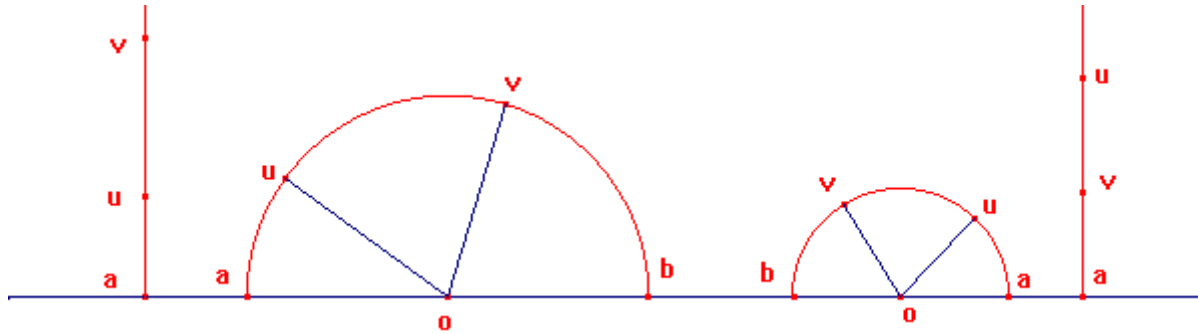
- Si u et v ont même partie réelle, $d(u, v) = | \ln [u, v, a, \infty] |$ où $[u, v, a, \infty] = \frac{u-a}{v-a}$,

a étant la projection commune de u et v sur $x'Ox$.

- Sinon, $d(u, v) = | \ln [u, v, a, b] |$, où $[u, v, a, b] = \frac{u-a}{u-b} : \frac{v-a}{v-b}$,

a et b étant les intersections du cercle centré sur $x'Ox$ passant par u et v avec $x'Ox$, a, b, u et v étant pris dans cet ordre.

Ces birapports sont réels, en vertu de l'alignement ou de la cocyclicité des points u, v, a et b .



Si l'on note ω le centre du cercle passant par u et v et centré sur $x'Ox$

$u - \omega = e^{i\alpha} (b - \omega)$ et $v - \omega = e^{i\beta} (b - \omega)$ ($0 < \alpha$ et $\beta < \pi$), alors

$$d(u, v) = | \ln [u, v, a, b] | = | \ln \left(\tan \frac{\beta}{2} \right) - \ln \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) |.$$

et un calcul trigonométrique simple laissé en exercice montre que :

$$d(u, v) = 2 \operatorname{Argth} \left| \frac{u-v}{u-\bar{v}} \right| = \ln \frac{|u-\bar{v}| + |u-v|}{|u-\bar{v}| - |u-v|}.$$

On démontre : 1) Il s'agit bien là d'une distance sur \mathbf{H} .

2) Si u et v sont deux points distincts de \mathbf{H} , on nomme « droite non euclidienne » passant par u et v , et on note (u, v) :

– si $\operatorname{Re} u = \operatorname{Re} v$, la demi-droite verticale $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} u$, $\operatorname{Im} z > 0$, notée $]a, \infty[$;

– le demi-cercle centré sur \mathbf{R} passant par u et v , et situé dans \mathbf{H} ; on note $]a, b[$ son diamètre.

Ce sont les « droites » de (\mathbf{H}, d) , au sens donné à ce terme en A.2.

3) Le groupe des isométries de (\mathbf{H}, d) est formé des homographies :

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \text{ réels, } ad - bc > 0),$$

Il contient en particulier les translations $z \rightarrow z + h$ (h réel) et les homothéties $z \rightarrow kz$ ($k > 0$).

4) Cet espace métrique (\mathbf{H}, d) est isométrique à l'espace présenté en A.3.7. Autrement dit, le demi-plan de Poincaré est un autre « modèle » de la géométrie non euclidienne de Lobatchevski.⁹

Exercice 11 : Soit $g : z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d réels, $ad - bc > 0$),

1) Vérifier que $\operatorname{Im} g(z) = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$. En déduire que g laisse stable \mathbf{H} .

⁹ Cf. N. Efimov, *Géométrie supérieure*, éd. Mir p. 180 et J.-Y. Mérimondol, *Nombres et algèbre*, EDP, p. 567.

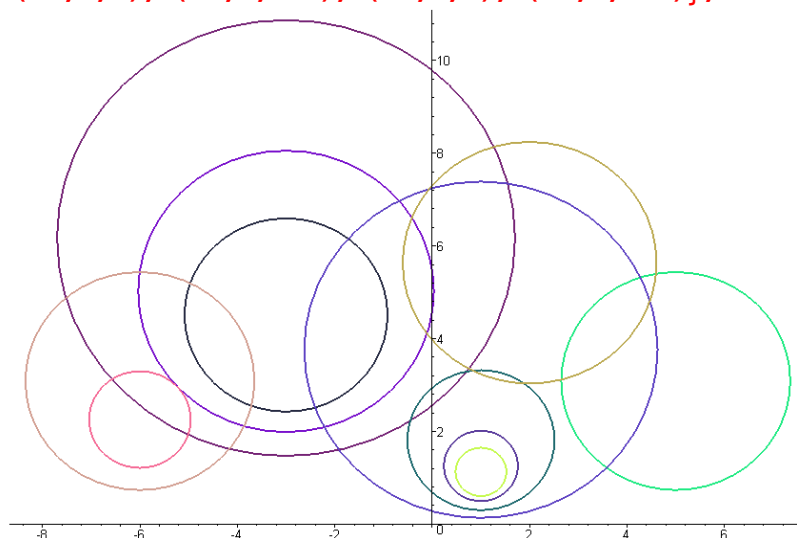
2) Montrer que g conserve d .

3) Démontrer que si u, v, w sont situés sur une même verticale, ou sur le même demi-cercle centré sur $x'Ox$, v étant sur le segment ou sur l'arc joignant u à w , $d(u, w) = d(u, v) + d(v, w)$.

4) Démontrer que le cercle non-euclidien de centre a et de rayon r est le cercle usuel d'Appolonios

$$\left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| = \text{th} \frac{r}{2}. \text{ Il a pour équation } (x-a)^2 + (y-b.\text{sh } r)^2 = b^2 \text{sh}^2 r \text{ où } a = a + ib.$$

```
> with(plots):
> C:=(a,b,r)->plot([a+b*sinh(r)*cos(t),b*cosh(r)+b*sinh(r)*sin(t),
t=0..2*Pi],thickness=2,color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12,
rand()/10^12));
> display({C(1,1,0.5),C(1,1,0.7),C(1,1,1.2),C(1,1,2),C(5,2,1),C(-6,2,0.5),
C(2,5,0.5),C(-3,4,1),C(-3,4,0.5),C(-6,2,1),C(-3,4,0.7)},axes=normal);
```



4.3.9. Le disque de Poincaré.

L'homographie $h : z \rightarrow \frac{z-i}{z+i}$ établit une bijection du demi-plan \mathbf{H} sur le disque unité

$$\mathbf{U} = \{ z \in \mathbf{C} ; |z| < 1 \}$$

On peut transporter via cette bijection la distance de \mathbf{H} en une distance sur \mathbf{U} , qui est alors donnée

par : $\rho(u, v) = \left| \ln [u, v, a, b] \right|$, où $[u, v, a, b] = \frac{u-a}{u-b} : \frac{v-a}{v-b}$,

où a et b sont les intersections avec le cercle unité du cercle orthogonal passant par u et v .

$$\rho(u, v) = 2 \operatorname{Argth} \frac{|u-v|}{|1-\bar{u}v|} = \ln \frac{|1-\bar{u}v| + |u-v|}{|1-\bar{u}v| - |u-v|},$$

On démontre : 1) Il s'agit bien là d'une distance sur \mathbf{U} .

2) Si u et v sont deux points distincts de \mathbf{U} , on nomme « droite non euclidienne » passant par u et v , et on note (u, v) :

- si $0, u$ et v sont alignés, l'intervalle ouvert $]a, b[$ est le diamètre de \mathbf{U} contenant u et v ;
- sinon, l'arc de cercle centré passant par u et v , et orthogonal au cercle unité.

Ce sont les « droites » de (\mathbf{U}, d) , au sens donné à ce terme en A.2.

3) Le groupe des isométries de (\mathbf{U}, ρ) est formé des homographies

$$z \rightarrow e^{i\theta} \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \quad (\theta \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{U}). \text{ Il contient en particulier les rotations } z \rightarrow e^{i\theta}.z.$$

Il suffit de transmuter le résultat trouvé en 4.3.8.¹⁰

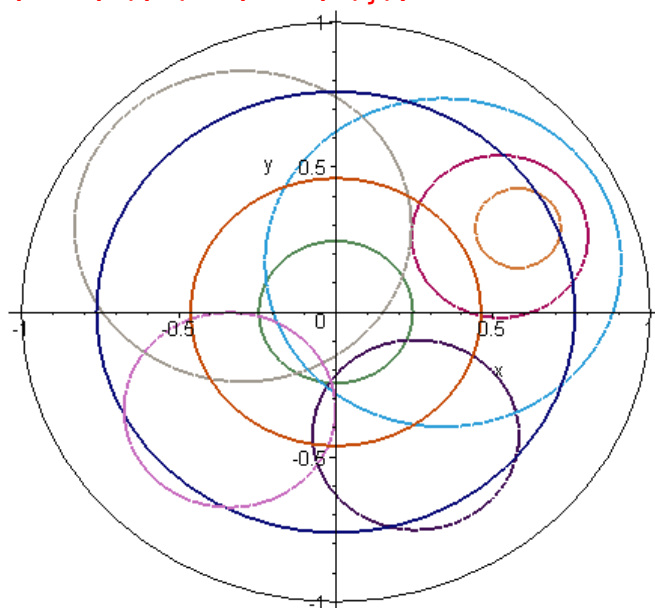
¹⁰ Cela est fait fort élégamment par Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques* (p. 187).

4) Cet espace métrique (U, ρ) est isométrique aux espaces présentés en A.3.7 et A.3.8. Autrement dit, le disque de Poincaré est un 3^{ème} « modèle » de la géométrie non euclidienne de Lobatchevski.¹¹

Exercice 12 : Démontrer que le « cercle » de centre O et de rayon r est le cercle usuel de centre O et de rayon $\tanh(r/2)$, et que le « cercle » de centre A(a, b) et de rayon r est un cercle contenant A dans son intérieur.

On trouve $(1 - \tanh^2 \frac{r}{2})(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (1 - \tanh^2 \frac{r}{2})(2ax + 2by) + a^2 + b^2 - \tanh^2 \frac{r}{2} = 0$

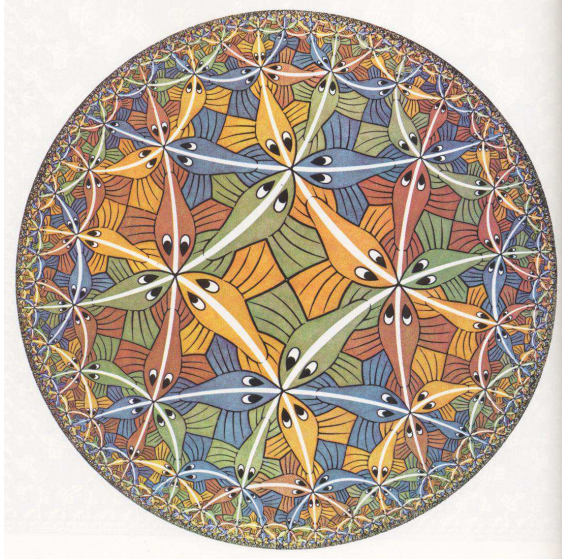
```
> with(plots):
> U:=polarplot(1,color=black):
> B:=r->polarplot(tanh(r/2),color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12,
rand()/10^12),thickness=2):
> C:=(a,b,r)->implicitplot((x-a)^2+(y-b)^2-tanh(r/2)^2*((1-x*a-y*b)^2+(y*a-
x*b)^2)=0,x=-1..1,y=-1..1,color=COLOR(RGB, rand()/10^12, rand()/10^12,
rand()/10^12),thickness=2,numpoints=2000):
> display({U,B(0.5),B(1),B(2),C(0.6,0.3,1),C(0.6,0.3,0.5),C(0.6,0.3,2),C(-
0.5,0.5,2),C(-0.4,-0.4,1),C(0.3,-0.5,1)});
```



Le graveur et dessinateur **Mauritz Cornelis Escher**¹², qui avait une solide formation mathématique et était fasciné par les symétries et les pavages, s'inspira à plusieurs reprises des propriétés du disque de Poincaré. Poissons ou chauve-souris, au lecteur de choisir :

¹¹ cf. N. Efimov, *Géométrie supérieure*, éd. Mir, p. 180, et J.-Y. MÉRINDOL, *Nombres et algèbre*, EDP, p. 567.

¹² **Maurits Cornelis Escher** (1898-1972) a inspiré le grand classique de Douglas Hofstadter, *Gödel Escher Bach* (Interéditions, 1985)



Hommage à Maurits Cornelis Escher

A.3.10. Produits d'espaces métriques.

Soient (E', d') et (E'', d'') deux espaces métriques, $E = E' \times E''$ leur produit, $x = (x', x'')$ et $y = (y', y'')$ deux éléments de E . $d(x, y) = \max(d'(x', y'), d''(x'', y''))$ est une distance sur E . (E, d) est appelé **espace produit**.

La boule ouverte de centre x de rayon r est le produit cartésien de la boule ouverte de centre x' et de rayon r et de la boule ouverte de centre x'' et de rayon r . Idem pour les boules fermées.

Généralisation immédiate au produit d'un nombre fini d'espaces métriques.

Exemples : 1) Les pavés $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ de \mathbf{R}^n sont des exemples simples d'espaces produits.

2) Le tore topologique $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ est le produit cartésien d'un cercle avec lui-même.

Exercice 13 : Démontrer que $d(x, y) = d'(x', y') + d''(x'', y'')$ est aussi une distance sur E .

Exercice 14 : Tore topologique et tore géométrique.

On appelle tore géométrique (à collier) la surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle de rayon b autour d'un axe situé dans son plan et à une distance $a > b$ du centre.

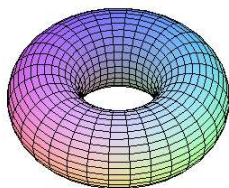
1) Démontrer qu'un tore géométrique a pour équations paramétriques dans un repère orthonormé convenable : $x = (a + b \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \theta$, $y = (a + b \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \theta$, $z = b \cdot \sin \varphi$,

et pour équation cartésienne : $(x^2 + y^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$.

2) Démontrer que l'application

$$(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \rightarrow (x, y, z) = ((a + b \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \theta, (a + b \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \theta, b \cdot \sin \varphi)$$

définit un homéomorphisme du tore topologique sur le tore géométrique.



Pour la recette du baba au rhum ou du donut, voir internet

```
> with(plots):  
> plot3d([(2+cos(phi))*cos(theta), (2+cos(phi))*sin(theta), sin(phi)],  
phi=0..2*Pi, theta=0..2*Pi, numpoints=1000);
```

A.3.11. Distance uniforme.

Soient X un ensemble non vide, (E, d) un espace métrique. Rappelons qu'une fonction $f: X \rightarrow E$ est dite bornée si $f(X)$ est une partie bornée de E . Dans l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E , $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ est une distance, dite **uniforme**.

Exercice 15 : Décrire la boule fermée de centre f et de rayon r pour cette distance.

A.3.12. Distance de Hamming entre deux mots.

On rencontre des distances en transmission du signal et théorie des codes correcteurs d'erreurs.

Si X est un ensemble, et $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de X^n , leur **distance de Hamming** est $d(x, y) = \text{card} \{ i \in [1, n] ; x_i \neq y_i \}$.

Exercice 16 : Vérifier les axiomes des distances, déterminer les boules, sphères, suites convergentes.

Soit \mathbf{F}_2 le corps $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $E = \mathbf{F}_2^n$ muni de la distance de Hamming. Cette distance est compatible avec la loi de groupe en ce sens que $d(x + z) = d(y + z)$. On appelle *code de longueur n* est un sous-espace vectoriel (= sous-groupe) C de E . Lors de la transmission du message $x = (x_1, \dots, x_n) \in C$ peuvent se produire des erreurs ; si le message reçu $y = (y_1, \dots, y_n)$ n'appartient pas à C , on lui substituera l'élément de C le plus proche (qui n'est pas forcément x). On appelle *code de Hamming* un code tel que les boules $B(x, 1)$, $x \in C$, forment une partition de E ; il est *parfait 1-correcteur*, c'est-à-dire idéal pour détecter et rectifier les messages contenant au plus une erreur. Je renvoie à mon chapitre sur le sujet.

A.3.13. Distance géodésique associée à un graphe.

Appelons **graphe** un couple $\Gamma = (S, A)$, formé d'un ensemble fini S dont les points sont appelés **sommets**, et A une partie de $\mathcal{P}(S)$ formée d'ensembles à deux éléments (paires) dont les éléments sont appelés **arêtes**.

On dit que deux sommets x et y sont **liés** si $\{x, y\} \in A$. Un sommet est dit **terminal** s'il est lié à un sommet au plus, point de **ramification** s'il est lié à trois sommets au moins. Un **chemin** joignant a à b est une suite $(x_0 = a, x_1, \dots, x_k = b)$ de points de S telle que $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$ pour tout i ; k est la **longueur** du chemin. On convient qu'il y a un chemin de longueur nulle joignant a à a .

La relation $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow (a = b \text{ ou il existe un chemin joignant } a \text{ à } b)$ est une relation d'équivalence dans S dont les classes s'appellent les **composantes connexes** de Γ . On dit que Γ est **connexe** s'il existe une seule composante connexe, c'est-à-dire si deux sommets quelconques peuvent être joints par au moins un chemin.

La longueur du plus court chemin joignant a à b est notée $d(a, b)$. On convient que $d(a, a) = 0$ et que $d(a, b) = +\infty$ si a et b ne sont pas dans la même composante connexe. d est un écart séparé sur S (cf A.5), et c'est une distance, appelée **distance géodésique**, si Γ est connexe.¹³

Cette distance géodésique est fort utile quand on se déplace dans le métro. La distance d'une station à une autre est un plus le plus petit nombre de stations qui les séparent (mais c'est un peu plus compliqué, un changement de ligne prenant du temps).

Exercice 17 : Soient X un ensemble, \mathcal{F} l'ensemble des parties finies de X .

1) Montrer que $d(A, B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A \Delta B)$ est une distance sur \mathcal{F} .

¹³ Pour un prolongement actuel, cf. N. Currien et J.-F. Le Gall, Construire une géométrie aléatoire sur la sphère (Pour la Science, juin 2015).

2) Deux éléments A et B de \mathcal{F} sont liés si B se déduit de A en ajoutant ou enlevant un élément. Montrer que \mathcal{F} est un graphe connexe, et que d est la distance géodésique associée.

Une version linéaire de ce résultat se trouve dans Espaces vectoriels de dimension finie, § 4, ex. 4.

Exercice 18 : On choisit sur un échiquier une pièce quelconque : tour, cavalier, fou, reine ou roi (pas un pion). Deux cases distinctes sont dites à la distance 1 si la pièce peut aller de l'une à l'autre en un coup, à la distance 2 si elles peuvent être jointes en 2 coups et pas moins, etc. Montrer qu'à chaque pièce est associée une distance : boules, sphères, diamètres, composantes connexes par arcs, etc.

Exercice 19 : Nombres d'Erdős. Soit S la communauté mathématique, A l'ensemble des paires de mathématiciens ayant cosigné un article. Paul Erdős (1913-1996) fut le mathématicien le plus prolifique de son temps : il a signé 1475 articles, et cosigné des articles avec près de 500 collègues. Le nombre d'Erdős de Erdős est 0, les matheux ayant cosigné un article avec lui ont pour nombre d'Erdős 1, ceux qui ont cosigné un article avec les précédents ont pour nombre d'Erdős 2, etc. Lien avec ce qui précède ? ¹⁴

L'auteur de ces lignes est à une poignée de main de Raphaël Cerf (que je salue !), à deux poignées de mains d'Henri Guillemin, à trois poignées de main d'Alexandre Grothendieck, à trois ou quatre poignées de main du docteur qui a coupé la jambe de Rimbaud, à deux baisers et deux saluts militaires de Lawrence d'Arabie...

A.3.14. Distance p-adique sur Q.

Soit p un nombre premier. Pour tout entier naturel non nul, notons $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. On a $\forall n, n' \in \mathbf{N}^* \quad v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$.

Si $x = \pm r/s$ est un rationnel non nul, où r et s $\in \mathbf{N}^*$, posons $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$; cette définition est légitime, car $v_p(r) - v_p(s)$ ne dépend pas de la représentation de x.

De plus, on a : $\forall x, y \in \mathbf{Q}^* \quad v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, posons $d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$ si $x \neq y$, $d_p(x, y) = 0$ si $x = y$.

Je dis que d_p est une distance sur \mathbf{Q} , appelée **distance p-adique**. Les axiomes (D 1) et (D 2) sont immédiats. Reste (D 3) ; en fait, nous allons montrer mieux, à savoir :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \quad d_p(x, z) \leq \max(d_p(x, y), d_p(y, z)).$$

C'est évident lorsque deux des éléments x, y, z sont égaux ; supposons-les tous distincts.

Tout revient à établir que si $(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ sont tels que $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x \neq y$, on a :

$$v_p(x - y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)).$$

On peut supposer $v_p(x) \geq v_p(y)$. Ecrivant $x - y = (x/y - 1)y$, tout revient à montrer que si $z \in \mathbf{Q}$ est tel que $z \neq 0$, $z \neq 1$ et $v_p(z) \geq 0$, on a : $v_p(z - 1) \geq 0$.

Ecrivons $z = \pm p^h \frac{a}{b}$, avec $h \geq 0$, et a et b non divisibles par p. Comme le dénominateur de $z - 1$ n'est pas divisible par p, on a bien $v_p(z - 1) \geq 0$. cqfd.

Notons que si x et y sont dans \mathbf{Z} , pour tout entier $n \geq 0$:

$$d_p(x, y) \leq p^{-n} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{p^n} \quad \text{et} \quad d_p(x, y) < p^{-n} \Leftrightarrow x \not\equiv y \pmod{p^{n+1}}.$$

Les distances p-adiques sont préprogrammées dans Maple :

```
> with(padic);
> distp:=(x,y,p)->valuep(x-y,p);
      distp := (x, y, p) -> valuep(x - y, p)
> distp(25,50,5);distp(13/75,25/14,5);
      5^-2
```

¹⁴ Le nombre d'Erdős de Grothendieck est 5, confirmant que ces deux mathématiciens sont fort différents.

A.3.15. La distance de Molière à Corneille.

Corneille aurait-il écrit certaines des pièces de Molière ? Plusieurs critiques le pensent, à la suite de Pierre Louÿs. En utilisant une « distance intertextuelle » fondée sur les parentés lexicales, un chercheur grenoblois a récemment affirmé qu'« *il est certain, à 99,9%, que c'est la même main qui a écrit « Le Menteur» de Corneille et certaines pièces de Molière.* » Mais des chercheurs ont montré par la suite que Molière est bien l'auteur de ses œuvres¹⁵. C'est avec de semblables méthodes qu'une *Elégie funèbre en vertueuse mémoire de feu William Peter* a été attribuée en 1996 à William Shakespeare par un universitaire américain, grâce à un logiciel fondé sur la fréquence des termes shakespeariens, le Shaxicon. Littérature, mathématiques appliquées et statistique lexicale auraient donc rendez-vous dans ce chapitre ?

A.3.16. La distance sociale.

« *Le monde n'est qu'une branloire perenne* »

Montaigne, *Essais* (livre III, chap 2)

Chacun de nous a son espace métrique particulier. Jadis Saint-Simon a cruellement décrit la topologie de la cour de Versailles. Rien n'a changé sous le soleil. Pour un bobo parisien ou lyonnais New York et Singapour sont à deux pas, Saint-Chamond est aux antipodes, et dans certains milieux polytechnique est l'école de quartier. La distance de Costaros à Lyon est-elle archimédienne ? Pour un coronavirus, de Chine en Lombardie il n'y a qu'un saut de puce : il suffit d'infecter un touriste¹⁶, et voilà des millions de bipèdes obligés de respecter une distance physique qui est en même temps, en effet, une distance sociale. « *Le monde n'est qu'une branloire pérenne. Toutes choses y branlent sans cesse : la terre, les rochers du Caucase, les pyramides d'Aegypte, et du branle public et du leur.* », a écrit Montaigne (Livre III, chap II). Branloire, ça c'est sûr, pérenne, c'est une autre histoire.

Ces remarques sont affectueusement dédiées à la mémoire de mon ancêtre ardéchois Joseph Volle, dit Pata, dont j'ai fini par dénicher l'acte de sépulture au bas d'un feuillet. Il est mort à 84 ans, le 5 février 1785, à Juvinas. Ce village perché à flanc de montagne paraît aujourd'hui bien petit, il était alors très grand : il y avait la Roche, la Blachère, Ainac, les Champeaux, les Moucheyres, le moulin de la Coste, le Cros, Libonès où bien plus tard, en juillet 1821, s'écraserait une météorite. Les paysans de la Roche se mariaient entre paysans de la Roche, il était rare qu'ils cherchent femme ailleurs. Ils n'avaient pas la même vision du monde que nous, nos ancêtres, et leur espace métrique avait goût de châtaigne.

¹⁵ Le Monde, 19 juin 1996 et 11 juin 2003, et Pour la Science, mars 2003 (p. 90), janvier 2020 (p. 54).

¹⁶ Définition mathématique du touriste : consommateur compulsif de kérosène détaxé.

A.4. Espaces vectoriels normés.

Les espaces vectoriels normés, et les parties d'espaces vectoriels normés, constituent les principaux exemples d'espaces métriques. On peut d'ailleurs démontrer que tout espace métrique est isométrique à une partie d'espace vectoriel normé (cf. D.2). Nous reviendrons sur les propriétés spécifiques des espaces vectoriels normés dans un chapitre ultérieur.

Définition 1 : Soient $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , E un \mathbf{K} -espace vectoriel. On appelle **norme** sur E une application $N : x \in E \rightarrow \|x\| \in \mathbf{R}^+$ vérifiant les trois axiomes :

- (N1) séparation $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 (N2) homogénéité $\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E \quad \|\lambda.x\| = |\lambda|. \|x\|$
 (N3) inégalité du triangle $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Un **espace vectoriel normé** (ou evn) est un couple (E, N) formé d'un \mathbf{K} -espace vectoriel et d'une norme sur E .

Propriétés des espaces vectoriels normés :

1) Si (E, N) est un espace vectoriel normé, l'application $d : (x, y) \in E^2 \rightarrow \|x - y\| \in \mathbf{R}^+$ est une distance sur E , dite **associée** à la norme de E . (E, d) est appelé **espace métrique sous-jacent** à l'espace normé (E, N) . En fait, si \mathcal{E} est un espace affine associé à l'espace vectoriel normé (E, N) , \mathcal{E} hérite de la même distance.

2) Cette distance d n'est pas quelconque, puisqu'elle vérifie :

- $d(x + z, y + z) = d(x, y)$: les translations sont des isométries de (E, d)
 $d(\lambda.x, \lambda.y) = |\lambda|.d(x, y)$: les homothéties sont des dilatations de (E, d)

3) Réciproquement, si d est une distance sur E vérifiant ces deux propriétés, alors $x \rightarrow \|x\| = d(x, 0)$ est une norme sur E , et d la distance associée.

4) Surtout, il découle de 2) que les boules ouvertes et fermées, et les sphères, sont des images de boules ou sphères unités par homothétie-translation :

$$B(a, r) = a + r.B(O, 1), \quad B'(a, r) = a + r.B'(O, 1), \quad S(a, r) = a + r.S(O, 1).$$

5) Les boules unités, ouverte et fermée, de centre O sont convexes, symétriques par rapport à O , absorbantes, et ne contiennent aucune demi-droite d'origine O .

6) Dans un espace normé, le segment *métrique* $[a, b] = \{x \in E; d(a, x) + d(x, b) = d(a, b)\}$ contient toujours le segment *affine* $[[a, b]] = \{t.a + (1-t).b; t \in [0, 1]\}$, et la droite *métrique* $(a, b) = [a, b] \cup \{x \in E; d(a, x) = d(a, b) + d(x, b)\} \cup \{x \in E; d(b, x) = d(b, a) + d(a, x)\}$ contient toujours la droite *affine* $((a, b)) = \{t.a + (1-t).b; t \in [0, 1]\}$, mais ils peuvent être distincts.

Exemples d'espaces vectoriels normés :

1) Les espaces cartésiens $E = \mathbf{K}^n$.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}$.

Ce sont trois normes sur \mathbf{K}^n . Pour les deux premières, c'est facile à vérifier.

La troisième est la norme euclidienne classique. La démonstration repose sur :

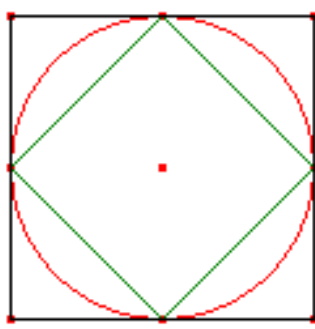
Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbf{K}^n .

$$|\sum \overline{x_i} y_i|^2 \leq \sum |x_i|^2 \cdot \sum |y_i|^2 \quad (\overline{z} \text{ est le conjugué de } z)$$

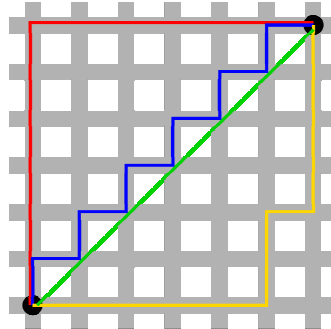
avec égalité ssi les vecteurs x et y sont liés dans \mathbf{K}^n .

Inégalité de Minkowski : $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$, avec égalité ssi les vecteurs x et y sont positivement liés, i.e. $x = 0$ ou $y = \alpha.x$, $\alpha \geq 0$.

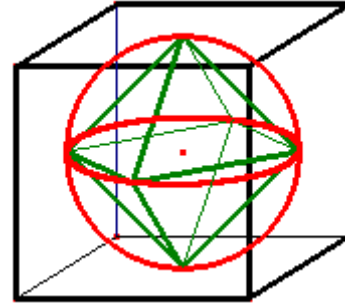
Voici représentées sur une même figure les boules unités de \mathbf{R}^2 , resp. \mathbf{R}^3 , pour ces trois normes.



Les 3 boules dans \mathbf{R}^2



Distance de Manhattan



Les 3 boules dans \mathbf{R}^3

La distance associée à la norme $\|x\|_1$ est parfois appelée « **distance de Manhattan** » ; elle mesure en effet la distance d'un point A à un point B dans le quartier de Manhattan aux rues rectangulaires. Elle est bien plus adaptée pour s'y déplacer que la distance euclidienne, qui est la « distance à vol d'oiseau ». Pour la distance euclidienne, le segment métrique joignant A à B est le segment usuel $\{ \lambda A + (1-\lambda)B ; \lambda \in [0, 1] \}$; pour la distance de Manhattan, le segment métrique joignant A à B est le rectangle ACBD de diagonale AB et de côtés parallèles aux axes.

2) Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. Pour tout $x = \sum x_i \cdot \epsilon_i$, on pose

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}.$$

Il est immédiat que ce sont trois normes sur E.

3) Normes matricielles.

En tant qu'espace vectoriel, $M_n(\mathbf{K})$ n'est autre que \mathbf{K}^{n^2} . Il hérite aussitôt des trois normes précédentes. La troisième norme s'appelle **norme de Frobenius**.

Elle vérifie : $\|A\|_2 = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)}$,

où A^* est l'adjointe de A (transposée si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, transconjugée si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$).

On verra plus tard que $M_n(\mathbf{K})$ est aussi muni d'autres normes : les normes triples, ou subordonnées aux normes de \mathbf{K}^n .

4) Normes polynomiales.

Sur $E = \mathbf{K}[X]$, soit $P = \sum a_i X^i$; $\|P\|_\infty = \max |a_i|$, $\|P\|_1 = \sum |a_i|$ et $\|P\|_2 = \sqrt{\sum |a_i|^2}$ sont trois normes sur E.

Il y en a bien d'autres. Ainsi, si A est une partie infinie bornée de \mathbf{R} ou \mathbf{C} , on peut montrer que $N_A(P) = \sup_{z \in A} |P(z)|$ est une norme sur E. Et il y a les normes fonctionnelles vues en 5).

5) Normes sur des espaces fonctionnels.

Soit $E = \mathcal{B}(X, \mathbf{K})$ l'espace des fonctions bornées $f : X \rightarrow \mathbf{K}$. Alors $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ est une norme sur E, dite **norme uniforme**.

Soit $E = \mathcal{C}[a, b], \mathbf{K}$. À la norme uniforme s'ajoutent les deux normes usuelles :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad : \text{norme de la (convergence en) moyenne} ;$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad : \text{norme de la (convergence en) moyenne quadratique},$$

qui sont l'analogie intégral des normes discrètes vues en 1).

A.5. Écarts, semi-distances, semi-normes.

Il arrive parfois que l'application d ne vérifie pas tout à fait les axiomes D1 à D3. On parle alors d'écart ou de semi-distance. Dans ce chapitre on traite des espaces métriques, mais certains concepts et résultats s'étendent sans peine aux espaces semi-métriques, comme on le verra en B.5.

Définition 1 : Soit E un ensemble. Un **écart** sur E est une application $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant :

- (EC 1) $\forall x \in E \quad d(x, x) = 0$
- (EC 2) $\forall (x, y) \in E \times E \quad d(x, y) = d(y, x)$
- (EC 3) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Une **semi-distance** ou **pseudo-distance** est un écart fini. Un **espace semi-métrique** ou **pseudo-métrique** est un espace muni d'une semi-distance.

Exemples :

1) Soient (E, d) un espace métrique, $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les fonctions de X dans E . Si f et $g \in \mathcal{F}(X, E)$, on définit $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. d_∞ est un écart sur $\mathcal{F}(X, E)$, appelé **écart uniforme**. Pour que (f_n) tende uniformément vers f dans $\mathcal{F}(X, E)$, il faut et il suffit que $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$. Notons que $D = \frac{d_\infty}{d_\infty + 1}$ est une distance sur $\mathcal{F}(X, E)$, et que $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow D(f_n, f) \rightarrow 0$.

Ainsi, la topologie de la convergence uniforme est "métrisable", c'est-à-dire peut être définie par une distance.

2) Une partie A de \mathbf{R}^2 est dite « quarrable » si elle a « une aire » ; celle-ci est notée $\lambda(A)$. $d(A, B) = \lambda(A \Delta B)$ est alors une semi-distance sur l'ensemble des parties quarrables de \mathbf{R}^2 . Cette semi-distance, bien adaptée à certains problèmes, est fort différente de la distance de Hausdorff que nous verrons plus tard.

3) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. $d(A, B) = P(A \Delta B)$ est une semi-distance sur la tribu \mathcal{A} des événements. Il y a une grande analogie avec l'exemple précédent, car probabilités et aires relèvent de la théorie de la mesure.

Exercice : Soit d une semi-distance sur E . Montrer que « $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ » est une relation d'équivalence sur E , et que d induit une distance sur l'ensemble quotient E/\mathcal{R} .

Définition 2 : Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel. Une **semi-norme** est une application $N : x \in E \rightarrow \|x\| \in \mathbf{R}^+$ vérifiant les deux axiomes :

- (N2) homogénéité $\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (N3) inégalité du triangle $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Un **espace vectoriel semi-normé** est un couple (E, N) formé d'un \mathbf{K} -espace vectoriel et d'une semi-norme. $d : (x, y) \rightarrow \|x - y\|$ est une semi-distance sur E , et $\{x \in E ; \|x\| = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exemples : Sur l'espace des fonctions Riemann-intégrables, ou le sous-espace des fonctions réglées, de $[a, b]$ dans \mathbf{R} , $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$ sont des semi-normes.

Leurs restrictions à $C([a, b], \mathbf{R})$ sont des normes.

B. Topologie d'un espace métrique

« Nerzhin, les lèvres fortement serrées, était inattentif jusqu'à la grossièreté : il n'essayait même pas de savoir ce que Verenyov avait écrit sur cette branche aride des mathématiques qu'il avait lui-même un peu étudiée pour l'un de ses cours. Soudain il se sentit gêné pour Verenyov. La topologie était comme la stratosphère de la pensée humaine. On pouvait penser qu'elle servirait peut-être au vingt-quatrième siècle, mais pour l'instant...

Je ne me soucie ni du Soleil ni des étoiles,
Je vois seulement un homme qui souffre. »

Soljénitsine, *Le premier cercle*

B.1. Ensembles ouverts, intérieur d'un ensemble.

Définition 1 : Dans l'espace métrique (E, d) , une partie U est dite **ouverte**¹⁷ si :

$$(\forall a \in U) \quad (\exists r > 0) \quad B(a, r) \subset U.$$

Exemples :

1) \emptyset et E sont des ensembles ouverts.

2) Toute boule ouverte est un ensemble ouvert.

En effet, si $b \in B(a, r)$, i.e. $d(a, b) < r$, je dis que

$$B(b, r - d(a, b)) \subset B(a, r).$$

3) Dans un espace discret, toute partie est ouverte.

4) Dans \mathbf{R} , quels sont, parmi ces ensembles, ceux qui sont ouverts :

$$]0, 1[, [0, 1[, [0, 1],]0, +\infty[, [0, +\infty[, \mathbf{Q}, \mathbf{R}-\mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}-\mathbf{Z} ?$$

Proposition 1 : L'ensemble \mathcal{O} des ouverts de (E, d) vérifie les trois axiomes :

(O I) \emptyset et E sont des ouverts de E ;

(O II) L'intersection de deux ouverts de E est un ouvert de E ;

(O III) La réunion d'une famille quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E .

Le couple (E, \mathcal{O}) est appelé **espace topologique**¹⁸ sous-jacent à l'espace métrique (E, d) .

Remarque : Il découle de (OII) que l'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est ouverte. Il n'en est pas de même en général de l'intersection d'une famille *quelconque* d'ouverts : ainsi, dans \mathbf{R} , l'intersection de la suite d'ouverts $] -1/n, 1/n[$ ($n \geq 1$) est le singleton $\{0\}$, qui n'est pas ouvert.

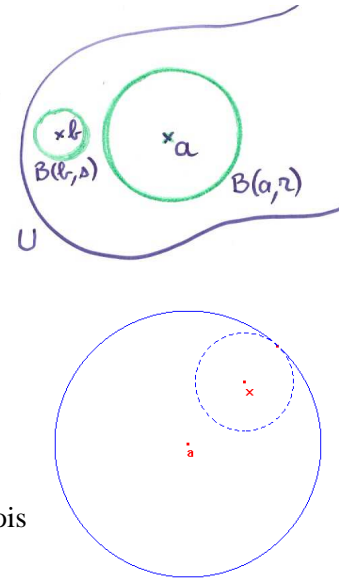
Exercice 1 : Montrer que, pour que U soit un ouvert de E , il faut et il suffit qu'il soit réunion d'une famille de boules ouvertes.

Définition 2 : Soit A une partie de (E, d) . Un point x est dit **intérieur** à A si $(\exists r > 0) \quad B(x, r) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A est dit **intérieur** de A et noté $\text{Int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$.

Exemples :

1) Si $E = \mathbf{R}$, et si A est l'intervalle (a, b) , $a < b$, l'intérieur de A est $]a, b[$.

2) Si E est le plan euclidien, et si T est le triangle plein ABC (A, B, C non alignés), T contient un point intérieur : le centre du cercle inscrit. Il en contient bien d'autres : l'intérieur de T est T privé des trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.



¹⁷ Le mot *open set* fut introduit en 1906 par William Henry Young (1863-1942) et son épouse Grace Chisholm (1868-1944). Le mot allemand *gebeit* avait été introduit par Weierstrass dans le sens d'ouvert connexe de \mathbf{R}^n , puis repris par Hausdorff en 1914 dans le sens d'ouvert.

¹⁸ Le mot *topologie* fut introduit en 1847 par **Johann Listing** (1808-1872), qui regrettait de ne pouvoir utiliser le mot *géométrie de position*, déjà utilisé ailleurs. Par la suite, ce mot s'est substitué à celui, plus ancien, d'*Analysis situs*. Le terme *espace topologique* (*topologische raum*) fut créé par Hausdorff (*Grundzüge der Mengenlehre*, 1914).

Proposition 2 : L'intérieur de A est un ouvert, c'est le plus grand ouvert inclus dans A .

Preuve : • Soit U un ouvert inclus dans A . Tout point a de U vérifie $(\exists r > 0) B(a, r) \subset U$, et a fortiori $B(a, r) \subset A$. a est donc intérieur à A , et donc $U \subset \overset{\circ}{A}$.

• Soit x un point intérieur à A ; alors $(\exists r > 0) B(x, r) \subset A$. Tout point y de $B(x, r)$ est intérieur à A car $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r) \subset A$. Donc $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$, et $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

Corollaire : Un ensemble U est ouvert ss'il est égal à son intérieur.

Exercice 2 : Quel est l'intérieur dans \mathbf{R} des ensembles suivants : $[0, 1[\cup \{2\}$, \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$?

Exercice 3 : Montrer que l'application $A \rightarrow \text{Int}(A)$ vérifie pour tous A et B :

$$A \subset B \Rightarrow \text{Int}(A) \subset \text{Int}(B) ; \text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A) ; \text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B).$$

Définition 3 : On appelle **extérieur** de A l'intérieur de son complémentaire $\text{Ext}(A) = \text{Int}(E - A)$.

Proposition 3 : $x \in \text{Ext}(A) \Leftrightarrow d(x, A) > 0$.

Preuve : Si $x \in \text{Ext}(A) = \text{Int}(E - A)$, $(\exists r > 0) B(x, r) \subset E - A$; alors $d(x, y) \geq r$ pour tout $y \in A$, donc $d(x, A) \geq r > 0$. Réciproquement, si $d(x, A) = r > 0$, $B(x, r) \subset E - A$; tout point $y \in B(x, r)$ est même intérieur à $E - A$, car $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r) \subset E - A$. Donc $x \in \text{Ext}(A) = \text{Int}(E - A)$.

B.2. Voisinages, suites convergentes.

B.2.1. Voisinages d'un point.

«Je ne suis pas la rose, mais j'ai vécu dans son voisinage.»

Saadi

Définition 4 : Une partie V de E est appelée **voisinage** de x si $x \in \text{Int}(V)$.

Proposition 4 : A est ouvert ssi A est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 5 : Pour tout x , soit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x . Alors :

- (V I) $\forall x \in E, \forall V \in \mathcal{V}(x) \quad x \in V$;
- (V II) $\forall U, V \in \mathcal{V}(x) \quad U \cap V \in \mathcal{V}(x)$;
- (V III) $\forall U \in \mathcal{V}(x) \quad U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$;
- (V IV) $\forall U \in \mathcal{V}(x), \exists V \in \mathcal{V}(x) \quad y \in V \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y)$.

Preuve : seul (V IV) mérite d'être établi. Soit U un voisinage de x . Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Posons $V = B(x, r)$. V est ouvert, donc est un voisinage de chacun de ses points. U est a fortiori voisinage de chacun des points de V .

Les axiomes (VI, II & III) expriment que les voisinages de x forment un « filtre ». L'axiome (V IV) exprime les relations entre les voisinages de différents points, et s'énonce ainsi en français : « tout voisinage de x est aussi un voisinage des points suffisamment voisins de x ».

Définition 5 : Un **système fondamental** de voisinages de x est une famille $(U_i)_{i \in I}$ de voisinages de x telle que tout voisinage de x contienne l'un des U_i .

Exemples :

- les boules ouvertes de centre x forment un système fondamental de voisinages de x ;
- les boules ouvertes de centre x et de rayon $1/n$ forment un syst. fondamental de voisinages de x ;
- idem avec les boules fermées.

B.2.2. Suites convergentes.

Définition 6 : Soit (x_n) une suite de points de E . On dit qu'elle **converge** vers x ¹⁹, et l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (L1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$;
- (L2) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0) d(x_n, x) \leq \varepsilon$;
- (L3) $\forall V \in \mathcal{V}(x) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0) x_n \in V$.

Propriétés des suites convergentes :

- 1) Unicité de la limite. C'est une conséquence de l'axiome de séparation (D 1).
- 2) Toute suite convergente est bornée.
- 3) Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente, et a même limite.
- 4) Si $(U_i)_{i \in I}$ est un système fondamental de voisinages de x , pour que (x_n) tende vers x , il faut et il suffit que $(\forall i \in I) (\exists n_0) (\forall n \geq n_0) x_n \in U_i$.

Exemples de suites convergentes :

- 1) Dans un espace discret, les suites convergentes sont les suites stationnaires.
- 2) Dans \mathbf{K}^n muni d'une quelconque des trois normes définies en A.4., une suite de vecteurs $x^p = (x_1^p, \dots, x_n^p)$ converge ssi chacune des suites $(x_i^p)_p$, $1 \leq i \leq n$, converge.
Idem pour les suites de matrices.
- 3) Dans la droite numérique achevée, les suites numériques convergentes sont les suites réelles convergeant dans \mathbf{R} , les suites tendant vers $+\infty$ et les suites tendant vers $-\infty$. Ainsi les suites réelles tendant vers l'infini sont *divergentes* dans \mathbf{R} (pour la distance usuelle), mais *convergentes* dans $\overline{\mathbf{R}}$: c'est précisément pour adopter ce nouveau point de vue qu'on considère la droite numérique achevée.
- 4) Dans $\tilde{\mathbf{C}}$, une suite (z_n) de complexes tend vers ∞ ssi $|z_n|$ tend vers $+\infty$. Par exemple, la suite $((-1)^n n)$, qui *diverge* dans \mathbf{R} et dans $\overline{\mathbf{R}}$, *converge* vers ∞ dans $\tilde{\mathbf{R}}$.
- 5) Dans $(\mathcal{B}(X, E), d_\infty)$ (cf.A.3.8) ou, plus généralement, dans $(\mathcal{F}(X, E), D)$ (cf.A.5), la convergence d'une suite (f_n) de fonctions vers une fonction f s'écrit :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbf{N}) (\forall n \geq n_0) (\forall x \in X) d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

On reconnaît la définition de la convergence uniforme, qui sera revue et étudiée plus tard.

Exercice 1 : Montrer que la suite (x_n) ne tend pas vers a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(x_{n(k)})$ tels que, pour tout k , $d(x_{n(k)}, a) \geq \varepsilon$.

Exercice 2 : 1) Soit (x_n) une suite de points de E . On suppose les suites (x_{2n}) , (x_{2n+1}) et (x_{7n}) convergentes. Montrer que la suite (x_n) converge.

2) Donner un exemple de suite réelle divergente, et telle que chacune des suites extraites $(x_{kn})_n$, $k \geq 2$, soit convergente.

Exercice 3 : Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de E , de limite x . Montrer que pour toute permutation σ de \mathbf{N} , $(x_{\sigma(n)})$ converge et a même limite.

¹⁹ Le terme *convergent* fut introduit par James Gregory (1638-1675) en 1667 (*series convergens*) ; quant au terme *divergent*, il fut introduit, selon les sources, par Gregory en 1668 ou par Nicolas I Bernoulli en 1713. La définition des suites convergentes à l'aide des ε et des n_0 remonte à Weierstrass (1815-1897), et fut énoncée dans les cours qu'il fit à l'université de Berlin, entre 1850 et 1860. Avant lui, la notion de convergence restait intuitive et dynamique. «On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment d'une façon telle qu'elle converge vers la valeur zéro», affirme encore Cauchy. Quant au symbole ∞ , il fut introduit par l'anglais John Wallis (1616-1703).

Exercice 4 : On se place dans (\mathbf{Q}, d_p) muni de la distance p -adique définie en A.3.14. Démontrer que les suites (p^n) et $x_n = 1 + p + \dots + p^n$ convergent. Quelles sont leurs limites ?

Problème : axiomes de Fréchet-Kuratowski.

1) Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la convergence des suites vérifie les 4 axiomes :

(FK 1) toute suite (x_n) stationnaire, égale à x à partir d'un certain rang, converge vers x ;

(FK 2) toute suite extraite d'une suite tendant vers x tend vers x ;

(FK 3) si, de toute suite extraite de (x_n) on peut extraire une suite tendant vers x , (x_n) tend vers x ;

(FK 4) si $(x_{m,n})$ est une suite double de points de E , vérifiant :

$$(\forall m) \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{m,n} = a_m \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = a ,$$

alors il existe $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante, telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{m,\varphi(m)} = a$.

2) Nous dirons qu'une suite numérique $(x_n)_{n \geq 1}$ est «convergente au sens de Cesàro» si la suite (y_n) définie par $y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ converge, et l'on note $C\text{-lim } x_n = \lim y_n$.

Cette notion de limite possède de bonnes propriétés, tant algébriques que topologiques :

- $C\text{-lim } x_n = a$ et $C\text{-lim } y_n = b \Rightarrow C\text{-lim } \lambda x_n + \mu y_n = \lambda a + \mu b$;
- Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ convergente au sens usuel, $C\text{-lim } x_n = \lim x_n$;
- Si $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente au sens de Cesàro, toute suite $(y_n)_{n \geq 1}$ égale à $(x_n)_{n \geq 1}$ à partir d'un certain rang, est aussi convergente au sens de Cesàro, et $C\text{-lim } x_n = C\text{-lim } y_n$.

Cela dit, existe-t-il une distance d sur \mathbf{R} telle que $C\text{-lim } x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, a) = 0$?

La réponse est non, car la suite $(0, 1, 0, 1, \dots)$ tend vers $\frac{1}{2}$ au sens de Cesàro, la suite extraite $(0, 0, 0, \dots)$ tend vers 0.

Les axiomes de Fréchet-Kuratowski permettent de définir une notion abstraite de convergence et de limite des suites dans un ensemble quelconque E . On peut montrer qu'une convergence des suites vérifiant les axiomes (FK1, 2, 3) n'est pas toujours associée à une topologie, mais qu'une convergence des suites vérifiant les 4 axiomes est toujours associée à une distance sur E . L'exercice précédant montre que certaines notions de convergence de suites, bien qu'intéressantes, ne rentrent pas dans le cadre rigide et préétabli des espaces métriques, pas plus que dans celui des espaces topologiques généraux. « *Ceux qui s'attachent à des systèmes sont ceux qui, incapables d'embrasser la vérité toute entière, tentent de l'attraper par la queue. Un système, c'est un peu la queue de la vérité, mais la vérité est comme le lézard : elle vous laisse sa queue entre les doigts, et file, sachant parfaitement qu'il lui en poussera une nouvelle en un rien de temps* », a écrit Tourgueniev à Tolstoï en 1856... Mais revenons aux espaces métriques : les critiquer ne dispense pas de les étudier.

B.3. Ensembles fermés, adhérence d'un ensemble.

B.3.1. Ensembles fermés.

Définition 7 : Dans l'espace métrique (E, d) , un ensemble est dit **fermé**²⁰ s'il est le complémentaire d'un ensemble ouvert.

Exemples :

- 1) \emptyset et E sont des ensembles fermés.
- 2) Toute boule fermée $B'(a, r)$ est un ensemble fermé. A ce stade, pour le démontrer, il faut vérifier que son complémentaire est ouvert. Or si $b \notin B'(a, r)$, i.e. $d(a, b) > r$, alors la boule ouverte $B(b, d(a, b) - r)$ est incluse dans le complémentaire de $B'(a, r)$.
- 3) Dans un espace discret, toute partie est fermée.
- 4) Dans \mathbf{R} les intervalles fermés sont des fermés. Parmi ces ensembles, lesquels sont fermés $]0, 1[$, $[0, 1[$, $[0, 1]$, $]0, +\infty[$, $[0, +\infty[$, \mathbf{Q} , $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$, \mathbf{Z} , $\mathbf{R}-\mathbf{Z}$?

²⁰ Le concept et le terme d'*ensemble fermé* ont été introduits en français par Cantor en 1884.

Proposition 6 : L'ensemble \mathcal{F} des fermés de (E, d) vérifie les trois axiomes :

- (F I) \emptyset et E sont des fermés de E ;
- (F II) La réunion de deux fermés de E est un fermé de E ;
- (F III) L'intersection d'une famille quelconque de fermés de E est un fermé de E .

Preuve : Ce résultat se déduit aussitôt de la prop. 1 du § B.1. en vertu des lois de de Morgan.

Attention ! Un ensemble peut être à la fois ouvert et fermé (ainsi \emptyset et E), et peut n'être ni ouvert ni fermé (ainsi $[0, 1[$ dans \mathbf{R}). De plus, une réunion *finie* de fermés est fermée, pas une réunion *quelconque*.

B.3.2. Points adhérents, adhérence d'un ensemble.

Théorème et définition : Soit A une partie de E . Un point x de E est dit **adhérent** à A s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (A1) tout voisinage de x rencontre A ;
- (A2) toute boule ouverte de centre x rencontre A ;
- (A3) $d(x, A) = 0$;
- (A4) il existe une suite de points de A qui converge vers x dans E ;

L'ensemble des points adhérents à A s'appelle **adhérence** de A et se note $\text{Adh}(A) = \overline{A}$.

Preuve : $(A1) \Rightarrow (A2)$, car toute boule ouverte de centre x est un voisinage de x .

$(A2) \Rightarrow (A3)$ car, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ rencontre A , donc $\exists y \in A$ $d(x, y) < \varepsilon$.

Il en résulte que $d(x, A) \equiv \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$.

$(A3) \Rightarrow (A4)$. Si $d(x, A) \equiv \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$.

(x_n) est une suite de points de A tendant vers x dans E .

$(A4) \Rightarrow (A1)$. Si (x_n) est une suite de points de A tendant vers x dans E , tout voisinage de x contient les x_n à partir d'un certain rang, donc rencontre A .

Proposition 8 : $E - \text{Adh}(A) = \text{Int}(E - A)$.

Preuve : En vertu du théorème précédent $(A3)$ $x \in E - \text{Adh}(A) \Leftrightarrow d(x, A) > 0$.

Or cela équivaut à $x \in \text{Ext}(A) \equiv \text{Int}(E - A)$, en vertu de la prop 3 du § B.1.

Résultat utile, qui transforme tout problème relatif à l'intérieur en un problème relatif à l'adhérence, et vice versa.

Proposition 9 : \overline{A} est le plus petit fermé contenant A .

Preuve : Il est clair que \overline{A} contient A , et est fermé comme complémentaire d'un ouvert (prop. 8).

Enfin, si F est un fermé contenant A , $E - F$ est un ouvert inclus dans $E - A$, donc dans $\text{Int}(E - A) = E - \overline{A}$ (§ B.1, prop. 2). Par suite, F contient \overline{A} .

Pour montrer qu'un ensemble F est fermé, il y a donc plusieurs méthodes :

- Montrer que $E - F$ est ouvert ;
- Si (x_n) est une suite de points de F tendant vers a dans E , montrer que $a \in F$;
- Montrer que F est intersection d'une famille quelconque de fermés, ou réunion finie d'ouverts.

Définition 9 : Soit A une partie de E . On appelle **frontière** de A : $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E - A}$.

Proposition 10 : Le complémentaire de $\text{Fr}(A)$ est $\text{Int}(A) \cup \text{Ext}(A)$.

Si A est une partie de E , E est la réunion des trois ensembles disjoints : l'intérieur de A , son extérieur et sa frontière. Les deux premiers sont ouverts, le troisième est fermé. Certains de ces

ensembles peuvent être vides. L'adhérence de A est la réunion de $\text{Int}(A)$ et de $\text{Fr}(A)$. L'adhérence de $E - A$ est la réunion de $\text{Ext}(A)$ et de $\text{Fr}(A)$ ²¹.

Exemples d'adhérence, de frontière :

— Soit $A = \{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \}$; déterminer \overline{A} (dans \mathbf{R}).

— Soit $A =]0, +\infty[$; déterminer son adhérence dans \mathbf{R} , puis dans $\overline{\mathbf{R}}$.

— Il ne faut pas croire que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ soit la boule fermée $B'(a, r)$. Penser à un espace discret, avec $r = 1$. L'adhérence de $B(a, r)$ est incluse dans $B'(a, r)$.

— Cependant, dans un espace normé, l'adhérence de $B(a, r)$ est $B'(a, r)$, leur frontière commune est $S(a, r)$, leur extérieur commun est $\{ x ; d(x, a) > r \}$.

— Quelle est la frontière de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} ?

Exercice 1 : Montrer que l'application $A \rightarrow \text{Adh}(A) = \overline{A}$ vérifie pour tous A et B :

$$A \subset B \Rightarrow \text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(B) ; \text{Adh}(\text{Adh}(A)) = \text{Adh}(A) ; \text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B).$$

Exercice 2 : Montrer que A est ouvert si et seulement s'il ne rencontre pas sa frontière.

Montrer que A est fermé si et seulement s'il contient sa frontière.

Exercice 3 : Montrer que A et \overline{A} ont même diamètre ; en déduire A bornée $\Rightarrow \overline{A}$ bornée.

Exercice 4 : Montrer que $\forall (x, A, B) \quad d(x, A) = d(x, \overline{A})$ et $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

Exercice 5 : Soit A une partie non vide majorée de \mathbf{R} . Montrer $x = \sup A \Leftrightarrow x$ majore A et $x \in \overline{A}$. Que dire de $\sup A$ et $\inf A$ si A est fermée bornée ?

Exercice 6 : Dans le plan euclidien d'origine O , trouver une partie A vérifiant :

$$\text{Int}(A) = \{ M ; OM < 1 \} , \text{ Fr } A = \{ M ; 1 \leq OM \leq 2 \} , \text{ Ext}(A) = \{ M ; OM > 2 \} .$$

Exercice 7 : Soit (E, d) un espace métrique. Pour toute partie $A \subset E$ on note

$$\alpha(A) = \text{Int}(\text{Adh}(A)) \quad \text{et} \quad \beta(A) = \text{Adh}(\text{Int}(A)).$$

1) Montrer A ouvert $\Rightarrow A \subset \alpha(A)$ et A fermé $\Rightarrow \beta(A) \subset A$.

2) En déduire $(\forall A) \quad \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

3) Donner un exemple de partie A de \mathbf{R} telle que $A, \text{Int}(A), \text{Adh}(A), \text{Int}(\text{Adh}(A)), \text{Adh}(\text{Int}(A)), \text{Int}(\text{Adh}(\text{Int}(A))), \text{Adh}(\text{Int}(\text{Adh}(A)))$ soient sept parties distinctes.

Exercice 8 : Soit A une partie de E . On considère la fonction $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = d(x, E - A) - d(x, A).$$

Quand a-t-on $f(x) > 0$, $f(x) = 0$, $f(x) < 0$?

²¹ La frontière de A est donc l'ensemble des points qui ne sont ni dans l'intérieur de A , ni dans l'extérieur de A . Ainsi, la topologie introduit un peu de logique ternaire, là où la théorie des ensembles réduit à l'alternative sèche $x \in A$ ou $x \notin A$. Un numéro de *Pour la Science* a été consacré à la notion de frontière. Les ensembles fractals ont pour particularité d'avoir une « grosse » frontière.

Cette notion de frontière fournit des métaphores éclairantes dans de nombreux champs de réflexion, de la biologie à la sociologie. Ainsi, dans son livre consacré aux *Origines de la guerre d'Algérie 1940-1945* (La découverte, 2002), Annie Rey-Goldzeiguer distingue trois mondes dans la société algérienne : celui des Européens de souche, dominant, celui des « indigènes », dominé, et le monde « du contact » entre les deux communautés (caïds, cadis, gardes-champêtres, juifs, communistes, intellectuels, etc.). Au cours de la guerre d'indépendance, les extrémistes des deux bords ont cherché à faire disparaître cette frontière poreuse, afin d'aboutir à un affrontement violent entre deux blocs ; bilan : 350.000 morts.

De même, certains adversaires de la loi du mariage pour tous, appuient leur argumentation sur l'évidence naturelle qu'un être humain est, soit un homme, soit une femme. Evidence trompeuse : certaines personnes ont les attributs des deux sexes, physiologiquement, ou psychologiquement.

Quant aux tenants du slogan « la France aux Français », eux aussi aiment le brun paradis de la logique binaire, mais la France a une longue histoire et plusieurs frontières, linguistiques, historiques, géographiques, économiques, culturelles...

Exercice 9 : Soient E et F deux espaces métriques, $E \times F$ leur produit, A une partie de E , B une partie de F . Montrer que $\text{Adh}(A \times B) = \text{Adh}(A) \times \text{Adh}(B)$, $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$,

$$\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr } A \times \text{Adh}(B)) \cup (\text{Adh}(A) \times \text{Fr } B).$$

Montrer que $A \times B$ est ouvert de $E \times F \Leftrightarrow A$ est un ouvert de E et B un ouvert de F .

$A \times B$ est fermé de $E \times F \Leftrightarrow A$ est un fermé de E et B un fermé de F .

B.3.3. Classification des points adhérents.

Soit A une partie de E . Il y a deux sortes de points adhérents à A , les points isolés et les points d'accumulation :

— Un point $x \in A$ est dit **isolé** s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$, autrement dit si les seules suites de points de A tendant vers x sont les suites stationnaires.

— Dans le cas contraire, x est dit **point d'accumulation**. Cela signifie que tout voisinage V de x rencontre A en un point $\neq x$, ou encore qu'il existe une suite de points de A tendant vers x par valeurs distinctes.

Tout point isolé appartient nécessairement à A . En revanche, un point d'accumulation peut appartenir ou ne pas appartenir à A .

Un ensemble fermé sans point isolé est dit **parfait**²². Ainsi l'ensemble triadique de Cantor est parfait (cf. H.1). Moi aussi.

Exercice 10 : On nomme **ensemble dérivé** de A l'ensemble A' de ses points d'accumulation. Démontrer que A' est fermé.

Exercice 11 : Dans \mathbf{R} , pour chacun des ensembles $A = \{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbf{N}^* \}$, $B = \{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} ; m, n \in \mathbf{N}^* \}$,

$C = \{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} ; m, n, p \in \mathbf{N}^* \}$ et $D = \{ (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})^{m+n} ; m, n \in \mathbf{N}^* \}$.

Déterminer leurs points adhérents, leurs points isolés, leurs points d'accumulation.

Exercice 12 : Soient $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ et $g(x) = x+1$. Pour toute partie A de \mathbf{R} , on pose $T(A) =$

$\bigcup_{n \geq 0} (g^n \circ f)(A)$. On définit la suite $A_0 = \mathbf{N}$, $A_{k+1} = T(A_k)$. Montrer que les ensembles A_k sont bien ordonnés.

Trouver leur adhérence, leurs points d'accumulation. Décrire $\bigcup_{k \geq 0} A_k$.

B.3.4. Parties denses.

Définition 10 : Une partie A de E est dite **dense**, ou **partout dense**, si $\text{Adh}(A) = E$.²³

La densité a deux caractérisations bien différentes ; selon les cas on choisira l'une ou l'autre :

— par les suites : A est dense ssi tout point de E est limite d'une suite de points de A ;

— par les ouverts (ou les boules) : A est dense ssi tout ouvert non vide (resp. toute boule ouverte) rencontre A .

Exemples :

²² Concept et terminologie dus à **Cantor** (1884). Cantor a également introduit en 1880 la notion d'*ensemble dérivé* : $D(A) = A'$ est l'ensemble des points d'accumulation de A . En répétant cette opération, il forme la suite des ensembles dérivés successifs de A . Si aucun de ces ensembles n'est vide, A est dit *de seconde espèce*; on peut alors considérer $D^\infty(A) = \bigcap D^n(A)$, et recommencer : $D^{\infty+1}(A) = D(D^\infty(A))$, etc... jusqu'à $D^{2^\infty}(A)$, etc. En approfondissant la signification de ces symboles transfinis, Cantor a été conduit à construire l'ensemble des ordinaux dénombrables, et le raisonnement par récurrence transfinie (1882).

²³ Terminologie due à Cantor (1879), mais le concept avait été dégagé par P. Du Bois Reymond, qui nommait *système pantachique* un ensemble de réels dense dans tout intervalle, et *système apantachique* un ensemble non dense dans tout intervalle.

1) A est dense dans \mathbf{R} ssi $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2 (\exists x \in A) a < x < b$. Il en résulte que \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} , et $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ aussi. L'anneau $D = \mathbf{Z}[\frac{1}{10}]$ des nombres décimaux²⁴ est dense dans \mathbf{R} . Idem pour les nombres dyadiques $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$, etc.

2) \mathbf{R} est dense dans $\overline{\mathbf{R}}$, \mathbf{C} est dense dans $\tilde{\mathbf{C}}$.

3) Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , $\text{Gl}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbf{K})$.

- ouvert, comme image réciproque de \mathbf{K}^* par l'application déterminant, qui est continue.
- dense, car si A est non inversible, $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} (A - \frac{1}{k} I)$; or, A n'ayant qu'un nombre fini de valeurs propres, $A - \frac{1}{k} I$ est inversible pour k assez grand.

Application : $A.B$ et $B.A$ ont même polynôme caractéristique.

Exercice 13 : Montrer que les matrices ayant n valeurs propres distinctes forment un ouvert dense de $M_n(\mathbf{C})$.

Exercice 14 : Montrer qu'une partie A est dense ssi son complémentaire est d'intérieur vide.

Exercice 15 : Montrer que l'intersection de deux ouverts denses de E est un ouvert dense, que l'intersection d'un ouvert dense et d'une partie dense est dense. Que peut-on dire de l'intersection de deux parties denses ?

Exercice 16 : Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dim. finie. Montrer que E n'est pas réunion d'une famille finie d'hyperplans. (Ind.: deux approches possibles, l'une topologique, l'autre algébrique).

Exercice 17 : Généralisation. Si A et B sont deux parties de E , on dit que A est dense relativement à B si $B \subset A$. Montrer que $[A \text{ dense relat. à } B \text{ et } B \text{ dense relat. à } C] \Rightarrow A \text{ dense relat. à } C$.

B.3.5. Application : classification topologique des sous-groupes additifs de \mathbf{R} .

Théorème 11 : Tout sous-groupe additif de \mathbf{R} est, soit dense, soit monogène ; dans ce dernier cas, il est fermé et topologiquement discret.

Schéma de la preuve : Soit G un sous-groupe additif de \mathbf{R} . Supposons $G \neq \{0\}$.

Alors $G_+^* \equiv G \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$. Soit $\alpha = \inf G_+^*$. On a alors l'alternative :

- Soit $\alpha > 0$, et alors on montre que $\alpha \in G$, puis que $G = \mathbf{Z}.\alpha$.
 $\alpha \notin G$ impliquerait $\exists (u, v) \alpha < u < v < 2\alpha$, et alors $v - u \in G \cap]0, \alpha[$; impossible.
Donc $\alpha \in G$ et $\alpha.\mathbf{Z} \subset G$. Réciproquement $\forall x \in G \exists (n, z) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{R} x = n.\alpha + z, 0 \leq z < \alpha$.
Cela implique $z = 0$, donc $G \subset \alpha.\mathbf{Z}$.

- Soit $\alpha = 0$, et alors on montre que G est dense dans \mathbf{R} .

1^{ère} idée : $\forall \varepsilon > 0 \exists z \in G \ 0 < z < \varepsilon$. Soit alors $a < b$. Je dis qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $a < n.z < b$.

2^{ème} idée : Il existe une suite (ε_n) d'éléments de G telle que $(\varepsilon_n) \downarrow 0$. Montrer que, pour tout réel x , la suite $([\frac{x}{\varepsilon_n}].\varepsilon_n)$ tend vers x .

Applications :

1) $\mathbf{Q}, \mathbf{Z}[\frac{1}{10}] = \{\text{décimaux}\}, \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \{\text{dyadiques}\}$, n'étant pas des groupes additifs monogènes, sont denses dans \mathbf{R} .

2) Soit $\omega \in \mathbf{R}, G = \{a + b.\omega ; a, b \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe. On a l'alternative suivante :

²⁴ « Suivrez-vous Rrose Sélavy au pays des nombres décimaux où il n'y a ni décombres ni maux? », demande Robert Desnos dans Corps et biens.

si ω est rationnel, G est monogène ; s'il est irrationnel, G est dense.

3) Une fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est dite **périodique** si le groupe additif de ses périodes :

$$\Gamma = \{ t \in \mathbf{R} ; (\forall x) f(x+t) = f(x) \} \quad \text{n'est pas réduit à } \{0\}.$$

Ce groupe n'est pas toujours monogène (penser à $1_{\mathbf{Q}}$, dont le groupe des périodes est \mathbf{Q}). Mais s'il l'est, son générateur $T > 0$ est appelé **période fondamentale** de f . Toute fonction continue non constante est dans ce cas.

4) Dédurre du th.11 une classification des sous-groupes multiplicatifs de \mathbf{R}_{+}^{*} .

B.4. Sous-espaces d'un espace métrique.

Ce paragraphe, anodin en apparence, est important et difficile. Commençons par un exemple.

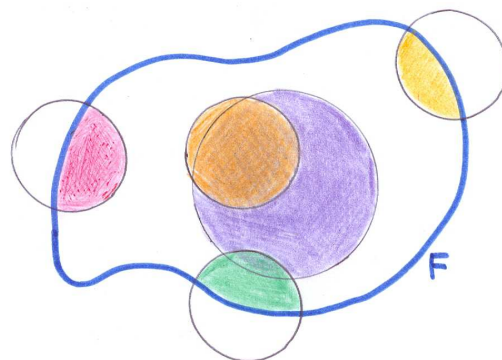
Soit F l'intervalle $[0, 1[$ de \mathbf{R} . Muni de la distance $(x, y) \rightarrow |x - y|$, F est un espace métrique. A ce titre, F est un ouvert et un fermé de F ; l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$ est un ouvert de F puisque c'est la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$; son complémentaire $[\frac{1}{2}, 1[$ est un fermé de F ²⁵. Cependant, ni F ni $[0, \frac{1}{2}[$ ne sont des ouverts de \mathbf{R} , ni F ni $[\frac{1}{2}, 1[$ ne sont des fermés de \mathbf{R} .

Définition 11 : Soit (E, d) un espace métrique, F une partie de E . La restriction à $F \times F$ de la distance d est une distance sur F , notée d_F .

(F, d_F) est appelé **sous-espace métrique** de E .

Proposition 11 : i) Soit a un point de F . Les boules, ouvertes ou fermées, les sphères de centre a et de rayon r dans F sont les traces sur F des boules et des sphères de centre a et de rayon r dans E .

ii) Les ouverts de F , resp. les fermés de F , les voisinages de x dans F , sont les traces sur F des ouverts de E , resp. des fermés de E , des voisinages de x dans E .



Preuve : i) est laissé au lecteur. ii) Soit U un ouvert de E . Montrons que $U \cap F$ est un ouvert de F .

Soit $x \in U \cap F \exists r > 0 \ B(x, r) \subset U$. Alors $B_F(x, r) = B(x, r) \cap F \subset U \cap F$.

Réciproquement, soit V un ouvert de F . Pour tout $x \in V \exists r(x) > 0 \ B_F(x, r(x)) \subset V$.

On a donc $B(x, r(x)) \cap F \subset V$. Posons $U = \bigcup_{x \in V} B(x, r(x))$. U est un ouvert de E comme réunion de

boules ouvertes, et $U \cap F = V$. Ainsi, V est la trace sur F d'un ouvert de E .

Soit maintenant A un fermé de F . $F - A$ est un ouvert de F ; il s'écrit donc $F - A = U \cap F$, où U est un ouvert de E . Par suite, $A = (E - U) \cap F$, donc A est la trace sur F du fermé $A' = E - U$ de E .

Réciproquement, soit A' un fermé de E ; $A = A' \cap F$ a pour complémentaire dans F l'ensemble $(E - A') \cap F$, qui est un ouvert de F .

La troisième assertion s'en déduit.

Conséquence : Soit $A \subset F \subset E$. A peut être ouverte (ou fermée) dans F sans l'être dans E , et vice versa. Autrement dit **une partie n'est pas ouverte (ou fermée) en soi**. Pour éviter les erreurs qui pourraient résulter de ces confusions, on parlera d'**ouverts et fermés relatifs** (à F), et on reviendra à la définition et à la proposition précédente chaque fois que nécessaire.

Exemples :

1) Soient $E = \mathbf{R}$, $F = [0, 1[\cup \{2\} \cup [3, 4]$; $[0, 1[$, $\{2\}$ et $[3, 4]$ sont des ouverts et fermés de F .
Autre exemple : \mathbf{Q} est ouvert et fermé de \mathbf{Q} , mais n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbf{R} !

²⁵ Cela se voit aussi via les suites, avec un peu de soin : si une suite de points de $[\frac{1}{2}, 1[$ tend vers un point a de E , alors $a \in [\frac{1}{2}, 1[$.

2) Soient E le plan euclidien, D une droite de E , A et B deux points distincts de D . L'intervalle $]A, B[$ est ouvert dans D , non dans E . Le segment $[A, B]$ est fermé à la fois dans D et dans E .

Exercice : Soit $A \subset F \subset E$. Montrer que l'adhérence de A dans F est la trace sur F de l'adhérence de A dans E : $\text{Adh}_F(A) = \text{Adh}(A) \cap F$. En est-il de même pour l'intérieur de A ?

Exercice : Soient E le plan euclidien, D une droite de E , A un intervalle de D . Quel est l'intérieur de A dans D ? dans E ?

B.5. Topologie d'un espace semi-métrique.

Soit (E, d) un espace semi-métrique. On définit comme en B.1, B.2 et B.3 les notions d'ouverts, de voisinages et suites convergentes et de fermés. Beaucoup de propriétés restent vraies. Mentionnons seulement les principales différences, laissant les autres à des cours de topologie générale :

— Dans un espace métrique, deux points distincts x et y peuvent être séparés par des ouverts disjoints, par exemple $B(x, d(x, y)/2)$ et $B(y, d(x, y)/2)$. Dans un espace semi-métrique, tout ouvert contenant x contient les points y tels que $d(x, y) = 0$.

— Dans un espace métrique, l'intersection des voisinages de x se réduit à $\{x\}$. Dans un semi-métrique, elle se réduit à $B'(x, 0) = \{y ; d(x, y) = 0\}$.

— Dans un espace métrique, une suite convergente a une limite unique. Dans un semi-métrique, si (x_n) converge vers x , elle converge vers tout y tel que $d(x, y) = 0$. Cette perte de l'unicité de la limite n'est pas dramatique.

C. Limites et continuité

C.1. Limite d'une fonction en un point.

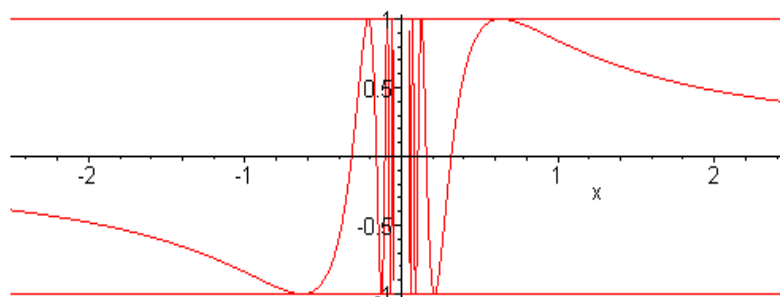
Voici le cadre que nous retiendrons ici : (E, d) et (E', d') sont deux espaces métriques, A une partie de E , $a \in \overline{A}$, et f une application : $A \rightarrow E'$. Rappelons que tout voisinage de a dans E rencontre A .

C.1.1. Fonctions localement bornées.

Définition 1 : f est dite **localement bornée** au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V \cap A}$ soit bornée, i.e. $\text{diam } f(V \cap A) < +\infty$.

Proposition 1 : Les fonctions de A dans \mathbf{R} bornées au $V(a)$ forment une sous-algèbre de $\mathfrak{F}(A, \mathbf{R})$.

Exemples : La fonction $\sin \frac{1}{x}$ est définie sur \mathbf{R}^* , localement bornée au $V(0)$, et même bornée ; la fonction $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$ ne l'est pas.



C.1.2. Limites.

« Comprends-tu ce que c'est maintenant de se sentir toujours
« sur la limite » ? Il me manquera toujours un point. »

André Gide, *Les Faux-Monnayeurs* (Pléiade, p.1162)

Définition 2 : On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a en restant dans A , ou que L est limite de f en a par rapport à A , et l'on note $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = L$ ²⁶, si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (LI) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall x \in A) \quad d(x, a) < \eta \Rightarrow d(f(x), L) < \varepsilon$
- (LII) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall x \in A) \quad d(x, a) \leq \eta \Rightarrow d(f(x), L) \leq \varepsilon$
- (LIII) $(\forall V \in \mathcal{O}(L)) (\exists U \in \mathcal{O}(a)) (\forall x \in U \cap A) \quad f(x) \in V$
- (LIV) $(\forall V \in \mathcal{O}(L)) (\exists U \in \mathcal{O}(a)) \quad f(U \cap A) \subset V$
- (LV) $(\forall V \in \mathcal{O}(L)) (\exists U \in \mathcal{O}(a)) \quad U \cap A \subset f^{-1}(V)$
- (LVI) Pour toute suite (x_n) de points de A tendant vers a , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

Proposition 2 : Il y a unicité de la limite, lorsqu'elle existe.

Proposition 3 : Toute fonction ayant une limite en a est bornée au $V(a)$.

Proposition 4 (« théorème de la limite monotone ») :

Soit $I = (a, b)$ ($a < b$) un intervalle de \mathbf{R} , borné ou non, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante.

i) f a une limite à gauche et à droite en tout point $x \in]a, b[$:

$$\lim_{y \rightarrow x-0} f(y) = \sup_{y \in I \cap]-\infty, x[} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x+0} f(y) = \inf_{y \in I \cap]x, +\infty[} f(y).$$

ii) Si f est majorée, f a une limite en $b-0$: $\lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$.

Si f est non majorée (ce qui suppose $b \notin I$), f tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow b$: $\lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x) = +\infty$.

iii) Résultats analogues en a .

Autrement dit, si l'on considère f comme fonction de I dans $\overline{\mathbf{R}}$, $\lim_{x \rightarrow b, x < b} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$.

Exemples : Soit I un intervalle de \mathbf{R} non trivial, a un point de I . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est dite :

- dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe ; on la note $f'(a)$.
- dérivable à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe ; on la note $f'_d(a)$.
- dérivable à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe ; on la note $f'_g(a)$.

Limites en $\pm\infty$. Ici $E = \overline{\mathbf{R}}$, $A = \mathbf{R}$, etc.

Exercice : La fonction de Peano $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ est-elle bornée ? A-t-elle une limite en $(0, 0)$?

C.1.3. Qu'est-ce qu'une propriété locale ?

On peut donner de cette notion une définition mathématique précise : deux fonctions f et g définies dans des voisinages resp. U et V de a ont même **germe** au $V(a)$ s'il existe un voisinage $W \subset U \cap V$ de a tel que $f|_W = g|_W$.

C'est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies au $V(a)$. Une propriété locale en a est une propriété qui ne dépend que de la classe d'équivalence de f , de son germe.

²⁶ La notation \lim fut introduite en 1786 par Simon L'Huilier (1750-1840), dans un mémoire sur l'infini mathématique primé par l'Académie de Berlin. Cependant chez L'Huilier la notion de limite reste encore très imprécise (cf. E.U. Thesaurus, Notion de limite).

En particulier, deux suites (u_n) et (v_n) ont mêmes propriétés asymptotiques si elles coïncident à partir d'un certain rang.²⁷

Le fait pour une fonction d'être localement bornée, d'avoir une limite, une valeur d'adhérence, d'être continue en a , le cas échéant dérivable, sont des propriétés locales. Pour une suite (u_n) , être bornée, converger, converger en moyenne de Cesàro, avoir une valeur d'adhérence, sont des propriétés locales. Les développements limités et asymptotiques sont un calcul algébrique sur les propriétés locales.

Passer du local au global est un des grands problèmes de l'analyse, que l'on rencontre, sous des formes variées, dans de nombreux domaines. Le théorème des accroissements finis en est un très bel exemple, puisque d'une majoration de la dérivée (accroissement infinitésimal, ou vitesse instantanée) $|f'(x)| \leq M$, il déduit une majoration de l'accroissement de f sur un segment :

$$|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|.$$

C.2. Fonctions continues.²⁸

C.2.1. Continuité en un point.

Définition 3 : Soient E et E' deux espaces métriques. L'application $f : E \rightarrow E'$ est dite **continue en a** si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(C I) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) \leq \varepsilon ;$

(C II) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon ;$

(C III) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a), \forall x \in E, x \in U \Rightarrow f(x) \in V ;$

(C IV) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a) ;$

(C V) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) ;$

(C VI) Pour toute suite (x_n) de points de E tendant vers a , $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Exemples :

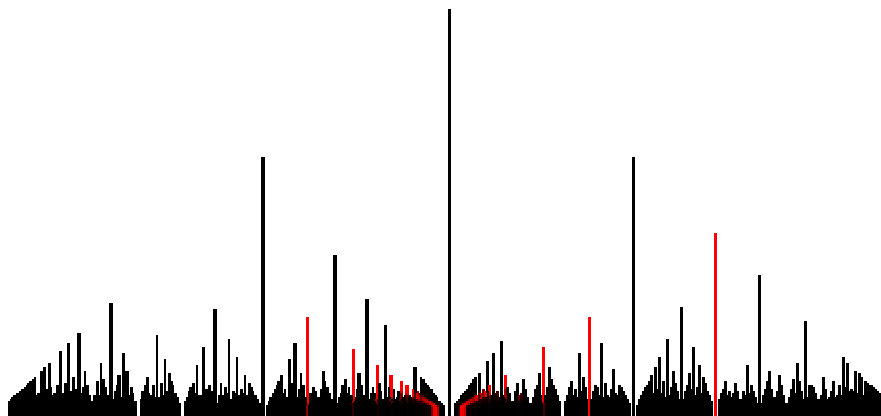
1) Fonction de Dirichlet. Soit $f = 1_{\mathbf{Q}}$ la fonction caractéristique de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} . En quels points est-elle continue ? Plus généralement, soit A une partie d'un espace métrique ; en quels points sa fonction indicatrice 1_A est-elle continue ?

2) Fonction de Thomae (1875)²⁹. Soit f la fonction qui au rationnel $r = \frac{p}{q}$ (forme réduite) associe $f(r) = \frac{1}{q}$, et nulle ailleurs. En quels points est-elle continue ? discontinue ?

²⁷ « Qu'est-ce que l'élément infinitésimal? C'est la grandeur décroissante jusqu'à s'évanouir, et prise au moment où elle s'évanouit, car avant, ce serait trop tôt, et après ce serait trop tard. C'est la grandeur prise au moment où, cessant d'être quelque chose, elle n'est pas encore rien du tout, c'est-à-dire au moment où elle participe à la féconde identité de l'être et du néant. » Ce qu'écrit Hegel de l'infinitésimal fournit aussi une bonne approche des notions de propriété locale, d'« aussi petit qu'on veut », de germe. Ce dernier mot a été introduit en mathématiques par **Charles Ehresmann** (1905-1979). « Tous ces mondes, toutes ces grandeurs, visibles à l'œil ici ou ailleurs, tiennent dans l'amplitude d'une poignée d'espace, je tends le bras ma paume à moitié fermée les contient, / Contient leur origine à tous, leur virtualité, leurs germes. », écrit Walt Whitman, tandis que Victor Segalen note : « Bondir sur le Germe, dès qu'il est né, le secouer et l'étirer, le serrer et l'écraser pour connaître s'il est, ou non, digne de la densité des Mots. ».

²⁸ Le mot *continu* est emprunté au vocabulaire usuel : « qui n'est pas interrompu dans le temps, qui est sans lacune, composé de parties non séparées », dit le Robert. Ajoutons que la *puissance du continu* désigne tout ensemble en bijection avec la droite réelle, et qu'une *solution de continuité* désigne une discontinuité, une interruption de la continuité : « Il n'y avait même plus solution de continuité à cet interminable réseau des mares, des étangs et des lacs. » (Jules Verne, *Michel Strogoff*). Enfin, *continu* s'oppose aussi à *discret* : \mathbf{N} et \mathbf{Z} sont des ensembles discrets (cf. l'article Continu et discret de l'E.U.).

²⁹ **Carl Johannes Thomae** (1840-1921), mathématicien allemand.



Fonction de Thomae

3) Soit $f: (x, y) \in \mathbf{R}^2 \rightarrow f(x, y) \in \mathbf{R}$ une fonction numérique de deux variables. \mathbf{R}^2 est ici muni de la topologie définie par l'une des trois normes usuelles. Pour que f soit continue au point (a, b) , il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, |x - a| \leq \alpha \text{ et } |y - b| \leq \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| \leq \varepsilon,$$

ou encore que, pour tout couple de suites $(x_n), (y_n)$, tendant *indépendamment* vers a et b , on ait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = f(a, b).$$

Ainsi, la fonction de Peano déjà rencontrée, définie sur \mathbf{R}^2 par $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, et

$f(0, 0) = 0$, est *séparément continue* en x et en y , ce qui signifie que chacune des fonctions $f(x, \bullet)$ et $f(\bullet, y)$ est continue, mais elle est *discontinue* en $(0, 0)$.

Proposition 4 : Soient $(E, d), (E', d'), (E'', d'')$ trois espaces métriques, A une partie de $E, a \in A$, $f: A \rightarrow E'$ une application ayant une limite b quand x tend vers a en restant dans A , et g une application $E' \rightarrow E''$ continue en b .

Alors $g \circ f$ a une limite quand x tend vers a en restant dans A :

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)).$$

Preuve : Le mieux est de passer par les suites.

Corollaire : Soit $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ et $g: (E', d') \rightarrow (E'', d'')$. Si f est continue en a et g continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Proposition 5 : L'ensemble des fonctions $E \rightarrow \mathbf{R}$ continues en a est une sous-algèbre de $\mathfrak{F}(E, \mathbf{R})$ pour les lois usuelles. Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est définie au $V(a)$ et continue en ce point. Enfin, si f et g sont continues en a , $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues en a .

Remarque : Lorsque f est définie sur un intervalle I , et a un point intérieur de I , on distingue les notions de fonctions continues à droite et à gauche en a .

• f est dite **continue à droite** en a si $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

• f est dite **continue à gauche** en a si $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

Naturellement, f est continue en a ssi elle est continue à droite et à gauche en a .

Plus généralement, revenant à un espace métrique, si a est adhérent à la fois à A et à B , et si

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \lim_{x \rightarrow a, x \in B} f(x),$$

alors $\lim_{x \rightarrow a, x \in A \cup B} f(x)$ existe et est égale à cette valeur commune.

C.2.2. Continuité globale.

Définition 4 : L'application $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ est dite **continue** si elle est continue en tout point.

Exemples :

1) Pour tout x , la fonction $y \rightarrow d(x, y)$ est continue de E dans \mathbf{R} .

- 2) La fonction $(x, y) \rightarrow d(x, y)$ est continue $E \times E \rightarrow \mathbf{R}$.
 3) Pour toute partie A de E , la fonction $x \rightarrow d(x, A)$ est continue de E dans \mathbf{R} .

Proposition 6 : Une composée de fonctions continues est continue.

Autrement dit, les espaces métriques sont les objets d'une catégorie, dont les morphismes sont les applications continues.

Proposition 7 : L'ensemble $C(E, \mathbf{R})$ des fonctions numériques continues sur E est une algèbre pour les lois usuelles. Si f est continue à valeurs $\neq 0$, $1/f$ aussi. Enfin, si f et g sont continues, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ aussi.

Théorème 8 (Hausdorff) : Soit f une application $(E, d) \rightarrow (E', d')$. Les propriétés suivantes sont équivalentes : i) f est continue ;

ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de E' est un ouvert de E ;

iii) L'image réciproque par f de tout fermé de F' est un fermé de F ;

iv) Pour toute partie A de E , $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Preuve : i) \Rightarrow ii) Soit U' un ouvert de E' . Montrons que $U = f^{-1}(U')$ est un ouvert de E .

Soit $x \in U$; on a $f(x) \in U'$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset U'$.

Par continuité de f en x , il existe $\alpha > 0$ tel que $d(x, y) < \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Autrement dit, $y \in B(x, \alpha) \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \Rightarrow y \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \Rightarrow y \in U'$. cqfd.

ii) \Rightarrow i) Soient x un point de E , et $\varepsilon > 0$; $U' = B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de E' .

Son image réciproque par f est un ouvert de E , contenant x .

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset f^{-1}(U') = f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$.

Ainsi, $\forall y \in E$ $d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$; f est donc continue en x .

ii) \Leftrightarrow iii) en vertu d'une propriété tout à fait générale des images réciproques : l'image réciproque du complémentaire d'une partie est le complémentaire de son image réciproque.

L'équivalence de iv) et des autres propriétés est laissée en exercice.

Remarque : Les images *directes* d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue ne sont pas ouvertes ou fermées, en général, comme le montrent des exemples simples :

- 1) La fonction $x \rightarrow x^2$ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} est continue ; l'image de l'ouvert \mathbf{R} n'est pas ouverte.
- 2) La fonction $x \rightarrow \text{Arctan } x$ de \mathbf{R} dans \mathbf{R} est continue ; l'image du fermé \mathbf{R} n'est pas fermée.

Exercice 1 : Soient E et F deux espaces métriques, $f: E \rightarrow F$, $\Gamma = \{ (x, f(x)) ; x \in E \}$ son graphe.

Démontrer, que si f est continue, Γ est un fermé de $E \times F$, la réciproque étant fausse.

Exercice 2 : Pour toute partie A de E , on appelle **épaississements**³⁰ ouvert et fermé de A de rayon $r \geq 0$ les ensembles respectifs : $U(A, r) = \{ x \in E ; d(x, A) < r \}$ et $V(A, r) = \{ x \in E ; d(x, A) \leq r \}$ (cette notion jouera un rôle-clé dans la partie H).

1) Démontrer que $U(A, r)$ est un ouvert de E , et que $U(A, r) = \bigcup_{y \in A} B(y, r)$.

2) Démontrer que $V(A, r)$ est un fermé de E ; reconnaître $\bigcap_{r>0} V(A, r)$.

Démontrer que $V(A, r)$ contient $\bigcup_{y \in A} B'(y, r)$, mais que cet ensemble n'est pas toujours fermé.

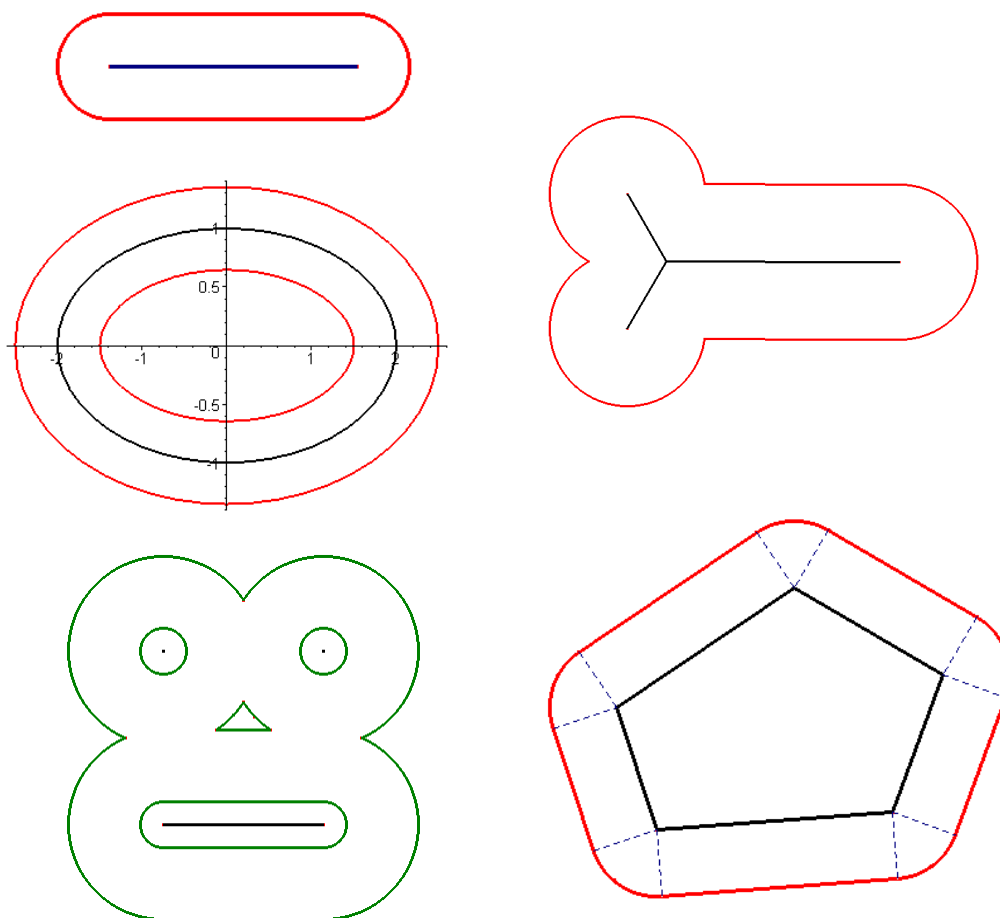
Démontrer que si A est compact, ou un fermé dans \mathbf{R}^n , alors $V(A, r) = \bigcup_{y \in A} B'(y, r)$.

3) Démontrer que $U(A, r) = U(\overline{A}, r)$ et $V(A, r) = V(\overline{A}, r)$.

³⁰ B. Mandelbrot les nomme plaisamment « **saucisses de Minkowski** » ouverte et fermée, car, lorsque A est une courbe plane, ces ensembles ont une forme de saucisse.

4) Exemples :

- i) Si $A = B'(a, s)$ dans un espace *normé*, reconnaître $V(A, r)$;
 - ii) Dans le plan euclidien, dessiner l'épaississement d'un segment, de la réunion des trois segments joignant O à $A(3, 0)$, $B(-1/2, \sqrt{3}/2)$ et $C(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, d'un polygone convexe, d'un cercle ou d'un disque circulaire, d'une ellipse ou d'un disque elliptique, de la spirale d'Archimède d'équation polaire $r = a\theta$.
 - iii) Si A est la Norvège, dessiner $V(A, r)$ pour différentes valeurs de r.
- 5) Démontrer que tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts (ou " \mathfrak{G}_δ "), et tout ouvert est réunion dénombrable de fermés (ou " \mathfrak{F}_σ ").



Exemples d'épaississements ou « saucisses de Minkowski »³¹

Exercice 3 : Soient E et F deux espaces métriques. Une application $f: E \rightarrow F$ est dite **ouverte** si l'image directe par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.

- 1) Démontrer que f est ouverte ssi, pour tout $x \in E$ et tout voisinage V de x, $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$.
- 2) Démontrer que la composée de deux applications ouvertes est ouverte.
- 3) Démontrer que l'application $z \in \mathbb{C} \rightarrow |z| \in \mathbb{R}^+$ est continue et ouverte.

³¹ « Un cours de maths qui ne fait pas rire les élèves est un cours mal enseigné » (Albert Jacquard). Attention l'épaississement d'une ellipse est formé de deux ovales qui ne sont pas des ellipses, mais des toroïdes. Ah ! ne pas oublier de soigner les toroïdes sous l'abîme. Le clown vert est la différence de deux épaississements, en hommage à Marcel Berger (*Géométrie*, 9..11.2.)

4) Si Ω est un ouvert de \mathbb{C} , et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante, f est ouverte.

C.3. Homéomorphismes.

Définition 5 : Un **homéomorphisme** $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ est une bijection continue ainsi que sa réciproque (on dit aussi : bijection **bicontinue**). Deux espaces métriques sont dits **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre ³².

Proposition 9 : Une bijection $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ est un homéomorphisme ssi l'image directe et l'image réciproque par f d'un ouvert sont des ouverts.

Remarque : un homéomorphisme est une bijection continue ouverte.

Proposition 10 : Le composé de deux homéomorphismes, la bijection réciproque d'un homéomorphisme en est un.

Corollaire : Les homéomorphismes de (E, d) dans (E, d) forment un groupe pour la composition.

Toute isométrie est un homéomorphisme. La réciproque est fausse : un homéomorphisme est beaucoup moins rigide qu'une isométrie : ainsi, la fonction $x \rightarrow x^3$ est un homéomorphisme de \mathbb{R} sans être une isométrie.

Photographie de Jean Goursat

Par « *propriétés, ou notions, topologiques* » on entend les propriétés invariantes par homéomorphisme. Deux espaces homéomorphes ont les mêmes propriétés "topologiques", en ce sens que : $(\forall A \subset E) \quad f(\text{Int } A) = \text{Int } f(A)$, $f(\text{Adh } A) = \text{Adh } f(A)$, $f(\text{Fr } A) = \text{Fr } f(A)$, etc.

La compacité, la connexité par arcs, sont des propriétés topologiques, car un espace métrique homéomorphe à un espace compact, resp. connexe par arcs, l'est encore.

En revanche, le fait d'être borné, ou complet, ne sont pas des notions topologiques : un espace homéomorphe à un espace borné, resp. complet, ne l'est pas toujours.

Rappelons le théorème suivant, relatif aux homéomorphismes entre intervalles de \mathbb{R} , qui découle en partie du théorème des valeurs intermédiaires (cf. F.2).

Théorème d'inversion des fonctions monotones.

i) Soient I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction continue strictement monotone $I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $J = f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert ou fermé), et f induit un homéomorphisme $I \rightarrow J$.

ii) Si I est un intervalle de \mathbb{R} , les parties de \mathbb{R} homéomorphes à I sont les intervalles de même nature.

iii) Si I est un intervalle de \mathbb{R} , toute injection continue $I \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone.

Remarque 1 : Hormis le cas précédent, il n'est guère facile de démontrer qu'une application est un homéomorphisme. On dispose pour cela de différents outils :

- des arguments de compacité et d'unicité de valeurs d'adhérence (cf. E.1, ex 2 suivant la prop 2)
- le théorème d'inversion de Banach (relatif aux espaces de Banach, cf. chap. EVN § 11)
- tout C^1 -difféomorphisme d'un ouvert U d'un evn de dim finie sur un ouvert V , est un homéomorphisme. Or on dispose d'outils puissants pour montrer qu'une application est un C^1 -difféomorphisme : le théorème d'inversion globale du calcul différentiel.
- certaines applications sont des homéomorphismes en tant que perturbées de C^1 -difféomorphismes ; cela s'établit par des méthodes de point fixe (cf. D.3., ex 6, et pb d'ENSAE).



³² Un homéomorphisme malade se soigne à l'homéopathie ; un homéomorphisme amoureux aime Juliette..

Remarque 2 : 1) Une bijection continue $E \rightarrow E'$ n'est pas toujours un homéomorphisme. Ainsi :
 — $\text{id}_{\mathbf{R}}$ est continue de \mathbf{R} muni de la distance *discrète* dans \mathbf{R} muni de la distance *usuelle*, mais non bicontinue.

— soient $E = [0, 1[\cup [2, 3]$, $E' = [0, 2]$, $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$, $f(x) = x-1$ si $x \in [2, 3]$; que dire de f ?

2) Il y a cependant des cas où l'on peut affirmer qu'une bijection continue est un homéomorphisme : cf. E.3. corollaire du th. 8 et théorème d'inversion de Banach.

Exercice 1 : Soient E et F deux espaces métriques, $f: E \rightarrow F$ une application continue, de graphe $\Gamma = \{(x, f(x)) ; x \in E\}$. Montrer que E et Γ sont homéomorphes.

Exercice 2 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, de boule unité ouverte B .

Montrer que $x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ est un homéomorphisme de E sur B .

Exercice 3 : Montrer que $A \mapsto A^{-1}$ est un homéomorphisme de $\text{GL}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} .

Exercice 4 : Il existe des espaces métriques non homéomorphes E et E' , tels qu'il existe une bijection continue de E sur E' et une bijection continue de E' sur E .

Pour tout n , soit $A_n =]3n, 3n+1[\cup \{3n+2\}$, $E = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ et $E' = E \cup \{1\} - \{2\}$.

On définit $f: E \rightarrow E'$ par $f(x) = x$ si $x \neq 2$, $f(2) = 1$,

et $g: E' \rightarrow E$ par $g(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in]0, 1]$, $g(x) = \frac{x}{2} - 1$ si $x \in]3, 4[$, $g(x) = x - 3$ sinon.

Établir que f et g sont des bijections continues et que cependant E et E' ne sont pas homéomorphes.

Exercice 5 : Trouver les sous-groupes finis du groupe H des homéomorphismes de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

[Indication : on montrera que leur ordre est 1 ou 2.]

C.4. Applications uniformément continues.

«L'erreur n'a rien d'étrange. C'est le premier état de toute connaissance.»

Alain

Le concept de fonction uniformément continue s'est dégagé progressivement de celui de fonction continue, avec lequel il fut d'abord confondu. Dans sa tentative pour démontrer l'intégrabilité d'une fonction continue sur un segment, Cauchy admet implicitement qu'elle est uniformément continue, et conclut. Le maillon manquant de la preuve ne fut complété qu'en 1872 par Heine (cf. E.4)

Définition 6 : L'application $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ est dite **uniformément continue** si :

(UC) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) \forall (x, y) \in E \times E \quad d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$

Proposition 11 : La composée de deux applications uniformément continues est unif. continue.

Autrement dit les espaces métriques sont les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les applications uniformément continues.

Proposition 12 : Toute application uniformément continue est continue. La réciproque est fautive en général. (cf. toutefois le théorème de Heine en E.4).

Exemples et contre-exemples :

1) Une application $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ est dite **lipschitzienne** de rapport $k > 0$ si :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad d'(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y).$$

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. Exemples :

— si A est une partie non vide de E , $d(\cdot, A) : x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne, donc u.c.

En particulier les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto d(x, \mathbf{Z})$.

— les fonctions sinus, cosinus, arctan et th sont 1-lipschitziennes $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Plus généralement, si f est dérivable $I \rightarrow \mathbf{R}$ (I intervalle de \mathbf{R}), alors $(\forall x \in I) |f'(x)| \leq k \Leftrightarrow f$ est k -lipschitzienne.

C'est une conséquence du théorème des accroissements finis.

— ceci vaut aussi pour les fonctions de plusieurs variables : si U est un ouvert convexe de \mathbf{R}^n et $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $(\forall x \in U) \|f'(x)\| \leq k$, alors f est k -lipschitzienne.

2) La fonction $x \rightarrow x^2$ est continue $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mais non uniformément continue.

3) La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, mais non lipschitzienne.

Exercice 1 : Sur quelles parties simples de \mathbf{R}^*_+ , le logarithme est-il uniformément continu ?

Exercice 2 : Soit I un intervalle de \mathbf{R} , f une fonction convexe de I dans \mathbf{R} . Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ inclus dans l'intérieur de I .

Exercice 3 : Donner des exemples de fonctions continues bornées non uniformément continues.

Exercice 4 : 1) Soit $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ uniformément continue. Montrer $\exists a, b > 0 \quad \forall x \geq 0 \quad |f(x)| \leq ax + b$.

Conséquence géométrique ? Généraliser à $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Applications : a) La fonction $x \rightarrow x \ln x$ est-elle uniformément continue sur \mathbf{R}^+ ?

b) Quand un polynôme est-il uniformément continu sur \mathbf{R} ?

2) Plus généralement, soient E et F deux espaces vectoriels normés, $f: E \rightarrow F$ uniformément continue. Démontrer que $\exists a, b > 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq a \|x\| + b$.

Exercice 5 : Soit $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$. Pour que f ne soit pas uniformément continue, il faut et il suffit qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) de points de E telles que $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ et $d'(f(x_n), f(y_n))$ ne tende pas vers 0.

Exercice 6 : Soit A une partie de E . Montrer que parmi les fonctions k -lipschitziennes de E dans \mathbf{R} , nulles sur A , il y en a une plus grande et une plus petite (pour l'ordre usuel).

Exercice 7 : Montrer que la composée de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Soient (E, d) un espace métrique, F un espace normé. Démontrer que l'ensemble $\text{Lip}(E, F)$ des fonctions lipschitziennes de E dans F est un espace vectoriel.

Exercice 8 : La fonction $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$ est dite höldérienne d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe $k > 0$ telle que $\forall (x, y) \in E \times E \quad d'(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)^\alpha$.

Si $\alpha = 1$, on retrouve les fonctions lipschitziennes. Soient E et F des evn, U un ouvert convexe de E . Démontrer qu'une fonction $f: U \rightarrow F$ höldérienne d'ordre $\alpha > 1$ est constante (utiliser un peu de calcul différentiel).

Exercice 9 : Soit $f: (E, d) \rightarrow (E', d')$. On appelle module d'uniforme continuité de f la fonction

$\omega_f: \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $\omega_f(\delta) = \sup \{ d'(f(x), f(y)) ; d(x, y) \leq \delta \}$.

1) Démontrer que f est bornée $\Leftrightarrow \omega_f$ est bornée ; que ω_f est toujours croissante, et que :

$\omega_f(\delta) \downarrow 0$ quand $\delta \downarrow 0 \Leftrightarrow f$ est uniformément continue.

2) On suppose que E est un intervalle de \mathbf{R} . Établir que : $\forall s, t \geq 0 \quad \omega_f(s+t) \leq \omega_f(s) + \omega_f(t)$.

En déduire que f est uniformément continue $\Leftrightarrow \omega_f$ est continue sur \mathbf{R} .

C.5. Comparaison des distances.

Définition 7 : Les distances d et d' sur le même ensemble E sont dites **topologiquement équivalentes** si id_E est un homéomorphisme $(E, d) \rightarrow (E, d')$.

Il revient au même de dire que (E, d) et (E, d') ont les mêmes ouverts, ou les mêmes fermés, les mêmes suites convergentes, que pour tout point x , les voisinages de x sont les mêmes pour l'une et

l'autre distance, ou encore que toute boule ouverte de centre x pour l'une des distances contient une boule ouverte de centre x pour l'autre. Bref, (E, d) et (E, d') ont même topologie sous-jacente.

Proposition 13 : Soit (E, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) d est topologiquement équivalente à la distance discrète ;
- ii) Toute partie de E est ouverte ;
- iii) Toute partie de E est ouverte et fermée ;
- iv) Tout point de E est isolé ;
- v) Les seules suites convergentes dans E sont les suites stationnaires.

Nous dirons alors que (E, d) est **topologiquement discret**.

Exemples : • \mathbf{Z} , muni de la distance induite par celle de \mathbf{R} , est topologiquement discret (et complet).

• $A = \{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbf{N}^* \}$ de même (mais non complet).

• \mathbf{Q} n'est pas topologiquement discret.

Définition 8 : Les distances d et d' sont dites **équivalentes** si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha.d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta.d(x, y).$$

Exemples :

1) Munissons l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n\}$ de la distance discrète d' et de la distance usuelle d . Ces deux distances sont équivalentes, car $\forall (x, y) \in E^2 \quad d'(x, y) \leq |x - y| \leq n.d'(x, y)$.

2) Plus généralement, dans un ensemble fini, toutes les distances sont équivalentes. Il suffit de démontrer qu'elles sont équivalentes à la distance discrète. Il n'y a donc qu'une topologie « usuelle », la topologie discrète.

3) Soient (E', d') et (E'', d'') deux espaces métriques, $E = E' \times E''$ leur produit, $x = (x', x'')$ et $y = (y', y'')$ deux éléments de E .

$d_\infty(x, y) = \max(d'(x', y'), d''(x'', y''))$, $d_1(x, y) = d'(x', y') + d''(x'', y'')$, $d_2(x, y) = \sqrt{d'(x', y')^2 + d''(x'', y'')^2}$ sont trois distances équivalentes sur E .

Proposition 14 : i) L'équivalence topologique et l'équivalence sont des relations d'équivalence dans l'ensemble des distances.

ii) L'équivalence implique l'équivalence topologique, mais la réciproque est fausse en général.

Exercice 1 : Montrer que $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ est une distance sur \mathbf{R} , topologiquement équivalente, mais non équivalente, à la distance usuelle.

Exercice 2 : Sur le cercle unité du plan euclidien, montrer que les distances cordale et géodésique sont équivalentes.

Exercice 3 : Soit (E, d) un espace métrique, $\varphi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que :

$\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $\varphi(s + t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$. Montrer que $\varphi \circ d$ est une distance sur E .

En déduire que $\ln(1 + d)$ et d^α ($0 < \alpha \leq 1$) sont des distances sur E .

Montrer que $d' = \frac{d}{1+d}$ et $d'' = \inf(d, 1)$ sont des distances bornées et topologiquement équivalentes à d . En particulier, tout espace métrique est homéomorphe à un espace métrique borné.

Exemples et contre-exemples :

- 1) Sur \mathbf{K}^n les trois normes usuelles sont équivalentes, donc topologiquement équivalentes.
- 2) Sur \mathbf{R} , la distance usuelle et la distance discrète ne sont pas topologiquement équivalentes.
- 3) Sur \mathbf{R} , la distance usuelle et la distance induite par celle de $\overline{\mathbf{R}}$ sont topologiquement équivalentes, mais non équivalentes.
- 4) Idem pour la distance usuelle de \mathbf{C} et la distance induite par celle de $\tilde{\mathbf{C}}$.

C.6. Théorèmes élémentaires de prolongement.

Proposition 15 (principe de prolongement des identités). Si deux applications continues f et $g : (E, d) \rightarrow (E', d')$ coïncident sur une partie A dense de E , elles sont égales.

Preuve : Soient A une partie de E , x un point de E adhérent à A , (x_n) une suite de points de A tendants vers x . Si $f|_A = g|_A$, alors $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout n . A la limite, $f(x) = g(x)$. Ainsi, f et g coïncident sur \overline{A} .

Ce principe est l'analogie topologique de l'énoncé d'algèbre linéaire (resp. de théorie des groupes) : si deux applications linéaires (resp. deux homomorphismes de groupes) coïncident sur une partie génératrice, elles sont égales. En fait, chaque théorie a le sien³³.

Applications :

1) Équation de Cauchy : Soit f une fonction $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Si f est continue, elle est de la forme $f(x) = a.x$.

Exercice : Montrer que ce résultat reste vrai si f est monotone, ou majorée sur un intervalle d'intérieur non vide, ou intégrable-Riemann sur un segment.

2) Que dire d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continue sur l'intervalle I de \mathbf{R} , et telle que

$$\forall (x, y) \in I \times I \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad , \quad \text{resp.} \quad \forall (x, y) \in I \times I \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad ?$$

3) Soit $\text{com}(A)$ la comatrice d'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$, ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}). Montrer l'identité :

$$\text{com}(A.B) = \text{com}(A).\text{com}(B).$$

Il suffit de vérifier cette identité pour des matrices inversibles, et de conclure par densité du groupe linéaire et continuité des deux membres.

4) Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n à coeff. dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} , $A.B$ et $B.A$ ont même polynôme caractéristique.

Prolongement par continuité :

Il découle de la prop. 15 que si A est une partie dense de E , et $f : A \rightarrow (E', d')$ une fonction continue, f admet au plus un prolongement continu à (E, d) tout entier. Mais il n'en admet pas toujours un. Ainsi $f : x \rightarrow 1/x$ est continue sur \mathbf{R}^* mais ne se prolonge pas continûment à l'adhérence \mathbf{R} . Toutefois :

Théorème 16 : Soient E et E' deux espaces métriques, A une partie dense de E , f une fonction continue $A \rightarrow E'$. Pour que l'on puisse prolonger f en une fonction continue $g : E \rightarrow E'$, il faut et il suffit que, pour tout $a \in E$, $\lim_{y \rightarrow a, y \in A} f(y) = L$ existe. La fonction g est alors unique. C'est le **prolongement par continuité** de f .

Preuve : L'unicité de g découle de la prop 15. Définissons $g : E \rightarrow E'$ par $g(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$.

Si $x \in A$, l'existence de la limite implique que $g(x) = f(x)$: g prolonge f . Reste à voir que g est continue.

Soit $x \in E$, V' un voisinage de $g(x)$ dans E' ; il existe une boule fermée B' de centre $g(x)$ contenue dans V' . Il existe un voisinage ouvert V de x dans E tel que $f(V \cap A) \subset B'$.

Pour tout $y \in V$, $g(y) = \lim_{z \rightarrow y, z \in A} f(z)$ appartient à $\overline{f(V \cap A)} \subset \overline{B'} = B' \subset V'$. cqfd.

Applications : 1) Ce résultat permet de prolonger par continuité en 0 les fonctions :

$$\frac{\sin x}{x} \quad , \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{\cos x - 1}{x^2} \quad , \quad \frac{x}{\exp(x) - 1} \quad , \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \quad , \quad \frac{\tan x}{x} \quad , \quad \cotan x - \frac{1}{x} \quad , \quad \text{etc.}$$

³³ Ainsi, le « principe de continuité » de Poncelet consiste à déduire certaines propriétés géométriques mettant en jeu des tangentes, des droites parallèles, etc. de propriétés relatives à des cordes ou des droites sécantes, par passage à la limite. Il s'agit au fond d'un raisonnement par densité dans l'espace projectif réel ou complexe.

[En réalité ces fonctions sont toutes développables en série au $V(0)$].

2) De même, les homographies propres $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ sont prolongeables par continuité à \tilde{C} , en des homéomorphismes.

Un autre théorème de prolongement sera vu en D.4.

Exercice : Soit $n \rightarrow r_n$ une bijection de \mathbf{N} sur $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$. Montrer que $f(x) = \sum_{n: r_n < x} \frac{1}{2^n}$ est une fonction

définie sur $[0, 1]$, bornée, croissante, continue en tout irrationnel, et discontinue en tout rationnel.

Soit $B = [0, 1] - \mathbf{Q}$. Montrer que $g = f|_B$ est continue ; peut-on la prolonger continûment sur $[0, 1]$?

C.7. Théorème de prolongement de Tietze-Urysohn.

Ce § est hors programme. Aussi le présentons-nous sous forme de problèmes. Commençons par énoncer une propriété de séparation renforçant l'axiome (D1) :

Exercice 1 : Soient (E, d) un espace métrique, F_1 et F_2 deux fermés disjoints de E .

i) Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 , contenant resp. F_1 et F_2 .

ii) Montrer qu'il existe une fonction continue $h : (E, d) \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$F_1 = \{ x \in E ; h(x) = 1 \} \quad \text{et} \quad F_2 = \{ x \in E ; h(x) = 0 \}.$$

[Indication : On pourra considérer $f(x) = d(x, F_2) - d(x, F_1)$ et $h(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$.]

Problème 2 : Théorème de Tietze-Urysohn ³⁴ :

Soient (E, d) un espace métrique, A un fermé $\neq \emptyset$ de E , f une fonction continue $A \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$).

On se propose de montrer qu'il existe g continue $E \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}}$) prolongeant f .

On peut même imposer à g de vérifier : $\sup_E g(x) = \sup_A f(x)$ et $\inf_E g(x) = \inf_A f(x)$.

1) On suppose d'abord f à valeurs dans $[1, 2]$, et l'on considère la fonction $g : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A ; \quad g(x) = \inf \left\{ f(y) \frac{d(x, y)}{d(x, A)} ; y \in A \right\} \text{ si } x \notin A.$$

a) Vérifier que g est définie sur E , et prolonge f .

b) Démontrer que g est continue sur E (étudier successivement les cas $x \in \overset{\circ}{A}$, $E - A$, et $\text{Fr } A$).

2) Démontrer le théorème de Tietze-Urysohn.

3) Application (Hewitt) : Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) (E, d) est compact ;

ii) Toute fonction continue $E \rightarrow \mathbf{R}$ est bornée ;

iii) Toute fonction continue $E \rightarrow \mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

[Pour établir $\text{iii}) \Rightarrow \text{i})$, considérer une suite (x_n) sans valeur d'adhérence, et utiliser T.U.]

Problème 3 : Prolongement des fonctions lipschitziennes.

Soient (E, d) un espace métrique, A une partie $\neq \emptyset$ de E , f une fonction k -lipschitzienne $A \rightarrow \mathbf{R}$.

Pour tout $a \in A$ et tout $x \in E$ on pose $f_a(x) = f(a) + k.d(a, x)$, puis $g(x) = \inf \{ f_a(x) ; a \in A \}$.

³⁴ **Pavel Samuilovitch Urysohn** (1898-1924), brillant étudiant de l'université de Moscou, fit des travaux fondamentaux en topologie générale et algébrique. Il mourut projeté par une vague sur les rochers, à Batz-sur-Mer, au cours d'un voyage avec Alexandroff, l'un des premiers autorisés en Allemagne et en France après la Révolution d'octobre. Alexandroff développa la topologie algébrique, et fit d'autres voyages à Göttingen dans les années 20. L'autrichien **Heinrich Tietze** (1880-1964) fit ses études à Vienne, Munich et Göttingen, et fut professeur à Brno, Erlangen et Munich. Il définit la notion d'espace normal en 1923, dont l'importance fut reconnue à la suite des travaux d'Urysohn.

Montrer que g est une fonction de E dans \mathbf{R} , prolongeant f , et k -lipschitzienne.

C.8. Valeurs d'adhérence d'une suite, d'une fonction.

La notion de valeur d'adhérence d'une suite ou d'une fonction permet de faire une étude fine des suites divergentes, et des fonctions n'ayant pas de limite en un point.

C.8.1. Valeurs d'adhérence d'une suite.

Définition 9 : Soit (x_n) une suite de points de (E, d) . On dit que a est une **valeur d'adhérence** de (x_n) si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes :

- (VA I) $(\forall \varepsilon > 0) (\forall n_0) (\exists n > n_0) d(x_n, a) < \varepsilon$;
- (VA II) $(\forall V \in \mathcal{V}(a)) \{ n \in \mathbf{N} ; x_n \in V \}$ est une partie infinie de \mathbf{N} ;
- (VA III) Il existe une suite extraite de (x_n) tendant vers a .

Remarque 1 : On se gardera de confondre les notions de valeur d'adhérence d'une suite, de point adhérent à l'ensemble des points de la suite, et de point d'accumulation de cet ensemble.

Il suffit de considérer la suite $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{6}, \dots)$.

Proposition 17 : Soit (x_n) une suite de points de (E, d) , A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \text{Adh} \{ x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \}. \text{ En particulier, } A \text{ est fermé.}$$

Preuve : Notons $F_n = \text{Adh} \{ x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \}$.

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n \Leftrightarrow \forall n \forall \varepsilon > 0 \exists p \geq n d(x, x_p) \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \text{ est une valeur d'adhérence de la suite } (x_n).$$

Exercice : Lemme de la fosse à serpents.³⁵

- 1) Établir que, pour que a ne soit pas valeur d'adhérence de la suite (x_n) , il faut et il suffit qu'il existe une boule ouverte de centre a ne contenant aucun x_n à partir d'un certain rang.
- 2) Retrouver le fait que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de (x_n) est fermé.
- 3) Soit (x_n) une suite numérique telle que $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle de \mathbf{R} ou de $\bar{\mathbf{R}}$.

C.8.2. Valeurs d'adhérence d'une fonction en un point.

Définition 10 : Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $A \subset E, f: A \rightarrow E', x \in A$. On dit que $a \in E'$ est une **valeur d'adhérence** de $f(y)$ lorsque y tend vers x en restant dans A s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (VAI) Pour tout voisinage V de a , a est adhérent à $f(A \cap V)$;
- (VAII) Il existe une suite (x_n) de points de A tendant vers x , telle que $\lim f(x_n) = a$.

Exercice : Soit $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Quelles sont ses valeurs d'adhérence au voisinage de 0 ?

Remarque : si f est à valeurs réelles, on définit comme pour les suites, les notions suivantes :

- $\limsup_{y \in A, y \rightarrow x} f(y)$ plus grande valeur d'adhérence de f au $V(x)$;
- $\liminf_{y \in A, y \rightarrow x} f(y)$ plus petite valeur d'adhérence de f au $V(x)$.

Ainsi, si I est un intervalle de \mathbf{R} et $x \in \text{Int}(I), f: I \rightarrow \mathbf{R}$, on peut définir :

- les plus grandes et plus petites valeurs d'adhérence de f à droite et à gauche de f en x ;

³⁵ Ainsi dénommé par Alain Genestier, qui fut l'un de mes plus brillants élèves, dans une de ses copies.

– si f est continue en x , les plus grandes et plus petites valeurs d'adhérences de $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ à droite et à gauche ; ce sont les quatre nombres dérivés de f au $V(x)$ (Du Bois-Reymond, Dini).

Proposition 18 : L'ensemble des valeurs d'adhérence de f lorsque x tend vers x_0 en restant dans A , est un fermé de E' .

D. Espaces métriques complets

« La complétude est capitale. »

Stephen Spender

Contrairement à la droite rationnelle, la droite numérique est « complète », en ce sens que toute suite de Cauchy converge. Un espace métrique est dit complet s'il possède cette propriété.

D.1. Suites de Cauchy, espaces complets.

Définition 1 : Soit (E, d) un espace métrique. Une **suite de Cauchy** est une suite (x_n) vérifiant :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0) \quad (\forall p, q \geq n_0) \quad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

Propriétés générales des suites de Cauchy :

- 1) Toute suite de Cauchy est bornée.
- 2) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
- 3) Soit (x_n) une suite de Cauchy. Si une suite extraite de (x_n) converge, toute la suite converge.
- 4) L'image d'une suite de Cauchy par une fonction uniformément continue est une suite de Cauchy.
- 5) Deux distances équivalentes ont les mêmes suites de Cauchy.

Définition 2 : Un espace métrique (E, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy est convergente. Un espace vectoriel normé complet est aussi appelé **espace de Banach**.³⁶

Exemples :

- 1) \mathbf{R} est complet, \mathbf{C} aussi, pour leurs distances usuelles.
- 2) \mathbf{Q} n'est pas complet pour la distance induite par celle de \mathbf{R} .
- 3) Tout espace métrique compact est complet (cf. E). En particulier $\overline{\mathbf{R}}$, etc.
- 4) Tout espace métrique muni de la distance discrète est complet. En revanche, le sous-espace de \mathbf{R} , $A = \{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbf{N}^* \}$, n'est pas complet, quoique topologiquement discret. Il résulte de cet exemple qu'un espace métrique homéomorphe à un espace complet n'est pas toujours complet. En d'autres termes, la notion d'espace complet n'est pas topologique (mais "uniforme", cf. Bourbaki, T.G.II). Voici un autre exemple :

Exercice 1 : Démontrer que $\Delta(x, y) = | \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y |$ est une distance sur \mathbf{R} , topologiquement équivalente à la distance usuelle, et que la suite (n) est de Cauchy pour cette distance. Conclusion ?

Théorème 1 : critère de Cauchy géométrique. (E, d) est complet si et seulement si :

(CG) Pour toute suite (F_n) décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0, $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

³⁶ Le terme *espace de Banach* est dû à Fréchet, en hommage à **Stefan Banach** (1892-1945) qui fut entre les deux guerres l'un des chefs de file des mathématiques polonaises. Il développa la théorie des espaces vectoriels normés et l'analyse fonctionnelle. Se promenant un jour à Varsovie, Laurent Schwartz voulut se rendre à la place Banach. Hélas, l'autobus était *complet*...

Preuve : Supposons E complet, et montrons (CG). Choisissons un point x_n dans chaque F_n . La suite (x_n) est de Cauchy : pourquoi ? Elle converge donc vers un point a . Ce point a est limite de la suite $(x_n)_{n \geq m}$, donc adhérent à F_m , et ce, pour tout m . Donc a appartient à F_m , donc à $\bigcap F_m$.

Supposons (CG) satisfaite. Soit (x_n) une suite de Cauchy. $F_m = \text{Adh}\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}$ est une suite décroissante de fermées dont le diamètre tend vers 0. Par suite, $\bigcap F_m \neq \emptyset$, et est réduite à un point $\{a\}$. Montrer que (x_n) tend vers a .

Autre solution : pasticher la preuve en 3 lemmes de la complétude de \mathbf{R} (chap. droite numérique, § 8), l'axiome (CG) généralisant l'axiome des segments emboîtés.

Application : Soit E un plan euclidien, $A_0A_1A_2$ un triangle de E . On définit la suite (A_n) par A_{n+3} isobarycentre de $A_nA_{n+1}A_{n+2}$. Montrer que la suite (A_n) converge ; quelle est sa limite ?

[Indication : On peut considérer la suite F_n des plaques triangulaires $A_nA_{n+1}A_{n+2}$, mais on peut aussi montrer directement que la suite (A_n) est de Cauchy, ou que la série de terme général $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ est absolument convergente.]

Théorème 2 : critère de Cauchy fonctionnel. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $f: A \rightarrow E'$. Si E' est complet, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $f(x)$ a une limite quand x tend vers a en restant dans A ;
- ii) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) \forall (x, y) \in A^2 [d(x, a) \leq \eta \text{ et } d(y, a) \leq \eta] \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

Preuve : i) \Rightarrow ii) est facile à démontrer, et vrai sans hypothèse sur E' .

Par hypothèse, si L est la limite de f en a ,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) \forall x \in A \quad d(x, a) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x), L) \leq \varepsilon/2.$$

Du coup, $\forall (x, y) \in A^2 [d(x, a) \leq \eta \text{ et } d(y, a) \leq \eta] \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), L) + d'(L, f(y)) \leq \varepsilon$.

ii) \Rightarrow i) Soit (x_n) une suite de points de A tendant vers a . On a $d(x_n, a) \leq \eta$ pour $n \geq n_0$, donc $d'(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon$. Donc la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy. Comme E' est complet, cette suite converge.

Si (y_n) est une autre suite de points de A tendant vers a , la suite panachée $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ tend aussi vers a . Il résulte de ce qui précède que la suite $(f(x_0), f(y_0), f(x_1), f(y_1), \dots)$ converge dans E' . Les suites extraites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont même limite. Cette limite λ ne dépend donc que de a , et $f(x)$ a pour limite λ quand x tend vers a en restant dans A .

Exercice 2 : Démontrer que la fonction $F(x) = \int_x^1 \sin \frac{1}{t} dt$ a une limite quand $x \rightarrow 0+$, et que les fonctions $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ et $H(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ont une limite quand $x \rightarrow +\infty$. [Indication : pour la troisième, si $x' \leq x''$, intégrer par parties $H(x'') - H(x')$ et majorer sa valeur absolue].

Proposition 3 : Soit (E, d) un espace métrique, F un sous-espace de E .

- a) Si F est complet, F est fermé dans E .
- b) Si E est complet et si F est fermé dans E , F est complet.

Ainsi, dans un espace métrique complet, les parties complètes sont les parties fermées.

Preuve : a) Soit x un point adhérent à F ; il est limite d'une suite (x_n) de points de F . Cette suite converge dans E , donc est de Cauchy. Comme F est complet, elle converge vers un point a de F . Donc $x = a \in F$.

b) Soit (x_n) une suite de Cauchy de points de F . Elle est de Cauchy dans E complet, donc elle converge dans E , vers un point a . Ce point est adhérent à F fermé, donc appartient à F . cqfd.

Exercice 3 : Démontrer que (E, d) est complet si et seulement si toute suite (x_n) vérifiant $(\forall n) d(x_n, x_{n+1}) \leq 1/2^n$ est convergente.

Exercice 4 : Soit (E, d) un espace *ultramétrique*. Démontrer qu'il est complet si et seulement si toute suite (x_n) vérifiant $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ est convergente.

Application : Soit (a_n) une suite quelconque d'entiers tels que $\forall n \geq 0 \quad 0 \leq a_n \leq p-1$.

Démontrer que la suite $x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$ est une suite de Cauchy dans (\mathbf{Z}, d_p) et dans (\mathbf{Q}, d_p) .

En déduire que ces deux espaces métriques ne sont pas complets.

D.2. Complétion d'un espace métrique.

« Veux-tu me compléter et que je te complète ? »

Edmond Rostand, *Cyrano de Bergerac*

Le théorème suivant généralise la construction de Méray-Cantor de la droite numérique à partir de la droite rationnelle.

Théorème de Hausdorff : Soit (E, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet (\hat{E}, δ) tel que (E, d) soit isométrique à un sous-espace dense de (\hat{E}, δ) . (\hat{E}, δ) est unique à isométrie près. On l'appelle un **complété** de (E, d) .

Etapas de la preuve :

1) Soit C l'ensemble des suites de Cauchy $x = (x_n)$ d'éléments de E . Deux éléments de C , $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ sont dits équivalents si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$. C'est une relation d'équivalence \mathcal{R} dans C . Notons \hat{E} l'ensemble quotient C/\mathcal{R} , et \bar{x} la classe d'équivalence de la suite $x = (x_n)$.

2) Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ sont deux éléments de C .

La suite $(d(x_n, y_n))$ est de Cauchy. En effet, en vertu de l'inégalité du quadrilatère (§ A.1)

$$|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \leq d(y_p, y_q) + d(x_p, x_q), \text{ qui est apqv.}$$

Du coup, la suite $(d(x_n, y_n))$ converge.

Sa limite ne change pas si l'on remplace x et y par des suites x' et y' qui leur sont équivalentes.

Elle ne dépend que des classes \bar{x} et \bar{y} de x et y et se note $\delta(\bar{x}, \bar{y})$. En effet, si x et x' ont même classe, ainsi que y et y' , $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n)$.

A la limite $\lim_n d(x_n, y_n) \leq \lim_n d(x'_n, y'_n)$, puis échanger les rôles.

3) Il est facile de montrer que δ est une distance sur \hat{E} . (D2) va de soi.

(D1) $\delta(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

Le sens \Leftarrow est évident ; le sens \Rightarrow aussi car $\delta(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \lim_n d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow (x_n) \mathcal{R} (y_n)$.

(D3) $\delta(\bar{x}, \bar{z}) \leq \delta(\bar{x}, \bar{y}) + \delta(\bar{y}, \bar{z})$, car $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$, et passer à la limite.

On plonge E dans \hat{E} via l'application qui à a associe la classe $j(a)$ de la suite constante égale à a . Ce plongement est isométrique, en ce sens que $\delta(j(a), j(b)) = d(a, b)$.

4) Montrons que $j(E)$ est dense dans \hat{E} . Soient \bar{x} un élément de \hat{E} , $x = (x_n)$ un représentant de \bar{x} . Montrons que $\delta(\bar{x}, j(x_n)) \rightarrow 0$. En effet, $\delta(\bar{x}, j(x_n)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_p, x_n)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall p, n \geq n_0 \quad d(x_p, x_n) \leq \varepsilon.$$

Fixons n : $\forall n \geq n_0 \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_p, x_n) \leq \varepsilon$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_p, x_n) = 0$,

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(\bar{x}, j(x_n)) = 0$.

5) (\hat{E}, δ) est complet. Soit $(\overline{x_n})$ une suite de Cauchy d'éléments de \hat{E} . Montrons qu'elle converge dans \hat{E} . Par densité de E dans \hat{E} , $(\forall n) \exists y_n \in E \quad \delta(\overline{x_n}, j(y_n)) \leq \frac{1}{n+1}$.

La suite (y_n) est de Cauchy dans (E, d) .

En effet, $d(y_p, y_q) = \delta(j(y_p), j(y_q)) \leq \delta(j(y_p), \overline{x_p}) + \delta(\overline{x_p}, \overline{x_q}) + \delta(\overline{x_q}, j(y_q))$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall p, q \geq n_0 \quad \delta(\overline{x_p}, \overline{x_q}) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$. Alors $p, q \geq n_0 \Rightarrow d(y_p, y_q) \leq 3\varepsilon$

Notons \overline{y} la classe de (y_n) , et montrons que $\overline{x_n} \rightarrow \overline{y}$.

En effet, $\delta(\overline{x_n}, \overline{y}) \leq \delta(\overline{x_n}, j(y_n)) + \delta(j(y_n), \overline{y}) \leq \frac{1}{n+1} + \delta(j(y_n), \overline{y})$, qui tend vers 0.

6) Unicité du complété à isométrie près.

Lemme : Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques complets. Toute isométrie f d'une partie dense A de E sur une partie dense A' de E' se prolonge en une (unique) isométrie f' de E sur E' .

Preuve : Cela découle du théorème de prolongement des fonctions uniformément continues, que l'on verra en D. 4.

Exemples :

1) \mathbf{R} est un complété de \mathbf{Q} pour la distance usuelle.

2) Si p est un nombre premier. Les espaces métriques (\mathbf{Z}, d_p) et (\mathbf{Q}, d_p) ne sont pas complets pour la distance p -adique. Le corps des nombres p -adiques de Hensel \mathbf{Q}_p est un complété de \mathbf{Q} pour la distance p -adique, et l'anneau \mathbf{Z}_p des entiers p -adiques est un complété de \mathbf{Z} pour la même distance (cf. A.3.14. et mon chapitre sur les Nombres p -adiques).

3) Si $I = [a, b]$, l'espace $L^2(I, \mathbf{R})$ des fonctions de carré Lebesgue-intégrable est un complété de $C(I, \mathbf{R})$ pour la norme de la convergence en moyenne quadratique.

Exercice : Soient (E, d) un espace métrique, $\mathfrak{B}(E, \mathbf{R})$ l'espace de Banach des fonctions bornées de E dans \mathbf{R} muni de la norme uniforme, et a un point de E . Pour tout $x \in E$, soit $d_x : y \rightarrow d(x, y)$.

Montrer que la fonction $j : x \rightarrow d_x - d_a$ est une isométrie de E sur une partie de $\mathfrak{B}(E, \mathbf{R})$ (théorème d'Arens-Fells, 1956).

De ce résultat il s'ensuit que la théorie des espaces métriques n'est pas plus générale que celle des parties d'espaces vectoriels normés.

D.3. Théorème de point fixe de Picard-Banach.

1. Un métathéorème ?...

Le théorème de point fixe est l'un des plus importants des mathématiques : il n'est pas exagéré de parler de «*métathéorème*», tant sont nombreuses ses applications pratiques et théoriques. Il fut d'abord utilisé pour des itérations rationnelles ou réelles : l'algorithme dit de Héron d'Alexandrie de calcul approché de la racine carrée, qui remonte aux babyloniens, se rattache à ce résultat. Cependant, ce n'est qu'à la fin du XIX^{ème} siècle que Giuseppe Peano (1888) puis Émile Picard³⁷ eurent l'idée d'utiliser la «*méthode des approximations successives*» dans des *espaces fonctionnels*, en vue de montrer l'existence de solutions d'équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, etc. Mais la *méthode des approximations successives* ne devint *théorème de point fixe*

³⁷ **Émile Picard** (1856 - 1941), gendre de Charles Hermite, fut longtemps secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences. Il appliqua en 1890 la méthode des approximations successives à l'étude des équations intégrales, différentielles et aux dérivées partielles ; il a aussi étudié les fonctions de variable complexe. Il a adopté des positions chauvines pendant la guerre de 14, et a refusé plus tard de recevoir l'allemand Einstein.

qu'avec Stefan Banach et Renato Caccioppoli³⁸ dans des articles publiés respectivement en 1922 et 1930.

L'importance de ce théorème ne se résume pas à la variété de ses applications, elle a des motifs plus philosophiques. De nombreux objets mathématiques peuvent être caractérisés par des propriétés qui en font des points fixes de transformations, et peuvent se construire par la méthode des approximations successives. De plus, ce théorème fournit un modèle simple de dynamique stable, qui peut être utilisé notamment en physique, chimie, biologie, économie, sociologie, etc.³⁹

2. Le théorème de point fixe.

Définition 3 : Soit (E, d) un espace métrique. Une application $f : (E, d) \rightarrow (E, d)$ est dite **contractante** si $\exists k \in]0, 1[\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$.

Une application contractante est donc une application lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Théorème de point fixe de Picard-Banach : Soient (E, d) un espace métrique complet, f une application k -contractante $E \rightarrow E$.

i) f admet un unique point fixe a .

ii) toute suite récurrente $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a , de façon que :

$$(\forall n) \quad d(x_n, a) \leq d(x_0, x_1) \cdot \frac{k^n}{1-k} \quad \text{et} \quad d(x_n, a) \leq k^n d(x_0, a).$$

En termes de systèmes dynamiques, le point a est un *point attractif*, de *bassin d'attraction* E tout entier, autrement dit un *point d'équilibre stable*, et toutes les suites récurrentes convergent vers a à une vitesse géométrique. On dit qu'on a construit la suite (x_n) par la *méthode des approximations successives*.

Preuve : • Unicité du point fixe : si $f(a) = a$ et $f(b) = b$, $d(a, b) \leq k.d(a, b) \Rightarrow a = b$.

• Existence du point fixe : Soit $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour $q < p$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leq (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1}) \cdot d(x_0, x_1) = \frac{k^p - k^q}{1-k} \cdot d(x_0, x_1) \leq \frac{k^p}{1-k} \cdot d(x_0, x_1) \quad (*) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons n_0 tel que $\frac{k^{n_0}}{1-k} \cdot d(x_0, x_1) \leq \varepsilon$. Alors, pour $q > p > n_0$, on a $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

La suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge vers un point a . Comme f est continue, $a = f(a)$. En vertu de l'unicité, ce point a est indépendant de la condition initiale x_0 .

• Vitesse de convergence. L'inégalité $d(x_n, a) \leq d(x_0, x_1) \cdot \frac{k^n}{1-k}$ se déduit de (*) en fixant $p = n$ et

en faisant tendre q vers l'infini. L'inégalité $d(x_n, a) \leq k^n \cdot d(x_0, a)$ se montre par récurrence.

Remarque : Importance des hypothèses.

i) Si E n'est pas complet, le théorème est faux : penser à $f(x) = x/2$ dans $]0, 1[$.

³⁸ Le mathématicien napolitain **Renato Caccioppoli** (1904-1959) fit des travaux remarquables en analyse dans les années 1930, notamment avec P. Schauder. Intellectuel brillant et complet, ce mélomane et cinéphile averti était grand amateur de littérature française, et se lia d'amitié avec André Gide, qui lui rendit visite par deux fois, et écrivit en 1944 deux belles pages sur lui. Il fut emprisonné pour avoir chanté la *Marseillaise* au restaurant, lors d'une entrevue Mussolini-Hitler. Son destin (il s'est suicidé en 1959) a inspiré un film.

³⁹ Voire même en littérature. Si certains écrivains aiment les phrases simples, le trait pur (Stendhal, Flaubert, Julien Green), d'autres utilisent la méthode des approximations successives pour exprimer leur pensée, et cerner leur objet au plus près. Lorsque Marcel Proust, Virginia Woolf ou Nathalie Sarraute cherchent à percer l'implicite des actes ou des discours, leurs phrases progressent en spirale, par retouches et répétitions, vers des sortes d'idées fixes qu'elles n'atteignent jamais.

ii) Si f n'est pas contractante, mais vérifie la condition plus faible $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \neq y$, f n'a pas toujours de point fixe. Penser à $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ dans \mathbf{R} .

Résultats complémentaires (on suppose toujours (E, d) complet) :

1) Théorème de point fixe étendu aux itérés : Si $f : (E, d) \rightarrow (E, d)$ telle qu'une itérée p -ème $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ (p fois) soit k -contractante, pour un $p \geq 1$, alors f a encore un unique point fixe a , et toute suite récurrente $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers a .

Preuve : Le théorème de Picard-Banach s'applique à f^p , qui possède un unique point fixe a .

Comme $f^p(f(a)) = f^p(f(a)) = f(a)$, l'unicité de a implique $f(a) = a$.

De plus $f(x) = x \Rightarrow f^p(x) = x \Rightarrow x = a$; a est donc l'unique point fixe de f .

Soit $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Chacune des suites $(x_{qp+r})_q$ converge vers a . La sous-suite (x_n) de ces p suites tend aussi vers a , à une vitesse géométrique que l'on pourra préciser.

2) Théorème de point fixe avec paramètre : Soient Λ un espace métrique, $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions $E \rightarrow E$ indexée par Λ . On suppose :

i) Il existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ soit k -contractante.

ii) Pour tout $x \in E$, $\lambda \rightarrow f_\lambda(x)$ est continue $\Lambda \rightarrow E$.

Alors, pour chaque λ , f_λ a un unique point fixe $a(\lambda)$ et l'application $\lambda \rightarrow a(\lambda)$ est continue.

Preuve : En vertu du théorème de Picard-Banach, f_λ a un unique point fixe $a(\lambda)$.

$$\begin{aligned} d(a(\mu), a(\lambda)) &= d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\lambda))) \leq d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\mu))) + d(f_\lambda(a(\mu)), f_\lambda(a(\lambda))) \\ &\leq d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\mu))) + k.d(a(\mu), a(\lambda)) \end{aligned}$$

d'où $(1-k).d(a(\mu), a(\lambda)) \leq d(f_\mu(a(\mu)), f_\lambda(a(\mu)))$.

Quand $\lambda \rightarrow \mu$, $f_\lambda(a(\mu)) \rightarrow f_\mu(a(\mu))$ en vertu de ii), donc $a(\lambda) \rightarrow a(\mu)$.

3. Applications du théorème du point fixe.

1) Analyse numérique.

— Résolution approchée d'équations $g(x) = 0$ dans \mathbf{R} ou dans un espace normé, après les avoir ramenées de manière convenable à la forme $x = f(x)$. C'est toujours possible :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + g(x) \equiv f(x) \quad \text{ou encore} \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + \lambda.g(x) \equiv f(x) \quad (\text{pour } \lambda \neq 0).$$

— Résolution approchée de systèmes $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = 0$ dans \mathbf{R}^2 . Mêmes idées.

— Résolution approchée de systèmes linéaires $Ax = b$, après les avoir ramenés de manière convenable à la forme $x = Bx + c$, avec B contractante, i.e. $\|B\| < 1$.

Par exemple $Ax = b \Leftrightarrow x = (I - A).x + b$, ou $Ax = b \Leftrightarrow x = (I - D.A).x + D.b$ ($\forall D \in GL_n(\mathbf{K})$)

Lorsque A est diagonalement dominante, ou symétrique réelle définie positive, on peut toujours choisir D diagonale de manière que $B = I - D.A$ soit contractante.

- Dans le premier cas, il suffit de poser $D = \text{diag}(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}})$.

On vérifiera que $B = I - D.A$ est contractante pour la norme $\|x\|_\infty$.

- Dans le second cas, il suffit de prendre $D = \lambda^{-1}.I$, avec $\lambda > \lambda_1$, plus grande valeur propre de A .

On vérifiera que $B = I - D.A$ est contractante pour la norme $\|x\|_2$.

2) Équations fonctionnelles, intégrales et différentielles.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz peut se démontrer par une méthode de point fixe, en vertu de l'équivalence des propriétés suivantes :

i) y est solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ telle que $y(x_0) = y_0$;

ii) y est continue et telle que $(\forall x) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)).dt$.

y est donc point fixe de la transformation intégrale qui à ϕ associe $T(\phi)(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)).dt$, et sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, les itérées de la fonction constante y_0 par T convergent uniformément vers y dans un « tonneau de sécurité » convenable entourant (x_0, y_0) . De même, de nombreuses équations intégrales (Volterra, Fredholm, etc.) relèvent de la méthode des approximations successives.

3) Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

4) Géométrie fractale. Les courbes de Peano et de nombreuses courbes fractales obéissent à des principes d'autoreproduction qui en font des points fixes (cf. partie H sur la distance de Hausdorff). Il en est de même de certaines dynamiques symboliques (cf. pb ci-dessous).

Exercice 1 : Résoudre les équations $\tan x = x$ dans $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $\cos x = x$, $x.\exp x = 1$.

Exercice 2 : Résoudre les systèmes d'équations :

$$x = \frac{1}{4} \cos(x + y), y = 1 + \frac{1}{4} \operatorname{th}(x - y) \quad ; \quad x = \frac{1}{4} \sin(x + y), y = 1 + \frac{2}{3} \arctan(x - y).$$

Exercice 3 : 1) Montrer que le système d'équations $x = \frac{1}{2} \sin(x + y)$, $y = \frac{1}{2} \cos(x - y)$ admet une solution unique. La calculer à 10^{-2} près.

2) Montrer que pour tout réel t , le système $x = \frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1$, $y = \frac{1}{2} \cos(x - y) - t + \frac{1}{2}$ admet une solution unique $(x(t), y(t))$, fonctions continues de t .

Exercice 4 : Soit ABC un triangle du plan euclidien. Montrer qu'il existe un unique triangle inscrit PQR (P sur la droite BC, Q sur la droite CA, R sur la droite AB) tel que $RP \perp BC$, $PQ \perp CA$ et $QR \perp AB$.

Exercice 5 : Soit $(m_0, M_0) \in \mathbf{R}^2$. Étudier les suites (m_n) et (M_n) définies par :

$$M_{n+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \max(x, m_n).dx \quad \text{et} \quad m_{n+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \min(x, M_n).dx.$$

Exercice 6 : équation de Kepler.

1) Pour tout couple $(a, t) \in [-1, 1] \times \mathbf{R}$, montrer que l'équation $x - a.\sin x = t$ a une unique solution. On la note $x(a, t)$.

2) Montrer que la fonction $(a, t) \rightarrow x(a, t)$ est continue, d'abord sur $] -1, 1[\times \mathbf{R}$, puis sur $[-1, 1] \times \mathbf{R}$. [Indication : ce dernier point utilise un argument de *compacité* vu ci-après.]

Exercice 7 : équation intégrale de Fredholm.

Soient $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbf{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions continues données. Montrer que pour $|\lambda|$ assez petit à préciser, il existe une unique fonction continue $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in [a, b] \quad \phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t). \phi(t).dt = f(x).$$

Exercice 8 : Equations fonctionnelles.

Soient (E, d) un espace métrique complet, g une application contractante $E \rightarrow E$.

Trouver toutes les fonctions continues $g : E \rightarrow E$ telles que $(\forall x \in E) f(x) = f(g(x))$.

Application : Trouver les fonctions continues $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $(\forall x) f(x) = f(a.x + b)$, $|a| < 1$.

Exercice 9 : Soient (E, d) un espace métrique complet, f et g deux applications contractantes $E \rightarrow E$ de rapports k et k' respectifs. On les suppose ε -proches en ce sens que $d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$ ($\forall x \in E$).

Montrer que leurs points fixes respectifs a et b vérifient : $d(a, b) \leq \frac{\varepsilon}{1 - \max(k, k')}$.

Exercice 10 : un résultat de stabilité.

Soient (E, d) un espace métrique complet, (f_n) une suite d'applications k -lipschitziennes $E \rightarrow E$ ($k < 1$), tendant simplement vers f sur E . On définit la suite : $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f_n(x_n)$.

Montrer qu'elle converge vers le point fixe a de f . [Indication : on sera amené à établir que si une suite (d_n) tend vers 0, il en est de même de la suite $\sum_{p=0}^n k^p \cdot d_{n-p}$.]

Exercice 11 : dilatations.

Soit (E, d) un espace métrique complet, $f : E \rightarrow E$ une application continue surjective telle que :

$$\exists k > 1 \quad \forall (x, y) \in E \times E \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Comment se fait-il alors que $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ définie par $f(x) = 2x + 1$ n'ait pas de point fixe ?

Exercice 12 : un théorème de point fixe.

Soient E un espace normé, K un convexe compact, $f : K \rightarrow K$ une application vérifiant : $\forall (x, y) \in K^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Montrer que f possède au moins un point fixe.

[Indication : fixer $w \in K$, et considérer f_n définie sur K par $f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})f(x) + \frac{w}{n}$.]

Exercice 13 : 1) Soient (E, d) un espace métrique complet, $f : E \rightarrow E$ une fonction telle que :

$$\exists k \in]0, \frac{1}{2}[\quad \forall (x, y) \in E \times E \quad d(f(x), f(y)) \leq k \cdot [d(f(x), x) + d(f(y), y)].$$

Montrer que, si f satisfait cette hypothèse, elle admet un point fixe unique.

2) Soient f et $g : E \rightarrow E$ deux fonctions telles que :

$$\exists k \in]0, \frac{1}{2}[\quad \forall (x, y) \in E \times E \quad d(f(x), g(y)) \leq k \cdot [d(f(x), x) + d(g(y), y)].$$

Montrer que f et g admettent un point fixe unique, et que ce point fixe leur est commun.

Exercice 14 : un critère d'homéomorphisme.

Soient E un espace vectoriel normé complet, et $f : E \rightarrow E$ une application contractante. Montrer que $g : x \rightarrow x + f(x)$ est un homéomorphisme.

Problème 15 : algorithme de gradient à pas constant.

Soit E un espace euclidien, A un endomorphisme défini positif, $b \in E$.

On se propose de minimiser $J(x) = \frac{1}{2}(Ax \mid x) + (b \mid x)$ dans le convexe fermé U de E .

1) Montrer que J est C^∞ ; gradient, hessienne ?

Montrer que J est strictement convexe et coercive, i.e. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$.

2) Montrer que J atteint son minimum en un point unique $\xi \in U$.

3) On considère l'algorithme suivant, où $\rho > 0$: $x_0 \in U$, $x_{k+1} = P(x_k - \rho \cdot (A \cdot x_k - b))$, où P est la projection convexe sur U . Montrer que, pour $0 < \rho < \rho_0$, où ρ_0 est une valeur-seuil à déterminer, la suite (x_k) converge vers ξ .

Problème 16 : Dynamiques symboliques.

Soit $E = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \geq 0}$ à éléments dans $\{0, 1\}$. Pour $(u, v) \in E^2$, on note $k(u, v) = \min\{n ; u_n \neq v_n\}$ si $u \neq v$ et $k(u, v) = +\infty$ sinon, et $d(u, v) = 2^{-k(u, v)}$.

1) Montrer que (E, d) est un espace *ultramétrique* (c'est-à-dire vérifiant (D1), (D2) et $d(u, w) \leq \max(d(u, v), d(v, w))$). Décrire les boules et sphères de centre a , les suites convergentes.

2) Démontrer que (E, d) est complet (et même compact).

3) Mot de Fibonacci.

a) Soit $\Phi : E \rightarrow E$ l'application qui, à une suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$, associe la suite obtenue en remplaçant 1 par 0 et 0 par 01. Ainsi $u = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$ devient $\Phi(u) = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)$.

b) Montrer que $\forall (u, v) \in E^2 \quad d(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \frac{d(u, v)}{2}$; Φ est-elle injective ? quelle est son image ?

c) Montrer qu'il existe une unique suite a telle que $a = \Phi(a)$ (mot infini de Fibonacci). Indiquer comment l'obtenir.

4) Suite du dragon. Dans cette question, les suites sont indexées par \mathbb{N}^* .

a) On considère la suite $s = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. A toute suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$, on associe la suite panachée $v = s * u = (0, u_1, 1, u_2, 0, u_3, 1, u_4, \dots)$. Que dire de l'opérateur $\Delta : u \rightarrow s * u$?

b) Montrer qu'il existe une unique suite $a = (a_n)_{n \geq 1}$ telle que $a = \Delta(a)$; calculer a_{12} et a_{13} .

c) Soit $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ l'application échangeant 0 et 1.

Montrer que $a_n = f^m(0)$ si $n = 2^p(2m + 1)$. En déduire que $a_n = 0$ si le 1 le plus à droite de la décomposition binaire de n est précédé d'un 0, $a_n = 1$ sinon. Vérification avec a_{12} et a_{13} .

5) Suite de Kovalovski. Dans cette question, les suites sont indexées par \mathbb{N}^* et à valeurs dans $\{1, 2\}$. A toute suite $u = (u_n)_{n \geq 1}$, on associe la suite $v = Ku$ obtenue en remplaçant 11 par 12, 12 par 122, 21 par 112 et 22 par 1122. Propriétés de l'opérateur K ? Convergence vers le point fixe.

Exercice 17 : généralisation du théorème de Picard-Banach.

Soient (E, d) un espace métrique complet, $f : E \rightarrow E$ une application telle que, pour tout k, f^k soit q_k -lipschitzienne, avec $\sum_{k=1}^{+\infty} q_k < +\infty$. Montrer que f admet un unique point fixe a , et que toute suite récurrente $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a , de façon que :

$$(\forall n) \quad d(x_n, a) \leq d(x_0, x_1) \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} q_k \quad \text{et} \quad d(x_n, a) \leq q_n \cdot d(x_0, a).$$

N-B : Cet énoncé est bien adapté aux équations différentielles et intégrales (de Volterra par ex.).

D.4. Prolongement des applications uniformément continues.

Théorème 8 : Soient (E, d) un espace métrique, A une partie de E , (E', d') un espace métrique complet. Toute application uniformément continue f de A dans E' se prolonge de manière unique en une application continue $g : \overline{A} \rightarrow E'$. De plus g est uniformément continue.

Preuve : Supposons le problème résolu. Si g existe, tout point x de \overline{A} est limite d'une suite (x_n) de points de A , et $g(x) = \lim g(x_n) = \lim f(x_n)$. Voilà pour l'unicité de g !

Par hypothèse, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) \quad \forall (u, v) \in A \times A \quad d(u, v) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(u), f(v)) \leq \varepsilon$.

- Soit $x \in \overline{A}$, et (x_n) une suite de points de A tendant vers x .

On a : $\exists n_0 \quad \forall p, q \geq n_0 \quad d(x_p, x_q) \leq \alpha$. Du coup, $d'(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon$.

La suite $(f(x_n))$ est de Cauchy. Comme E' est complet, elle converge dans E' .

- La limite de cette suite est indépendante de la suite (x_n) choisie, car, si (y_n) est une autre suite de points de \overline{A} tendant vers x , la suite panachée $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ tend aussi vers x . Il résulte de ce qui précède que la suite $(f(x_0), f(y_0), f(x_1), f(y_1), \dots)$ converge dans E' . Les suites extraites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont même limite. Cette limite ne dépend donc que de x : notons-la $g(x)$.

- g prolonge f , car si $x \in A$, il n'y a qu'à considérer la suite constante égale à x .

- Montrons que g est uniformément continue. Soit $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{A}$ tel que $d(x, y) \leq \alpha/3$.

Si (x_n) et (y_n) sont des suites de points de \overline{A} tend vers x et y resp., il est sûr que $d(x_n, y_n) \leq \alpha$ à partir d'un certain rang. Par suite, $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. Faisant tendre n vers l'infini, $d(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. Cqfd.

Remarques :

- 1) On peut aussi déduire ce théorème du théorème de prolongement par continuité (§ C.6.)
- 2) Sous les mêmes hypothèses, si f est de plus k -lipschitzienne, g est aussi k -lipschitzienne.

Applications :

1) Soit f une application uniformément continue $I =]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, où I est un intervalle ouvert borné de \mathbf{R} . Alors f a des limites en $a+$ et $b-$.

Cet argument est utile dans l'étude d'équations différentielles obéissant au théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, si $f(x, y)$ est une fonction continue en (x, y) , localement lipschitzienne en y et bornée : $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ a ses solutions définies sur \mathbf{R} . En effet, si l'intervalle maximal $I = (a, b)$ correspondant aux conditions initiales (x_0, y_0) était majoré, alors, $y'(x)$ étant bornée, $y(x)$ serait lipschitzienne, donc uniformément continue, donc $y(x)$ aurait une limite β en $b-$, et en réappliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz au couple (b, β) , on pourrait prolonger $y(x)$ à gauche de b , contredisant la maximalité de b . Idem en a .

2) Le théorème implique l'unicité à isométrie près du complété d'un espace métrique.

3) Le théorème s'applique aussi dans le cadre abstrait des théories élémentaires de l'intégration. Soient $I = [a, b]$ un segment, E l'espace de Banach $E = \mathcal{B}(I, \mathbf{R})$ des fonctions bornées sur I muni de la norme uniforme, $A = \text{Esc}(I, \mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel des fonctions en escaliers. L'application

$\mu : \phi \in \text{Esc}(I, \mathbf{R}) \rightarrow \int_a^b \phi(x).dx$ est une forme linéaire continue, donc uniformément continue.

En vertu du théorème ci-dessus, elle se prolonge de manière unique à l'adhérence de $\text{Esc}(I, \mathbf{R})$ dans $\mathcal{B}(I, \mathbf{R})$, c'est-à-dire à l'espace des fonctions **réglées**, en une forme linéaire continue, appelée encore l'intégrale des fonctions réglées (ou intégrale de Cauchy-Dini).

D.5. Théorème d'Osgood-Baire.

Le théorème suivant permet d'étudier les propriétés topologiques fines des espaces complets.

Théorème d'Osgood-Baire⁴⁰ (1899) : Soit (E, d) un espace métrique complet.

- i) L'intersection d'une suite (U_n) d'ouverts denses de E est une partie dense de E .
- ii) La réunion d'une suite (F_n) de fermés d'intérieur vide de E est d'intérieur vide.

Preuve : Soit Ω un ouvert non vide de E . Il s'agit de montrer que $\Omega \cap (\cap U_n) \neq \emptyset$.

L'idée est de construire par récurrence une suite (B_n) d'ouverts $\neq \emptyset$ vérifiant :

$$B_0 \subset \Omega, \quad \overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap U_{n-1}, \quad \text{et} \quad \text{diam } \overline{B_n} \downarrow 0; \quad \text{puis de considérer } \cap \overline{B_n}.$$

$B_0 \cap U_0$ est non vide, comme intersection d'un ouvert non vide avec une partie dense, et c'est un ouvert, comme intersection de deux ouverts.

Si a est un point de $B_0 \cap U_0$, il existe une boule ouverte $B(a, r)$ incluse dans $B_0 \cap U_0$.

Notons $B_1 = B(a, \min(r, 1/2))$. Alors $\overline{B_1} \subset B_0 \cap U_0$, et $\text{diam } \overline{B_1} \leq 1$.

⁴⁰ L'américain **William Fogg Osgood** (1864-1943) joua un rôle important dans le développement de la recherche mathématique aux USA. Il termina ses études à Göttingen, et fut spécialiste de théorie des fonctions. Le français **René Baire** (1874-1932) étudia les fonctions discontinues (fonctions semi-continues supérieurement et inférieurement) et les classifia selon leur complexité croissante : fonctions de classe 1, 2, 3, etc. Le théorème de Baire fut démontré indépendamment par Osgood pour \mathbf{R} en 1898, et par Baire pour les \mathbf{R}^n en 1899. Atteint de neurasthénie, Baire abandonna enseignement et recherche à partir de 1910. Il est mort à l'asile de Chambéry.

On construit de même B_n à l'aide de B_{n-1} , en imposant $\text{diam } B_n \leq 1/n$.

En vertu du critère de Cauchy géométrique (§ C.1), $\bigcap \overline{B_n}$ est un singleton $\{\alpha\}$.

On a $\alpha \in B_0 = \Omega$ et $\alpha \in \bigcap U_n$, donc $\bigcap U_n$ est dense.

À l'origine, ce théorème a servi à étudier les propriétés topologiques des *fonctions de Baire*, i.e. des fonctions $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ qui sont limites simples de suites (f_n) de fonctions continues. On sait que de telles fonctions ne sont pas toujours continues (penser à x^n sur $[0, 1]$), mais elles ne sont pas quelconques : par exemple, si E est complet, l'ensemble des points de continuité de f est dense (cf. chap sur la convergence simple et uniforme, § 3.3).

Voici d'autres applications du théorème de Baire, qu'on montrera en exercice :

1) Un espace métrique complet sans points isolés est non dénombrable.

On retrouve ainsi que, pour la distance usuelle, \mathbf{D} (anneau des nombres décimaux), \mathbf{Q} , \mathbf{E} , \mathbf{A} , \mathbf{K} (corps des nombres rationnels, resp. des réels constructibles à la règle et au compas, resp. des réels algébriques, resp. des réels calculables) ne sont pas complets.

2) \mathbf{Q} est un \mathfrak{F}_σ , mais pas un \mathfrak{G}_δ , de \mathbf{R} .

[Ind. : si $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ était un \mathfrak{F}_σ , il serait réunion d'une suite de fermés sans intérieur, et \mathbf{R} aussi : or c'est impossible]. On peut montrer par ce moyen que $1_{\mathbf{Q}}$ n'est pas une fonction de Baire (mais est limite simple d'une suite de fonctions de Baire, cf chapitre sur la convergence simple et uniforme, § 3.3).

3) Un \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dim. finie n'est pas réunion d'une suite d'hyperplans.

4) Aucune norme sur $\mathbf{K}[X]$ ne peut faire de $\mathbf{K}[X]$ un espace complet.

[Ind. : Si N est une norme sur $\mathbf{K}[X]$, les $\mathbf{K}_n[X]$ sont une suite de fermés sans point intérieur].

5) Il existe une fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ qui n'est dérivable en aucun point.

Ce résultat peut être établi de deux manières, soit en exhibant de telles fonctions (Bolzano, Weierstrass, Peano, Takagi et van der Waerden), soit en montrant que de telles fonctions existent, par l'absurde et à l'aide du théorème de Baire (Banach, 1931). De la même façon, on peut montrer l'existence de nombres réels transcendants, soit en exhibant un, $\sum 1/10^{n!}$, e ou π , par exemple (Liouville, Hermite, Lindemann), soit en observant avec Cantor (1874) que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable dans \mathbf{R} qui ne l'est pas (cf chap. Convergence, pb. 2).

6) Théorèmes de Banach-Steinhaus et d'inversion de Banach (chap. Espaces vectoriels normés).

7) Théorème de Blumberg (1922) : Si f est une fonction quelconque $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, elle peut n'être continue en aucun point, mais il existe un sous-ensemble dense D de \mathbf{R} telle que la restriction de f à D soit dense.⁴¹

Exercice : Lemme de Croft. Soit f une fonction de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R} vérifiant :

$$(\forall x > 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = 0.$$

1) On suppose f uniformément continue. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

2) On suppose f continue. Montrer que la même conclusion demeure.

[Considérer les ensembles $F_n(\epsilon) = \{ x ; \forall p \geq n \quad |f(px)| \leq \epsilon \} .$]

⁴¹ Ce théorème est démontré par B. Randé, qui révère Baire (RMS, janvier 2006).

E. Espaces métriques compacts

*« Il contemple étonné, comme enivré d'un philtre,
L'adhérence, un manteau qu'il n'a jamais compris,
Que vêt, sur un compact, immobile, le FILTRE. »*

Pierre Samuel

Après les espaces complets, les espaces métriques compacts constituent une autre catégorie importante d'espaces métriques. Les espaces compacts les plus simples sont les segments $[a, b]$ de \mathbf{R} et les pavés $\prod_{1 \leq i \leq n} [a_i, b_i]$ de \mathbf{R}^n . Grosso modo, un espace est compact lorsqu'il est « presque fini ». Ces espaces obéissent à un principe de « passage du local au global ». Par exemple, toute fonction continue est localement bornée ; sur un espace compact, elle est donc (globalement) bornée.

E.1. Espaces métriques compacts.

Théorème et définition 1 : Soit (E, d) un espace métrique. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(BL) Axiome de Borel-Lebesgue ⁴² : de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de E on peut extraire un sous-recouvrement fini $(U_i)_{i \in J}$, J partie finie de I ;

(BW) Axiome de Bolzano-Weierstrass : de toute suite de points de E on peut extraire une sous-suite convergente (dans E) ;

(PC) E est complet et précompact en ce sens que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe dans E un ε -réseau fini, c'est-à-dire une famille finie (x_1, x_2, \dots, x_n) telle que $E = \bigcup B'(x_i, \varepsilon)$.⁴³

L'espace (E, d) est alors dit **compact**.⁴⁴

Démonstration : Il est conseillé d'étudier les deux premières implications. Les autres, plus techniques, sont réservées à une seconde lecture.

(BL) \Rightarrow (BW). Soit (x_n) une suite de points de E , A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. On se propose de montrer que A est non vide.

Lemme : $A = \bigcap F_n$, où $F_n = \text{Adh} \{ x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \}$.

A est donc intersection d'une suite décroissante de fermés. Si A était vide, les $U_n = E - F_n$ seraient une suite croissante d'ouverts de réunion E . De ce recouvrement ouvert on pourrait extraire un sous-recouvrement fini, ce qui signifie que l'un des U_n serait égal à E ; mais alors le F_n correspondant serait vide. Or F_n n'est jamais vide.

(BW) \Rightarrow (PC). Soit (x_n) une suite de Cauchy de points de E . En vertu de (BW) on peut en extraire une suite convergente. On sait qu'alors toute la suite converge (§ C. 1).

⁴² **Émile Borel** (1871-1956), spécialiste de théorie des fonctions et probabiliste, ami de Painlevé et de Valéry, fut député de l'Aveyron et ministre de la Marine. **Henri Lebesgue** (1875-1941) fonda la théorie moderne de l'intégration.

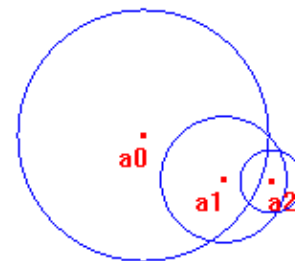
⁴³ « Si, en tout point d'un ensemble B qui est un ε -réseau pour un ensemble M , on allume une lampe éclairant une boule de rayon ε , alors tout l'ensemble M sera éclairé. » (L. Lusternik). Au fond, un espace précompact est un espace ε -presque fini.

⁴⁴ Le mot *compact* fut introduit en 1906 par **Maurice Fréchet**, en ces termes : « Nous dirons qu'un ensemble est compact lorsqu'il ne comprend qu'un nombre fini d'éléments ou lorsque toute infinité de ses éléments donne lieu à au moins un élément limite. » Interrogé à la fin de sa longue vie sur l'invention de ce terme, il déclara : « J'ai voulu sans doute éviter qu'on puisse appeler compact un noyau solide dense qui n'est agrémenté que d'un fil allant jusqu'à l'infini. C'est une supposition car j'ai complètement oublié les raisons de mon choix ! ». Voilà qui est limpide !

Si E n'était pas précompact, il existerait $\varepsilon > 0$ tel qu'il n'existe pas de ε -réseau fini. On pourrait alors construire par récurrence une suite (x_n) telle que $m < n \Rightarrow d(x_m, x_n) > \varepsilon$. De cette suite, on ne peut manifestement extraire aucune sous-suite convergente !

(PC) \Rightarrow (BL) est long et pénible, et se montre par absurde. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E dont on ne puisse extraire aucun sous-recouvrement fini. La précompacité entraîne le :

Lemme : Pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ qui n'est recouverte par aucune sous-famille finie de U_i , et, pour tout $\varepsilon' > 0$, il y a une boule ouverte $B(b, \varepsilon')$ rencontrant $B(a, \varepsilon)$ et possédant la même propriété.



Par applications répétées de ce lemme, on construit une suite $B_n = B(a_n, 1/2^n)$ de boules ouvertes, telle que B_n rencontre B_{n-1} , et qu'aucune ne soit recouverte par un nombre fini de U_i .

La suite (a_n) est de Cauchy, donc converge vers un point a . Ce point a appartient à un ouvert U_{i_0} . Cet ouvert contient une boule ouverte contenant a , qui contient elle-même les B_n à partir d'un certain rang. Mais alors, ces boules B_n sont recouvertes par un nombre fini (et en réalité un seul) des U_i . cqfd.

Proposition 1 : Soit (E, d) un espace compact. Si une suite (x_n) admet une unique valeur d'adhérence a , alors elle converge vers a .

Preuve : Dire que (x_n) ne tend pas vers a signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(x_{n(k)})$ telles que $(\forall k) d(x_{n(k)}, a) > \varepsilon$. De cette suite on pourrait extraire une suite convergente $(x_{n(k(p))}) \rightarrow b$, avec $d(a, b) \geq \varepsilon$. La suite (x_n) aurait donc au moins deux valeurs d'adhérence. Cqfd.

Proposition 2 : Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, A une partie de E , x_0 un point de E adhérent à A , f une fonction $A \rightarrow E'$. On suppose E' compact. Alors $f(x)$ admet au moins une valeur d'adhérence quand $x \rightarrow x_0$. Si cette valeur d'adhérence est unique, $f(x)$ tend vers elle.

Cette proposition étend aux fonctions la propriété de (BW), ainsi que la prop. 1. On peut démontrer des convergences de suites, des continuités de fonctions à valeurs dans un espace compact, en utilisant l'unicité des valeurs d'adhérence.

Proposition 3 : Soit (E, d) un espace métrique. E est fini $\Leftrightarrow E$ est compact et topologiquement discret.

Preuve : \Rightarrow est facile. Si E est fini, de toute suite d'éléments de E on peut extraire une suite constante : Bolzano-Weierstrass découle ici du principe des tiroirs. Enfin, tout point est isolé, donc ouvert.

Réciproquement, soit E compact et topologiquement discret. Si E était infini, il existerait une injection $n \rightarrow x_n$ de \mathbf{N} dans E . De cette suite on pourrait extraire une suite convergente $x_{n(k)}$, donc stationnaire, contredisant l'injectivité de $n \rightarrow x_n$.

Proposition 4 : Le produit de deux espaces compacts est compact.

Preuve : Soient E et F deux métriques compacts, (x_n, y_n) une suite de points de $E \times F$.

La suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{n(k)})$ convergente. La suite $(y_{n(k)})$ admet une sous-suite $(y_{n(k(p))})$ convergente. Du coup, la suite $(x_{n(k(p))}, y_{n(k(p))})$ est convergente. Cqfd.

Extension immédiate à un produit fini d'espaces compacts.

Exercice 1 : Montrer par différentes méthodes que $\mathbf{R},]0, 1[,]0, 1]$, munis de la distance usuelle, ne sont pas compacts.

Exercice 2 : Montrer qu'un espace métrique homéomorphe à un espace compact est compact.

La compacité est donc une notion *topologique*.

Exercice 3 : (théorème du graphe fermé) Soit $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$, où E' est compact.

Montrer que f est continue \Leftrightarrow son graphe est une partie fermée de $E \times E'$.

Exercice 4 : Montrer que l'application $(O, T) \in O(n, \mathbf{R}) \times T_+(n, \mathbf{R}) \rightarrow O.T \in Gl(n, \mathbf{R})$ qui à une matrice orthogonale et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 associe leur produit est un homéomorphisme (et même une bijection birationnelle).

Exercice 5 : Montrer qu'un espace compact (E, d) admet une partie dénombrable dense.

[Indication : pour tout n , considérer un $\frac{1}{n}$ -réseau fini F_n , puis $D = \bigcup F_n$].

Exercice 6 : Soit (E, d) un espace compact. Montrer que, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de E , il existe un réel $\alpha > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon α soit incluse dans au moins l'un des U_i (α est appelé *nombre de Lebesgue* du recouvrement). En déduire une preuve de $(BW) \Rightarrow (BL)$.

Exercice 7 : Bornes de Blanquer. On considère une salle de classe de 6 mètres de long, 5 mètres de large et 2,5 mètres de hauteur. Majorer le nombre d'élèves que l'on peut placer dans cette salle. Que devient cette majoration si on peut disposer les élèves à différentes hauteurs ? [Indications : Les résultats ne sont pas les mêmes selon qu'on se place avant, ou après le 11 mai 2020. Attention, les élèves ne sont pas des points d'un espace métrique, ils ont un volume !]

E.2. Ensembles compacts dans un espace métrique.

Définition 2 : Une partie A de l'espace métrique (E, d) est dite **compacte** si le sous-espace métrique A de E est compact.

Caractérisations :

- De tout recouvrement de A par des ouverts de A , on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- De tout recouvrement de A par des ouverts de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- De toute suite de points de A on peut extraire une suite convergeant *dans* A .
- A est complète et précompacte, en ce sens que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie (x_1, x_2, \dots, x_n) de points de A telle que $A \subset \bigcup B'(x_i, \varepsilon)$.
- A est complète, et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie (y_1, y_2, \dots, y_n) de points de E telle que $A \subset \bigcup B'(y_i, \varepsilon)$.

Exercice 1 : Démontrer avec soin l'équivalence de ces propriétés.

Il en résulte que toute partie A est « compacte en soi », autrement dit que si $A \subset F \subset E$, alors

$$A \text{ compacte dans } F \Leftrightarrow A \text{ compacte dans } E.$$

La situation des compacts est donc plus simple que celle des fermés ou des ouverts.

Théorème 5 : a) Toute partie compacte est fermée bornée.

b) La réciproque est fautive en générale : ainsi, un espace métrique discret infini est fermé borné, mais non compact. Mais elle est vraie dans deux cas importants :

- i) Si E est lui-même compact (les parties compactes de E sont les parties fermées) ;
- ii) Si $E = \mathbf{R}$ ou est l'un des \mathbf{K}^n muni de l'une des trois normes usuelles.

Preuve : a) Soit K un compact de E .

- K est fermé. Soit en effet (x_n) une suite de points de K convergeant vers a dans E .

Il existe une suite extraite $(x_{n(k)})$ tendant vers un point $b \in K$. Donc $a = b$, et $a \in K$.

- K est borné. Sans quoi, pour tout point $a \in E$, et tout entier n , il existerait (x_n) tel que $d(x_n, a) \geq n$.

De la suite (x_n) on pourrait extraire une suite $(x_{n(k)})$ tendant vers un point $b \in K$.

Mais $d(x_{n(k)}, a) \geq n(k)$ donnerait à la limite $d(b, a) = +\infty$.⁴⁵

b) Soit (E, d) un espace compact, A une partie de E ; montrons que A compact $\Leftrightarrow A$ fermée.
(inutile de rajouter bornée, car E est déjà borné). Le sens \Rightarrow vient d'être vu. Montrons \Leftarrow .

Soit A fermée, (x_n) une suite de points de A . Comme E est compact, il existe une suite extraite $(x_{n(k)})$ tendant vers a dans E . Ce point a appartient à $\overline{A} = A$. Donc A est compact.

c) Soit A un fermé borné de \mathbf{R} . Toute suite (x_n) de points de A est bornée, donc, en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass relatif à la droite numérique, admet une sous-suite $(x_{n(k)})$ convergente. La limite de cette suite appartient à $\overline{A} = A$. Donc A est compact.

Soit A un fermé borné de \mathbf{R}^2 , $A \subset [a, b] \times [c, d]$. Soit (x_n, y_n) une suite de points de A .

La suite (x_n) est bornée, donc admet une sous-suite $(x_{n(k)})$ convergente.

La suite $(y_{n(k)})$ est bornée, donc admet une sous-suite $(y_{n(k(p))})$ convergente.

Du coup, la suite $(x_{n(k(p))}, y_{n(k(p))})$ est convergente. Sa limite appartient à $\overline{A} = A$. cqfd.

Si A est un fermé borné de \mathbf{K}^n , sa compacité se montre comme ci-dessus, au moyen d'extractions emboîtées.

Corollaire : Les espaces \overline{R} et \tilde{C} sont compacts.

Il sont en effet isométriques, donc homéomorphes, à des fermés bornés de \mathbf{R} , resp. de \mathbf{R}^2 .

Exercice 2 : 1) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de réels $\in [0, 1]$ telles que $(x_n, y_n) \rightarrow 1$. Démontrer que (x_n) et (y_n) tendent vers 1.

2) Soient $D = \{ z \in \mathbf{C} ; |z| \leq 1 \}$, (x_n) et (y_n) deux suites de points de D telles que $(x_n, y_n) \rightarrow 1$. Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) tendent vers 1.

Remarque : comment démontrer qu'un ensemble A est compact ?

1° Si A est inclus dans un espace \mathbf{K}^n muni de l'une des normes usuelles (ou plus généralement dans un evn de dim finie, cf. chap. sur les evn), il suffit de montrer que A est fermé borné.

2° Sinon, montrer que A est un fermé d'un espace compact.

3° Si ces méthodes échouent, revenir à l'une des cinq caractérisations ci-dessus, en commençant par (BW), mais celle-ci n'est pas toujours la plus simple : penser aussi à (PC).

Exemple 1 : Soit (E, d) un espace métrique, (x_n) une suite de points de E tendant vers a . Démontrons que $A = \{ x_n ; n \in \mathbf{N} \} \cup \{a\}$ est une partie compacte de E .

Preuve : • Ici, la preuve la plus simple utilise Borel-Lebesgue.

En effet, soit (U_i) un recouvrement de A par des ouverts de E . a appartient à un U_{i_0} , lequel contient tous les x_n à partir d'un certain rang. Il ne reste plus qu'un nombre fini de x_n à recouvrir. D'où l'existence d'un sous-recouvrement fini de A .

• Démontrer la compacité de A par (BW) est plus em... délicat !... Essayons tout de même !

Soit (u_k) une suite de points de A . Si une infinité de u_k sont égaux à a , il y a une suite extraite de (u_k) constante, donc convergente dans A . Sinon, tous les u_k appartiennent à $\{x_n\}$ à partir d'un certain rang : écrivons-les $u_k = x_{n(k)}$. Mais attention ! les indices $n(0), n(1), n(2), \dots$ n'ont aucune raison d'être croissants, donc $(x_{n(k)})$ n'est pas une suite extraite de (x_n) .

⁴⁵ Dans un espace métrique, les éléments sont à une distance finie les uns des autres. Il n'en est pas de même dans la vie.

Si la suite $(n(k))$ est bornée, elle contient une sous-suite constante, donc il y a une suite extraite de (u_k) qui est constante et égale à l'un des x_n . Sinon, on peut extraire de la suite $(n(k))$ une sous-suite strictement croissante. Et alors il existe une suite extraite de (x_n) qui tend vers a .

Exercice 3 : Démontrer que A est précompact et complet.

Exercice 4 : Soient E et E' deux espaces métriques, $f: E \rightarrow E'$ une fonction continue, telle que l'image réciproque par f de tout compact de E' est un compact de E .

1) Montrer que, pour tout fermé F de E , $f(F)$ est un fermé de E' .

2) Montrer que les polynômes non constants de \mathbf{R} ou \mathbf{C} vérifient cette propriété.

Exemple 2 : Le cube de Hilbert. Soit $E = [0, 1]^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites à éléments dans $[0, 1]$.

Montrer que l'application qui à $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ associe $d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ est une distance sur

E . Caractériser la convergence des suites dans E , et montrer que (E, d) est compact.

Preuve : La première affirmation est laissée en exercice. Montrons que la suite $x^p = (x_n^p)$ de points de E converge vers $a = (a_n)$ quand $p \rightarrow +\infty$ ssi : $(\forall n) \lim_{p \rightarrow +\infty} x_n^p = a_n$.

Si (x^p) tend vers a , pour tout n , on a : $|x_n^p - a_n| \leq 2^n \cdot d(x^p, a) \rightarrow 0$.

Au fond, pour chaque n , l'application $p_n : x \rightarrow x_n$ est lipschitzienne, donc continue.

La réciproque n'est pas évidente : il s'agit de montrer que :

$$(\forall n) \lim_{p \rightarrow +\infty} x_n^p = a_n \Rightarrow \lim_p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n^p - a_n|}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_p \frac{|x_n^p - a_n|}{2^n} = 0.$$

Attention, c'est un passage à la limite dans une série !

Mais le passage à la limite est ici autorisé car il y a convergence normale de la série.

Reste à montrer la compacité de E . Nous allons la montrer à l'aide du **procédé diagonal de Cantor**.

Soit $(x^p) = ((x_n^p))$ une suite de points de E , que l'on peut ranger en un tableau infini, n indice de la ligne, p de la colonne.

De la suite (x_0^p) des coordonnées d'indice 0, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_0^{\alpha_0(p)})$, de

limite a_0 . De la suite $(x_1^{\alpha_0(p)})$ des 1ères coordonnées, on peut extraire une sous-suite convergente

$(x_1^{\alpha_1(p)})$, de limite a_1 ; on peut supposer $\alpha_1(0) > \alpha_0(0)$, quitte à enlever le premier terme. De la suite

$(x_2^{\alpha_1(p)})$ des 2èmes coordonnées, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_2^{\alpha_2(p)})$, de limite a_2 ;

on peut supposer $\alpha_2(0) > \alpha_1(0)$, quitte à enlever le premier terme.

On réitère indéfiniment ces extractions emboîtées.

Soit $a = (a_n)$. Il est facile de voir que la suite diagonale $(x_0^{\alpha_0(0)}, x_1^{\alpha_1(0)}, x_2^{\alpha_2(0)}, \dots)$ tend vers a .

Exercice 5 : Montrer que (E, d) est précompact et complet.

Remarque : Cet exercice est généralisé en fin de chapitre.

Proposition 6 : Soit \mathcal{K} l'ensemble des parties compactes de (E, d) .

a) Une réunion finie, une intersection quelconque de compacts est compacte.

b) Si (K_n) est une suite décroissante de compacts non vides, alors $K = \bigcap K_n$ est un compact non vide ; de plus, si un ouvert U contient K , il contient déjà l'un des K_n .

Preuve : a) Soient A et B deux compacts, (x_n) une suite de points de $A \cup B$. L'un au moins des ensembles $\{n; x_n \in A\}$ et $\{n; x_n \in B\}$ est infini, et peut être ordonné en une suite extraite $(x_{n(k)})$. De cette suite extraite on peut réextraire une suite tendant vers un point de A ou de B ...

Si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille non vide de compacts, $\bigcap K_i$ est un fermé (intersection de fermés) inclus dans un K_{i_0} , donc un compact.

b) $K = \bigcap K_n$ est compact, en vertu de a). Montrons qu'il est non vide. Pour chaque n , choisissons $x_n \in K_n$. (x_n) est une suite de points de K_0 . On peut en extraire une suite $(x_{n(k)})$ tendant vers $a \in K_0$. Mais comme $x_{n(k)} \in K_{n(k)} \subset K_k \subset K_{k_0}$ pour $k \geq k_0$, $a \in K_{k_0}$ pour tout k_0 .

Maintenant, soit U un ouvert contenant K . Si, l'on avait $(\forall n) K_n \not\subset U$, soit $x_n \in K_n - U$; la suite (x_n) aurait une valeur d'adhérence $x \in K_n - U$; donc $x \in K - U$: $(K_n - U)$ serait une suite décroissante de compacts d'intersection non vide.

NB : ce résultat généralise aux espaces métriques l'axiome des segments emboîtés de la droite numérique.

Applications :

- 1) On peut reprendre la même que celle du théorème 1 du D.1.
- 2) L'ensemble triadique de Cantor est compact non vide (cf. H.1).

E.3. Compacité et fonctions continues : théorème des bornes.

Théorème des bornes (Weierstrass ⁴⁶) : Soit (E, d) un espace compact. Toute fonction continue $E \rightarrow \mathbf{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Preuve : • Si f était non bornée, pour tout n il existerait $x_n \in E$ tel que $|f(x_n)| \geq n$.

Par compacité de E , de la suite (x_n) on peut extraire une suite $(x_{n(k)})$ convergente :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n(k)} = a.$$

Par continuité de f , la suite $f(x_{n(k)})$ tendrait vers $f(a)$... tout en étant non bornée !

- Montrons que les bornes supérieure et inférieure de f sont atteintes.

Soit $M = \sup_{x \in E} f(x)$. Pour tout entier n , il existe $x_n \in E$ tel que $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$.

De la suite (x_n) on peut extraire une suite $(x_{n(k)})$ convergente : $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n(k)} = a$.

Alors $f(x_{n(k)})$ tend vers $f(a) = M$ par le lemme des gendarmes.

Autre preuve, par l'absurde : si l'on avait $(\forall x \in E) f(x) < M$, la fonction $g : x \rightarrow \frac{1}{M - f(x)}$ serait définie, continue, positive et non majorée sur E , contredisant la première partie de la preuve.

Ce théorème est un cas particulier du théorème 6 et du théorème suivant :

Théorème 8 : Soit $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ une fonction continue. L'image *directe* par f de tout compact de E est un compact de E' .

Preuve : Soit K un compact de E . Montrons que $f(K)$ est un compact de E' . Soit (y_n) une suite de points de $f(K)$. Pour chaque y_n , choisissons $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. De la suite (x_n) on peut extraire une suite $(x_{n(k)})$ convergente vers $a \in K$. Par continuité de f , $(y_{n(k)})$ tend vers $f(a) \in f(K)$.

Corollaire : Soit (E, d) un espace métrique compact. Si f est une bijection continue $E \rightarrow E'$, E' est compact et f est un homéomorphisme.

Preuve : Il suffit de montrer que l'image directe par f d'un fermé de E est un fermé de E' . Mais, comme E est compact, un fermé de E est compact ; $f(E)$ est donc compact, donc fermé !

Applications :

⁴⁶ Lorsque X est un segment de \mathbf{R} , ce théorème figure sous le nom de « Hauptsatz » (théorème principal) dans le cours de Weierstrass de 1861. Mais Weierstrass avait du mal à contrôler le flux sortant de ses bornes.

1) Théorème de Rolle ⁴⁷ (1691) : Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[$ $f'(c) = 0$. Rappelons qu'il implique le th. des accroissements finis.

2) Théorème fondamental de l'algèbre de d'Alembert-Gauss : \mathbf{C} est algébriquement clos.

Argand ⁴⁸ donna en 1814 une preuve de ce résultat fondée sur deux lemmes :

Lemme 1 : Si $f \in \mathbf{C}[Z]$, alors il existe un point c en lequel $z \rightarrow |f(z)|$ atteint son minimum.

Lemme 2 : Si $f \in \mathbf{C}[Z]$ est non constant, alors pour tout point $c \in \mathbf{C}$ vérifiant $f(c) \neq 0$, il existe un autre point c' tel que $|f(c')| < |f(c)|$.

Argand prouva le second lemme, mais admit le premier. En 1820, Cauchy l'établit complètement, en se ramenant à rechercher le minimum sur un disque, et donc en admettant le théorème des bornes, qui ne fut démontré que plus tard.

3) Équivalence des normes dans les espaces vectoriels de dim finie (cf. chap. sur les evn, §7).

4) Problème de la meilleure approximation : Si K est une partie compacte de E , alors :

$$(\forall x \in E) \quad (\exists y \in K) \quad d(x, K) = d(x, y).$$

Ce résultat ne s'applique pas si K est seulement fermé.

Cependant, si F est un fermé de $E = \mathbf{K}^n$, alors : $(\forall x \in E) \quad (\exists y \in F) \quad d(x, F) = d(x, y)$.

5) Problèmes d'extrema d'origine géométrique.

Exercice 1 : Soit \mathcal{E} une ellipse du plan euclidien. Parmi tous les triangles $T = ABC$ inscrits dans \mathcal{E} il en existe au moins un d'aire maximum. Les trouver.

Exercice 2 : Soient K_1, K_2, K_3 trois compacts du plan euclidien, tels qu'aucune droite ne les rencontre simultanément. Montrer que parmi tous les cercles qui les rencontrent il en existe un de rayon minimum.

Exemple 3 : point de Fermat-Torricelli d'un triangle. Soit $T = ABC$ un triangle. Montrer qu'il existe un point M rendant minimum $f(M) = MA + MB + MC$. Le trouver.

Exemple 4 : isopérimètres. Parmi tous les polygones convexes à n côtés de périmètre donné, il en existe au moins un d'aire maximum. Traiter le cas du triangle.

Dans tous ces exemples, l'idée est d'appliquer le théorème des bornes à une certaine fonction continue, afin de montrer qu'elle atteint sa borne supérieure ou inférieure. Si le domaine de définition n'est pas compact, on commence par restreindre le domaine de recherche à un compact. Des arguments géométriques ou différentiels peuvent ensuite être utilisés pour caractériser le(s) point(s) cherché(s).

Exercice 1 : Soient A et B deux parties de E .

a) Si A et B sont fermées, a-t-on $d(A, B) = 0 \Rightarrow A \cap B = \emptyset$? idem si A est compacte et B fermée.

b) Si A et B sont compactes, montrer $\exists (a, b) \in A \times B \quad d(a, b) = d(A, B)$.

Exercice 2 : Soit (E, d) un espace métrique compact, f une application : $E \rightarrow E$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe a , et que toute suite récurrente $x_0 \in E, x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a . Comparer ce théorème de point fixe avec celui de (D.3), tant du point de vue des hypothèses que de celui de la vitesse de convergence.

[Indication : considérer la fonction $\phi(x) = d(x, f(x))$].

Exercice 3 : Soit (E, d) un espace métrique compact, f une application : $E \rightarrow E$ vérifiant :

⁴⁷ **Michel Rolle** (1652 - 1719), natif d'Ambert, énonça ce résultat pour les polynômes, sans démonstration.

⁴⁸ Le suisse **Jean-Robert Argand** (1768-1822) fut, après l'arpenteur norvégien **Caspar Wessel** (1745-1818), l'un des premiers à interpréter géométriquement l'ensemble des complexes comme plan vectoriel euclidien. Cette interprétation ne fut imposée par Cauchy et Gauss que vers 1830 (cf. Revue de l'APM janvier 2006).

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y) .$$

Montrer que f est une isométrie.

[Ind. : si $f(E) \neq E$, considérer $x_0 \in E - f(E)$, $x_{n+1} = f(x_n)$; prouver $(\exists \alpha > 0) \ p \neq q \Rightarrow d(x_p, x_q) \geq \alpha$.]

Exercice 4 : Soient (E, d) un espace métrique compact, f une application : $E \rightarrow E$ vérifiant :

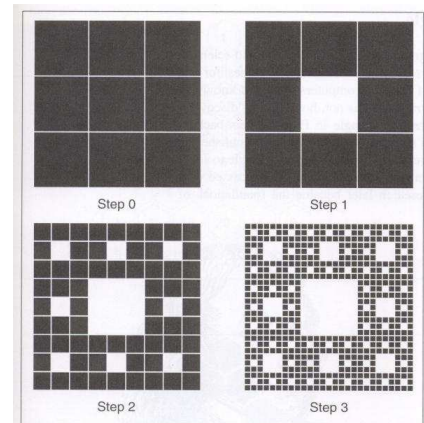
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) . \text{ Montrer que } f \text{ est une isométrie.}$$

[Indication : Soient $x, y \in E$; on pose $x_1 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_1 = y$, $y_{n+1} = f(y_n)$; démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \ d(x, x_n) \leq \varepsilon$ et $d(y, y_n) \leq \varepsilon$; en déduire que $f(E)$ est dense dans E , et conclure.]

Exercice 5 : Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides, d'intersection K . Montrer que $\text{diam}(K_n) \downarrow \text{diam}(K)$.

Exercice 6 : On se place dans le plan euclidien. Si n est impair, on dit qu'on fait « un trou d'ordre n » dans un carré C si, après avoir partitionné C en n^2 petits carrés identiques, on lui retire le carré central ouvert. Partant d'un carré K_0 de côté 1, on lui fait un trou d'ordre 3. Il reste un compact K_1 formé de 8 carrés, dans chacun desquels on fait un trou d'ordre 5. Il reste un compact K_2 formé de 8.24 carrés, dans chacun desquels on fait un trou d'ordre 7... On définit ainsi une suite décroissante (K_n) de compacts du plan. Montrer que $K = \bigcap K_n$ est un compact $\neq \emptyset$, dont on demande l'aire.

[Par « aire » on entend ici la limite des aires des K_n ; on utilisera les intégrales de Wallis]⁴⁹.



E.4. Compacité et fonctions continues : théorème de Heine.

Théorème de Heine⁵⁰ (1872) : Toute fonction continue $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ sur un espace compact est uniformément continue.

Preuve par l'absurde et par les suites.

Supposons : $(\exists \varepsilon > 0) \ (\forall \alpha > 0) \ \exists (x, y) \in E^2 \ d(x, y) \leq \alpha \text{ et } d'(f(x), f(y)) > \varepsilon$.

Prenons $\alpha = \frac{1}{n}$; il existe un couple $(x_n, y_n) \in E^2$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$.

Par compacité de E , de la suite (x_n) on peut extraire une suite $(x_{n(k)})$ tendant vers a .

Alors $(y_{n(k)})$ tendrait aussi vers a (inégalité du triangle!).

Par continuité de f en a , $d'(f(x_{n(k)}), f(y_{n(k)}))$ tend vers $d'(f(a), f(a)) = 0 \geq \varepsilon$... impossible!

Exercice 1 : Donner une preuve directe en écrivant que f est continue en tout point, et en utilisant (BL).

Exercice 2 : preuve de Lüroth (1873). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in E$, on pose

⁴⁹ Cet exercice décalé est l'occasion de rappeler ici que ce chapitre ne se préoccupe pas de la théorie des aires, et plus généralement de la *mesure* des boules, des ensembles compacts, etc. C'est là une théorie *distincte* de la topologie générale, appelée *théorie de la mesure, ou de l'intégration*. Pour nous limiter au seul plan euclidien, il faudrait définir rigoureusement l'aire d'un compact convexe, polygonal, quarrable, ou Lebesgue-mesurable, selon les besoins.

⁵⁰ Professeur à Berlin, puis à Halle, **Eduard Heine** (1821-1881) établit en 1872 que toute application continue d'une partie fermée bornée K de \mathbf{R} à valeurs réelles était uniformément continue. Pour cela il montra au passage que K vérifiait la propriété de Borel-Lebesgue. Borel perçut l'importance de cette propriété, qui servit à définir la notion d'espace compact. C'est pourquoi l'axiome de Borel-Lebesgue est parfois appelé axiome de Heine-Borel.

$$\delta(x) = \sup \{ \delta > 0 ; \forall y, z \in B'(x, \delta) \quad d'(f(y), f(z)) \leq \varepsilon \} \in]0, +\infty] .$$

Montrer que $\delta : E \rightarrow]0, +\infty]$ est définie et lipschitzienne. Conclure à l'aide du théorème des bornes.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue ayant des limites en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 4 : Montrer que toute application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ continue périodique est uniformément continue.

Remarque : On peut établir ce résultat directement, mais mieux vaut le déduire du lemme :

Lemme de relèvement : Pour toute fonction continue T-périodique $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, il existe une fonction continue $F : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $(\forall x \in \mathbf{R}) \quad f(x) = F(\exp \frac{2i\pi x}{T})$.

2) Approximation et intégration. Toute application continue $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} est limite uniforme de fonctions en escaliers, ou de fonctions continues affines par morceaux, ou de fonctions polynomiales (Weierstrass). Il en découle qu'elle est intégrable au sens de Riemann ⁵¹.

E.5. Espaces localement compacts.

Définition 3 : L'espace métrique (E, d) est dit **localement compact** si tout point possède un voisinage compact, ou, ce qui revient au même, si $(\forall x \in E) (\exists r_x > 0) B'(x, r_x)$ est compacte.

Exemples :

- 1) Tout espace compact est localement compact.
- 2) Tout espace discret est localement compact, mais n'est compact que s'il est fini.
- 3) Les espaces \mathbf{K}^n munis des trois normes usuelles sont localement compacts.
- 4) Un evn de dim finie est localement compact, un evn de dim infinie n'est *jamais* localement compact (th. de Riesz, cf. chap evn, §9).

Exercice : Montrer que \mathbf{Q} n'est pas localement compact.

Exercice : Dans un espace métrique localement compact, tout sous-espace ouvert, resp. fermé, est localement compact.

Problème : espaces métriques à boules fermées compactes.

- 1) Soit (E, d) un espace métrique. Montrer l'équivalence des propriétés :

- a) toute boule fermée de E est compacte ;
- b) toute partie fermée bornée est compacte ;
- c) de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

On dira alors que (E, d) est un *c-espace*.

- 2) Exemples : Examiner si les espaces suivants sont des c-espaces :

– $\mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$, un espace vectoriel normé, un espace métrique discret.

– Montrer que \mathbf{R} muni de $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ n'est pas un c-espace ; conséquence ?

- 3) a) Montrer qu'un c-espace est localement compact, complet et de type dénombrable.

b) Montrer qu'un fermé A d'un c-espace est un c-espace.

- 4) Soit (E, d) un c-espace, (x_n) une suite de points de E . Montrer l'équivalence des propriétés :

a) pour tout compact K de E , il existe N tel que pour $n > N$, $x_n \notin K$;

b) $(\forall a \in E) \lim_n d(a, x_n) = +\infty$;

⁵¹ Dans son *Cours d'Analyse de l'École polytechnique* (1821), Cauchy avait cru établir l'intégrabilité des fonctions continues. Sa preuve était incomplète, car il ne disposait pas de cette propriété.

Une suite vérifiant ces propriétés est dite « tendre vers l'infini ».

a) l'image *réciroque* par f de tout compact de F est un compact de E ;

6) Soient (E, d) un c-espace, A un fermé, B un compact (non vides) de E . Montrer que :

7) Soit (E, d) un espace métrique localement compact de type dénombrable, (U_n) une suite d'ouverts vérifiant :

On note $K_n = \overline{U_n}$ (voir § G, 5).

[Indication : considérer $g_n(x) = \frac{d(x, K_{n-1})}{d(x, K_{n-1}) + d(x, E - U_n)}$, puis $f(x) = \sum g_n(x)$.]

Montrer que $\delta(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ est une distance topologiquement équivalente à d , et que (E, δ) est un c-espace.

« *Only connect.* »

Edward Morgan Forster⁵²

⁵² On peut traduire cette maxime approximativement par : « *Découvrez l'harmonie en vous* »... Autrement dit, réconciliez vos deux moitiés d'orange.

Vaucluse a deux composantes connexes par arcs, tandis que la Drôme est connexe par arcs (mais n'est pas simplement connexe). Expliquons cela.

F.1. Connexité par arcs.

Définition 1 : Soit (E, d) un espace métrique. Un **chemin** d'origine a et d'extrémité b est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Si $a = b$ on parle de **lacet**.

Proposition 1 : La relation « $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow$ il existe un chemin d'origine a et d'extrémité b » est une relation d'équivalence dans E .

Preuve : La relation est réflexive : $a \mathcal{R} a$, car il suffit de choisir le chemin constant $\gamma(t) = a$.

Elle est symétrique, car si γ est un chemin d'origine a et d'extrémité b , le chemin « opposé », défini par $\gamma'(t) = \gamma(1 - t)$ a pour origine b et pour extrémité a . Enfin, elle est transitive, car si γ est un chemin d'origine a et d'extrémité b , et γ' un chemin d'origine b et d'extrémité c , le chemin « composé » $\gamma'' = \gamma \cdot \gamma'$, défini par $\gamma''(t) = \gamma(2t)$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $\gamma''(t) = \gamma'(2t - 1)$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, est un chemin joignant a à c .

Définition 2 : Les classes d'équivalence de E pour la relation précédente s'appellent **composantes connexes par arcs** de E . E est dit **connexe par arcs** s'il n'admet qu'une seule composante connexe par arcs, autrement dit si l'on peut relier tout point à tout autre par un chemin (continu). E est dit **totalelement discontinu** si les composantes connexes par arcs de E sont les singletons.

Remarque : La notion de connexité par arcs correspond à l'idée intuitive d'ensemble *d'un seul tenant*. Mais un tel ensemble peut avoir des trous : ainsi la couronne $1 \leq \|x\| \leq 2$ dans \mathbf{R}^2 euclidien. L'étude des "trous", de leur forme et de leur dénombrement, est le point de départ de la topologie algébrique.⁵³

Exercice 1 : Le segment $[0, 1]$ de \mathbf{R} est-il homéomorphe au cercle unité S^1 de \mathbf{R}^2 ? au carré $[0, 1]^2$?

Exercice 2 : Les chromosomes X et Y sont-ils homéomorphes ? Classer à homéomorphisme près les lettres de l'alphabet.

Exercice 3 : Classifier à homéomorphisme près les slips de F^{***} .

Exercice 4: Montrer que $A = \mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}^2$ est une partie connexe par arcs de \mathbf{R}^2 .

Exercice 5: Soient a et b deux points du plan euclidien standard \mathbf{R}^2 . Montrer qu'il existe un cercle passant par a et b , et ne rencontrant pas \mathbf{Q}^2 . En déduire que $\mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}^2$ est connexe par arcs.

F.2. Théorème des valeurs intermédiaires.

« Ce théorème est connu depuis longtemps... »

Lagrange, 1807, *Œuvres*, vol. 8, p.19, voir aussi p.133

Toutes les sciences progressent de deux manières, tantôt en défrichant et en explorant des territoires nouveaux, tantôt en questionnant des savoirs existants, des vérités établies ou considérées comme telles. C'est souvent en mettant en doute des entrées en matière du genre « *il est bien connu que...* » que des créateurs ont fait des avancées importantes. Le pragois Bolzano fut l'un d'eux.

Théorème des valeurs intermédiaires (Bolzano, 1817) ⁵⁴ : Si I est un intervalle de \mathbf{R} et f une fonction continue $I \rightarrow \mathbf{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle de \mathbf{R} . Plus généralement si E est un espace métrique connexe par arcs et f une fonction continue $E \rightarrow \mathbf{R}$, alors $f(E)$ est un intervalle de \mathbf{R} .

⁵³ Au fil du temps, la topologie a éclaté en trois branches : topologies générale, différentielle et algébrique.

⁵⁴ Né et mort à Prague, **Bernhard Bolzano** (1781-1848) était de culture allemande. Après des études de théologie, philosophie et mathématiques, il fut ordonné prêtre en 1805, et nommé professeur de science de la religion à l'université de Prague. Destitué en 1820 et surveillé par la police pour ses critiques contre l'ordre

En d'autres termes, si f prend deux valeurs, elle prend toute valeur intermédiaire.

Preuve : 1^{ère} assertion. Supposons que f prenne deux valeurs $f(a) < f(b)$, où $a < b$.

Montrons que f prend toute valeur $y \in]f(a), f(b)[$. Soit $A = \{ x \in [a, b] ; f(x) < y \}$.

A est non vide car $a \in A$, et majorée par b , donc A a une borne supérieure c . Montrons que $f(c) = y$.

Tout d'abord $a < c < b$, car $f(x) < y$ sur $[a, a + \alpha]$ et $y < f(x)$ sur $[b - \beta, b]$ par continuité de f .

Si l'on avait $f(c) < y$, alors on aurait encore $f(x) < y$ à droite de c , qui ne majorerait pas A .

Si l'on avait $f(c) > y$, alors on aurait encore $f(x) > y$ à gauche de c , contredisant le fait que c est le plus petit majorant de A .

La 2^{ème} assertion s'en déduit. Si f prend deux valeurs $f(a) < f(b)$, où $(a, b) \in E^2$, et si $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ est un chemin continu tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, la fonction composée $t \in [0, 1] \rightarrow f(\gamma(t))$ est continue et prend toute valeur $y \in]f(a), f(b)[$ en vertu de la 1^{ère} assertion.

Exercice : Une preuve par dichotomie.

Soit f continue $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$, où $a < b$. Posons $a_0 = a, b_0 = b$,

- Si $f(\frac{a_n + b_n}{2}) < 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$
- Si $f(\frac{a_n + b_n}{2}) \geq 0$, $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Que dire des suites (a_n) et (b_n) ?

Exercice : Autre approche.

Soit f continue $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$, où $a < b$. Subdivisons $[a, b]$ en $2, 4, \dots, 2^n$ segments égaux. Montrer que, pour tout n , il existe au moins un segment $[a_n, b_n]$ de la n -ème subdivision (et en fait un nombre impair) tel que $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$. Conclure par compacité.

Corollaire : Si E est un espace connexe par arcs, les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont \emptyset et E . Il revient au même de dire que E n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Preuve : Il suffit d'observer que si A est un ouvert-et-fermé de E , la fonction 1_A est continue sur E . En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle est constante, donc $A = \emptyset$ ou E .

Remarques : 1) Un espace métrique est dit **connexe** s'il vérifie la propriété mentionnée dans le corollaire. Tout espace connexe par arcs est donc connexe, la réciproque étant fautive. Sur ce sujet, que je n'approfondis pas ici, on pourra se reporter à des ouvrages plus spécialisés, Bourbaki, etc.

2) En pratique, pour montrer que tous les points d'un espace connexe E vérifient une certaine propriété géométrique, il suffit de montrer que leur ensemble est un ouvert-et-fermé non vide de E .

Le théorème de Bolzano découle en réalité de deux énoncés plus précis :

Proposition 3 : Les parties connexes par arcs de \mathbf{R} sont les intervalles.

Preuve : Tout intervalle I est connexe par arcs, car si a et b sont deux points de I , $\gamma(t) = (1-t)a + t.b$ est continue de $[0, 1]$ dans I , et telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Réciproquement, soit I une partie connexe par arcs de \mathbf{R} . Si I n'était pas un intervalle, il existerait trois points $a < c < b$ tels que $a, b \in I, c \notin I$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow I$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. $\{ t \in [0, 1] ; \gamma(t) < c \} = \{ t \in [0, 1] ; \gamma(t) \leq c \}$ est un ouvert et fermé non vide de $[0, 1]$. En y réfléchissant, sa borne supérieure ne peut être que 1. Or c'est impossible !

Proposition 4 : L'image directe par une fonction continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs.

Preuve : Soient $f : E \rightarrow F$ une fonction continue, A une partie connexe par arcs de E . Montrons que $B = f(A)$ est connexe par arcs. Soient $c = f(a)$ et $d = f(b)$ deux points de B , $(a, b) \in A \times A$.

social, il se vit interdire toute activité publique, et travailla dans un grand isolement. Dans le *Rein analytischer Beweis...* (1817), il entreprit de démontrer la propriété des valeurs intermédiaires, considérée jusque là comme géométriquement évidente, et cela l'amena à approfondir les propriétés de la droite numérique, les notions de limite et de borne supérieure.

Il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow B$ est continue et telle que $(f \circ \gamma)(0) = c$ et $(f \circ \gamma)(1) = d$.

Théorème 5 : structure des ouverts de \mathbf{R} . Soit U un ouvert non vide de \mathbf{R} . Il existe une et une seule famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $I_n =]a_n, b_n[$, telle que $U = \bigcup I_n$, b_n . Cette famille est au plus dénombrable. Pour chaque n les extrémités de I_n n'appartiennent pas à U .

Preuve : Nous allons donner de ce théorème une preuve directe, laissant les détails au lecteur.

- Considérons dans I la relation « $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow$ le segment d'extrémités x et y est inclus dans I ». C'est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence $C(x)$ de x est un intervalle de \mathbf{R} , et c'est le plus grand intervalle de \mathbf{R} contenant x et inclus dans I .

- Soit $a(x) = \inf \{ t ;]t, x] \subset U \}$ et $b(x) = \sup \{ t ; [x, t[\subset U \}$. $a(x)$ et $b(x)$ existent dans \overline{R} . Je dis que $C(x)$ est l'intervalle ouvert $]a(x), b(x)[$.

- Ces intervalles ouverts définissent une partition de I . Plus précisément, si l'on indexe les classes $C(x)$ par un ensemble A et si l'on choisit un élément x_α dans chaque classe, alors $C(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une partition de I .

- De plus, on peut choisir x_α rationnel ; comme $\alpha \in A \rightarrow x_\alpha \in \mathbf{Q}$ est clairement injective, l'ensemble A est dénombrable.

- Il reste à montrer que si I admet une partition $(J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ formée d'intervalles ouverts, les J_λ sont nécessairement les classes d'équivalence de I pour la relation \mathcal{R} .

Application : Soit f une fonction continue de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Les ensembles $U_+ = \{ x ; f(x) > 0 \}$, $U_- = \{ x ; f(x) < 0 \}$ et $F = \{ x ; f(x) = 0 \}$ sont disjoints de réunion \mathbf{R} . F est fermé, U_+ et U_- sont des ouverts, auxquels on peut appliquer le théorème précédent. Mais attention, si U_+ et U_- sont des réunions dénombrables d'intervalles ouverts disjoints, rien ne dit que l'on peut les ranger dans l'ordre croissant ou décroissant. Penser à f et surtout à $f \circ f$, où $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$.

F.3. Exemples et applications.

1) \mathbf{R} , $\overline{\mathbf{R}}$, \mathbf{C} , tout espace vectoriel normé est connexe par arcs.

2) Pour qu'un réel x soit le carré d'un réel, il faut et il suffit que $x \geq 0$.

Si x est un carré, x est positif en vertu de la règle des signes.

Réciproquement, soit $x > 0$. Considérons la fonction $f(t) = t^2 - x$. Elle est continue, et telle que $f(0) = -x < 0$ et $f(x+1) = x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 > 0$. En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule dans l'intervalle ouvert $]0, x+1[$.

3) Théorème fondamental de l'algèbre : \mathbf{C} est algébriquement clos.

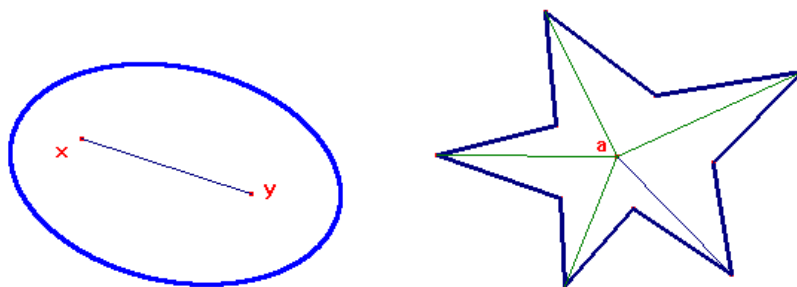
Laplace esquissa en 1795 une démonstration de ce théorème, et Gauss donna en 1816 une démonstration de ce théorème (sa deuxième) à l'aide d'un seul lemme d'analyse, conséquence du théorème des valeurs intermédiaires : tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle. Le reste de ces preuves était purement algébrique.

4) Soit A une partie de \mathbf{R} , x un point de A . La composante connexe par arcs de x dans A est le plus grand intervalle de \mathbf{R} contenant x et inclus dans A . Il en résulte que la droite rationnelle \mathbf{Q} est un espace métrique totalement discontinu. Idem pour $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

5) Si A et B sont deux parties connexes par arcs telles que $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe par arcs. Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes par arcs telle que $\forall (i, j) \in I \times I \ A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup A_i$ est connexe par arcs. Ce résultat subsiste si pour tout couple $(i, j) \in I \times I$ il existe une chaîne d'indices (k_1, k_2, \dots, k_n) telle que

$$A_i \cap A_{k_1} \neq \emptyset, A_{k_1} \cap A_{k_2} \neq \emptyset, \dots, A_{k_n} \cap A_j \neq \emptyset.$$

6) Toute partie **convexe**, ou simplement **étoilée**, d'un espace vectoriel normé, est connexe par arcs. Une partie A est dite **étoilée** (en a) s'il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $[a, x] \subset A$. Une partie est convexe ssi elle est étoilée relativement à chacun de ses points.



7) Dans un \mathbf{R} -espace vectoriel normé de dimension ≥ 2 , ou un \mathbf{C} -evn de dimension ≥ 1 , toute sphère est connexe par arcs (noter que les sphères sont homéomorphes entre elles). Du coup, \tilde{C} est connexe par arcs.

8) Soit U un ouvert connexe par arcs de \mathbf{K}^n . Deux points quelconques a et b de U sont reliables l'un à l'autre par une ligne polygonale, qu'on peut même supposer formée de segments parallèles aux axes (utiliser le corollaire du TVI ; le même raisonnement montre qu'un ouvert connexe de \mathbf{K}^n ou d'un evn de dim finie est connexe par arcs).

9) Droites et plans affines et projectifs.

Enlevons un point à une droite affine réelle : on délimite deux deux-demi droites ouvertes, qui sont les composantes connexes par arcs. Enlevons un point à une droite projective réelle : on délimite une région, car la droite projective réelle s'identifie à un cercle.

Enlevons une droite à un plan affine réel : on délimite deux demi-plans. Enlevons une droite à un plan projectif réel : on délimite une seule région.

Enlevons deux droites distinctes à un plan affine réel : on délimite 3 ou 4 régions selon que les droites sont parallèles ou sécantes. Enlevons deux droites distinctes à un plan projectif réel : on délimite 2 régions.

10) Un célèbre **théorème de Jordan** stipule que si U est le cercle unité et $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est une injection continue, la "courbe de Jordan" $f(U)$ partage \mathbf{C} en deux composantes connexes, de frontière $f(U)$, dont une seule est bornée.

Ce théorème, naturel mais fort difficile, est déjà intéressant lorsque f est de classe C^2 , ou C^2 -par morceaux.

11) $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs dans $M_n(\mathbf{C})$. Cela signifie aussi que l'ensemble des bases d'un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie est connexe par arcs, autrement dit que l'on peut déformer continûment une base en une autre.

12) $GL_n(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes par arcs dans $M_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices de déterminant > 0 , resp. < 0 . En d'autres termes, si l'on choisit une orientation d'un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , on peut déformer continûment toute base directe (resp. indirecte) en une base directe (resp. indirecte), mais non une base directe en une base indirecte.

13) Le **groupe unitaire** $U(E)$ d'un espace hermitien E est compact et connexe par arcs.

14) Le **groupe orthogonal** $O(E)$ d'un espace euclidien E est compact et a deux composantes connexes par arcs : $O_+(E)$ et $O_-(E)$.

Les résultats énoncés en 13 et 14 découlent des théorèmes spectraux relatifs aux endomorphismes unitaires et orthogonaux. Ils peuvent permettre d'établir ceux qui sont énoncés en 11 et 12, via la factorisation dite "Q-R", i.e. orthogonale ou unitaire-triangulaire, elle-même conséquence de Gram-Schmidt. Mais on peut aussi établir 11 et 12 en reliant à I_n les générateurs du groupe linéaire, fournis par le pivot de Gauss.

15) Topologie de la grassmannienne.

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n , $(x | y)$ son produit scalaire, $\|x\|$ la norme associée. Soit $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E , munie de la norme subordonnée $\|u\| = \sup\{\|u(x)\|; \|x\| \leq 1\}$, \mathcal{P} l'ensemble des orthoprojecteurs de E , i.e. des projecteurs autoadjoints de E . Pour tout sous-espace vectoriel F de E , notons p_F l'orthoprojecteur sur F . \mathcal{P} est un sous ensemble compact de $\mathcal{L}(E)$, ayant $n+1$ composantes connexes par arcs, à savoir les $\mathcal{P}_r = \{p \in \mathcal{P}; \text{rg } p = r\}$, $0 \leq r \leq n$.

Notons \mathcal{G} l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E (ou grassmannienne). On peut munir \mathcal{G} d'une distance par simple transport de structure, en convenant que la distance de deux sous-espaces est celle des orthoprojecteurs associés $d(F, G) = \|p_F - p_G\|$. (\mathcal{G}, d) étant alors isométrique à \mathcal{P} , et du coup est un espace métrique compact, ayant $n+1$ composantes connexes par arcs, à savoir les

$$\mathcal{G}_r = \{F \in \mathcal{G}; \dim F = r\}, \text{ où } 0 \leq r \leq n.$$

On montre par exemple que si D et D' sont deux droites, $d(D, D') = \sin \theta$, où $\theta \in [0, \pi/2]$ est l'angle non orienté des deux droites. Ainsi D' tend vers D ssi leur angle tend vers 0, ce qui est logique. Grâce à ces notions de limites de droites, de plans, etc. on peut définir rigoureusement la notion de tangente à une courbe plane ou gauche (comme limite de cordes passant par un point voisin), et de plan osculateur à une courbe gauche (comme limite de plans tangents passant par un point voisin).

16) Topologie et enclave des Papes.

Nous avons déjà parlé de la Drôme et du Vaucluse. Quiconque a visité la Tour de Carol, près de Fond-Romeu sait que la France métropolitaine n'est pas connexe par arcs...

17) Topologie proustienne.

« Il y avait autour de Combray deux « côtés » pour les promenades, et si opposés qu'on ne sortait pas en effet de chez nous par la même porte, quand on voulait aller d'un côté ou de l'autre : le côté de Méséglise-la-Vineuse, qu'on appelait aussi le côté de chez Swann parce qu'on passait devant la propriété de M. Swann pour aller par là, et le côté de Guermantes. (...) Mais surtout je mettais entre eux, bien plus que leurs distances kilométriques, la distance qu'il y avait entre les deux parties de mon cerveau où je pensais à eux, une de ces distances dans l'esprit qui ne font pas qu'éloigner, qui séparent et mettent dans un autre plan. Et cette démarcation était rendue plus absolue encore parce que cette habitude que nous avions de n'aller jamais vers les deux côtés un même jour, dans une seule promenade, mais une fois du côté de Méséglise, une fois du côté de Guermantes, les enfermait pour ainsi dire loin l'un de l'autre, inconnaisables l'un à l'autre, dans les vases clos et sans communication entre eux d'après-midi différents. » (Du côté de chez Swann, p. 127)

Ainsi, la topographie de Combray a deux composantes connexes : le côté de Méséglise est celui de la plaine et du mauvais temps, le côté de Guermantes celui de la rivière, et du beau temps. Elle est homéomorphe à celle du cerveau du Narrateur : le côté de Méséglise est dyonisiaque (c'est le côté du désir charnel et de la sensation), alors que le côté de Guermantes est apollinien (c'est le côté de l'intelligence et du rêve). Les récentes découvertes des neurosciences sur les fonctions différentes des lobes droit et gauche confirment ces intuitions proustiennes...

Exercices

Exercice 1 : Montrer que les courbes

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y^2 = x^3 - x\} \text{ et } C' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y^2 = x^3 - x + 1\}$$

sont fermées. Combien ont-elles de composantes connexes par arcs ? Et leurs complémentaires ?

Exercice 2 : Montrer que $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ est fermé et connexe par arcs.

Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 \neq 0\}$ est ouvert, et que :

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 > 0\},$$

$$C_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ et } z > 0 \} ,$$

$$C_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ et } z < 0 \}$$

sont trois ouverts connexes par arcs et sont les trois composantes connexes par arcs de E.

Généraliser à $C = \{ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbf{R}^n ; x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0 \}$ pour $n \geq 3$.

Exercice 3 : théorème du passage des douanes.

Soit E un espace métrique, A une partie de E, B une partie connexe par arcs rencontrant A et $E - A$. Montrer que B rencontre $\text{Fr}(A)$. En particulier, si E est connexe par arcs et A une partie $\neq \emptyset$ et $\neq E$, alors $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$. [Indication : considérer $d(x, A) - d(x, E - A)$.]

Exercice 4 : Existe-t-il une fonction continue $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ et $f(\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$?

Exercice 5 : (Concours général 2005, extrait).

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $\forall x \in [0, \frac{7}{10}] f(x + \frac{3}{10}) \neq f(x)$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins 7 solutions dans $[0, 1]$.

2) Donner un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ; on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

Exercice 6 : théorèmes de points fixes. Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbf{R} .

1) Soit $f: I \rightarrow I$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

2) Soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ continue, telle que $I \subset f(I)$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

3) Soit $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ continue, telle que $\int_a^b f(t).dt = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Montrer que f a au moins un point fixe.

4) Soient f et $g: I \rightarrow I$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $(\exists x \in I) f(x) = g(x)$.

5) Soit $f: I \rightarrow I$ croissante. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 7 : déterminations continues.

1) Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $(\forall z) f(z)^n = z$.

2) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f: \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\forall z \in \mathbf{C} f(\exp z) = z$.

3) Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\forall z \in \mathbf{C} \exp f(z) = z$.

Exercice 8 : Soient U le cercle unité de \mathbf{C} , et $f: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}$ continue. Montrer qu'il existe deux points P et Q diamétralement opposés tels que $f(P) = f(Q)$.

Exercice 9 : Justifier les affirmations de l'exemple 8.

Exercice 10 : problème du piéton.

Un piéton parcourt la distance D pendant le temps T. Soit $d \in [0, D]$; existe-t-il un intervalle de temps de durée $\frac{dT}{D}$ durant lequel il parcourt la distance d ? Montrer que si $\frac{d}{D} = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), la réponse est toujours positive, mais que, dans le cas contraire, elle ne l'est pas toujours.

$$[\text{Considérer } f(t) = (D + 1) \frac{t}{T} - \frac{\sin^2(\frac{\pi D}{dT})}{\sin^2(\frac{\pi d}{dT})} .]$$

Exercice 11 : théorème de Darboux (1874).

1) Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I de \mathbf{R} , à valeurs réelles. Montrer que la fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (et ce, même si f n'est pas de classe C^1).

[Indication : considérer la fonction $p(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ sur $\Delta = \{ (x, y) \in I^2 ; x < y \} .]$

2) Applications : a) Montrer que $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable sur \mathbf{R} , après prolongement en 0 ; que dire de sa dérivée ? b) Résoudre l'équation différentielle $y'.(y' - 1) = 0$.

Exercice 12 : théorème des accroissements finis vectoriel.

Soient $I = [a, b]$ un segment de \mathbf{R} , E un espace vectoriel normé, $f : I \rightarrow E$ une fonction vectorielle et $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction numérique dérivable et telles que $(\forall x \in I) \|f'(x)\| \leq g'(x)$.

Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

En déduire que $(\forall x \in I) \|f'(x)\| \leq M \Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq M.(b - a)$ et que $f' = 0 \Rightarrow f$ est constante.

[Ind. : Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $J_\varepsilon = \{ x \in I ; \forall t \in [a, x] \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \varepsilon.(t - a) \}$ est un ouvert-et-fermé $\neq \emptyset$ de I , ou montrer que $K_\varepsilon = \{ x \in I ; \|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon.(x - a) \}$ a pour borne supérieure b].

Exercice 13 : Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} , muni de la norme : $\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$.

On note $\Omega = \{ f \in E ; f(0) \neq 0, f(1) \neq 0 \text{ et } \forall t \in [0, 1] (f(t), f'(t)) \neq (0, 0) \}$.

1) Soit $f \in \Omega$. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est une partie finie de $[0, 1]$.

2) Soit $\Omega_1 = \{ f \in \Omega ; \text{card } f^{-1}(\{0\}) = 1 \}$. Montrer que Ω_1 est un ouvert de E . Décrire les composantes connexes par arcs de Ω_1 .

3) Montrer que Ω est un ouvert de E ; décrire ses composantes connexes par arcs.

Exercice 14 : Dans le plan euclidien, on considère la spilog d'équation polaire $\rho = C.e^{m\theta}$. Si Γ est son graphe, $\Gamma \cup \{O\}$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 14 : Dans le plan euclidien, soit $A = \{ (x, \sin \frac{1}{x}) ; x > 0 \}$. \overline{A} est-elle connexe par arcs ?

Exercice 15 : Deux ouverts de \mathbf{R}^2 sont dits « imbriqués » s'ils sont connexes par arcs, d'intersection vide, et de même frontière. Montrer que le cercle unité et la courbe d'équation polaire $r = \frac{\theta}{1+|\theta|}$ délimitent deux ouverts imbriqués.

G. Espaces métriques de type dénombrable

La droite numérique possède la propriété suivante : il existe une partie dénombrable dense, à savoir \mathbf{Q} . Cette propriété a toute une série de conséquences qui sont vérifiées par une classe d'espaces métriques, les espaces *de type dénombrable*, parfois appelés *séparables*.⁵⁵

Problème.

1) Bases d'une topologie. Soit (E, d) un espace métrique. On appelle *base d'ouverts* toute famille $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'ouverts de E telle que tout ensemble ouvert soit réunion d'une sous-famille de $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

a) Exemples :

— Montrer que les boules ouvertes forment une base d'ouverts ;

— Soit D une partie dense de E ; montrer que $(B(a, \frac{1}{k}))_{(a,k) \in D \times \mathbf{N}^*}$ est une base d'ouverts.

b) Soit $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'ouverts de E . Montrer que c'est une base d'ouverts si et seulement si, pour tout $x \in E$ et tout voisinage V de x , il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x \in G_\lambda \subset V$.

2) Montrer l'équivalence des propriétés :

i) il existe une partie dénombrable dense dans E ;

⁵⁵ Pour des compléments sur les métriques séparables, cf. Y. Duval et D. Monasse, RMS mars 2007

- ii) il existe une base d'ouverts dénombrable de E ;
 - iii) de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.
- On dit alors que E est *de type dénombrable*, ou séparable.

3) Exemples :

- Montrer que les \mathbf{K}^n sont de type dénombrable ;
- Montrer que tout espace compact est de type dénombrable ;
- Soit $H = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ à éléments dans $[0, 1]$; montrer que H est un espace métrique de type dénombrable pour la distance $d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|$ (*cube de Hilbert*).

4) Théorème de représentation d'Urysohn.

Montrer que (E, d) est de type dénombrable si et seulement s'il est homéomorphe à un sous-espace de H . [Indication : Si E est de type dénombrable, et si $0 \leq d \leq 1$, soit $D = (a_n)$ une partie dénombrable dense, considérer $x \in E \rightarrow f(x) = (d(x, a_n))$.]

5) Espaces localement compacts de type dénombrable.

Soit (E, d) un espace métrique localement compact. Montrer l'équivalence des propriétés :

- a) E est de type dénombrable ;
 - b) il existe une suite (K_n) de compacts de réunion E ;
 - c) il existe une suite d'ouverts (U_n) vérifiant :
 - i) pour tout n , $\overline{U_n}$ est compact ;
 - ii) pour tout n , $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$;
 - iii) E est la réunion des U_n .
- [Indication : Montrer $c) \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow c)$. Pour $a) \Rightarrow c)$, considérer une suite dense (x_k) et les boules $B(x_k, \frac{1}{n})$, qui sont compactes pour n assez grand.]

6) Exemples (suite) : a) Montrer que $(\mathcal{C}[a, b], \mathbf{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ est de type dénombrable.

[Indication : noter que les fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbf{Q} sont denses.]

b) Soit X un ensemble infini ; montrer que $(\mathcal{B}(X, \mathbf{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ n'est pas de type dénombrable.

[Indication : noter que l'ensemble A des fonctions caractéristiques des parties de X n'est pas dénombrable, et que si D est une partie dense, $\forall f \in A \exists \phi_f \in D \ \|f - \phi_f\| < \frac{1}{2}$.]

7) Théorème de Cantor-Bendixson.

On rappelle qu'un ensemble P est dit *parfait* s'il est fermé sans point isolé.

Soit (E, d) un espace métrique de type dénombrable. Montrer que tout fermé F de E s'écrit $P \cup C$, où P est un ensemble parfait et C un ensemble dénombrable (non uniques en général).

[Indication : Un point x est appelé *point de condensation* de F si pour tout voisinage V de x , $V \cap F$ est non dénombrable ; noter P l'ensemble des points de condensation de F et $C = F - P$.]

H. Distance de Hausdorff

H.1. L'ensemble triadique de Cantor.

Introduit en 1883 par Georg Cantor, l'ensemble triadique, parfois appelé « poussière de Cantor » avait déjà été considéré par Henry Smith⁵⁶ en 1875. Il possède des propriétés paradoxales. De plus, ses propriétés géométriques le font apparaître, rétrospectivement, comme le plus simple des

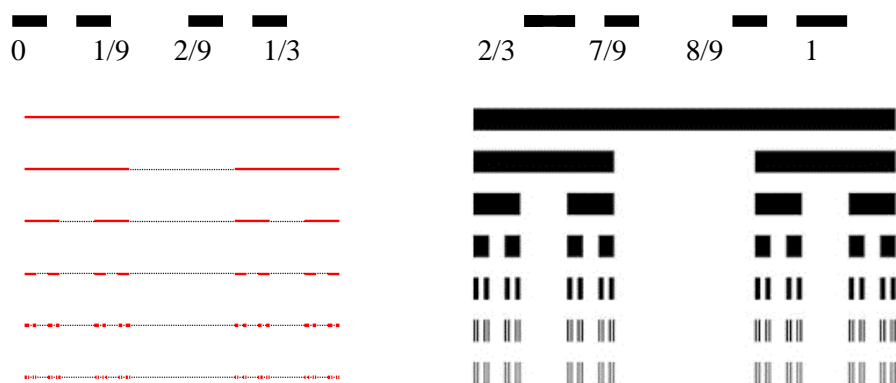
⁵⁶ **Henry Smith** (1826-1883) fit surtout des travaux d'algèbre et de théorie des nombres ; il étudia notamment les systèmes linéaires et les formes quadratiques à coefficients dans \mathbf{Z} . Au cours d'un toast, il s'exclama : « *Les mathématiques pures, puissent-elles ne servir jamais à rien !* ».

ensembles " fractals ". Son étude est une bonne illustration des résultats précédents, et introduit aux notions de distance et de dimension de Hausdorff, ainsi qu'aux systèmes dynamiques chaotiques.

Soit $A = F_0 = [0, 1]$. Si on lui enlève son tiers médian ouvert $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, il reste deux segments $K_0 = [0, \frac{1}{3}]$ et $K_1 = [\frac{2}{3}, 1]$, de réunion F_1 . Si on leur enlève leurs tiers médians ouverts, il reste 4 segments $K_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $K_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $K_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $K_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$, de réunion F_2 . Supposons définis par récurrence les 2^n segments K_s , $s = (s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ de réunion F_n ; si on leur enlève leurs tiers médians ouverts, on définit 2^{n+1} segments $K_{s,0}$ et $K_{s,1}$, en notant $K_{s,0}$ le tiers gauche et $K_{s,1}$ le tiers droit de K_s , de réunion F_{n+1} .

Par définition, l'ensemble triadique de Cantor est $K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$.

Ainsi, K est obtenu par un **processus répété d'évidement** du segment $[0, 1]$.



Théorème : K est un ensemble non dénombrable, compact, sans point isolé, d'intérieur vide dans \mathbf{R} , totalement discontinu, de mesure nulle.

Démonstration :

a) K est compact non vide.

K est bien sûr borné. Chaque F_n est fermé comme réunion d'un nombre fini de segments ; leur intersection est fermée comme intersection de fermés.

Remarque : De plus, tout ouvert de \mathbf{R} contenant K , contient l'un des F_n .

Il est clair que K contient 0 et 1, ainsi que $1/3$ et $2/3$, et toutes les extrémités des segments K_{s_1, \dots, s_n} .

Ce sont des rationnels, et même des rationnels triadiques.

Mais K contient bien d'autres points, comme nous allons le voir maintenant.

b) K est non dénombrable.

Supposons qu'existe une bijection $n \rightarrow x_n$ de \mathbf{N}^* sur K . Procédons par dichotomie.

L'un des deux segments K_0, K_1 ne contient pas x_1 , disons K_{s_1} ; l'un des deux tiers de K_{s_1} ne contient pas x_2 , soit K_{s_1, s_2} (si ça se trouve, aucun des deux tiers de K_{s_1} ne contient x_1). En réitérant, on construit une suite $(s_1, s_2, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ telle que $(\forall n) x_n \notin K_{s_1, \dots, s_n}$.

Soit $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_{s_1, \dots, s_n}$ (axiome des segments emboîtés). On a $a \in K_{s_1, \dots, s_n}$ et $x_n \notin K_{s_1, \dots, s_n}$, donc $a \neq x_n$ pour tout n , contredisant la surjectivité de $n \rightarrow x_n$.

c) Il en résulte que **K est sans point isolé**. En effet, soit $x \in K$. Pour tout n , soit $[a_n, b_n]$ le segment de F_n contenant x . L'un au moins des deux nombres a_n, b_n est distinct de x . Si on le choisit, on obtient une suite (x_n) de points de K tendant vers x par valeurs différentes : x est donc point d'accumulation de K . K est fermé sans point isolé : c'est un **ensemble parfait** de \mathbf{R} .

d) **K est d'intérieur vide, et totalement discontinu**.

Ces deux propriétés découlent d'une même troisième :

(*) K ne contient aucun intervalle de \mathbf{R} non réduit à un point.

En effet, si J est un intervalle inclus dans K , on a pour tout n , $J \subset F_n$. J est donc inclus dans l'un des 2^n segments K_{s_1, \dots, s_n} , donc est de longueur $\leq (1/3)^n$; donc J est de longueur nulle.

Si K avait un point intérieur a , il contiendrait un segment $[a - \alpha, a + \alpha]$, $\alpha > 0$, contredisant (*).

Enfin, la composante connexe par arcs d'un point x de K , c'est-à-dire le plus grand intervalle contenant x et inclus dans K , est réduite à $\{x\}$.

e) **K est de "mesure nulle", c'est-à-dire de longueur nulle**.

Encore faut-il donner une définition rigoureuse de cette notion ! En voici une, qui suffira ici :

si A est une partie bornée de \mathbf{R} dont la fonction caractéristique 1_A est Riemann-intégrable, nous appellerons *longueur*, ou *mesure de Riemann*, de A : $L(A) = \int_{\mathbf{R}} 1_A(x).dx$.

Or il se trouve que K est de mesure de Riemann nulle. En effet, la fonction caractéristique de F_n est une fonction en escalier dont l'intégrale $L(F_n) \downarrow 0$. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction 1_K est comprise entre deux fonctions en escaliers, la fonction nulle et la fonction caractéristique de F_n , dont la différence des intégrales est $< \varepsilon$. Le résultat en découle.

f) La fonction caractéristique de K est continue en tout point de l'ouvert $[0, 1] - K$, car localement constante, discontinue en tout point de K , car tout point de K est limite d'une suite de points de $[0, 1] - K$. Elle n'est pas réglée, puisqu'en ces points (par exemple au point $1/3$) elle n'a pas de limite à droite et à gauche.

g) **Description dichotomique des points de K**.

Notons S l'ensemble des suites $s = (s_1, s_2, \dots)$ à éléments dans $\{0, 1\}$. En vertu de l'axiome des segments emboîtés, pour toute suite $s \in S$, l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_{s_1, \dots, s_n}$ est réduite à un singleton $\{f(s)\}$,

où $f(s) \in K$. L'application $f: S \rightarrow K$ ainsi définie est bijective :

Elle est injective, car si s et t diffèrent au rang n , $K_{s_1, \dots, s_n} \cap K_{t_1, \dots, t_n} = \emptyset$ et a fortiori $f(s) \neq f(t)$.

Elle est surjective, car, pour tout $x \in K$, il existe une suite s telle que $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_{s_1, \dots, s_n}$.

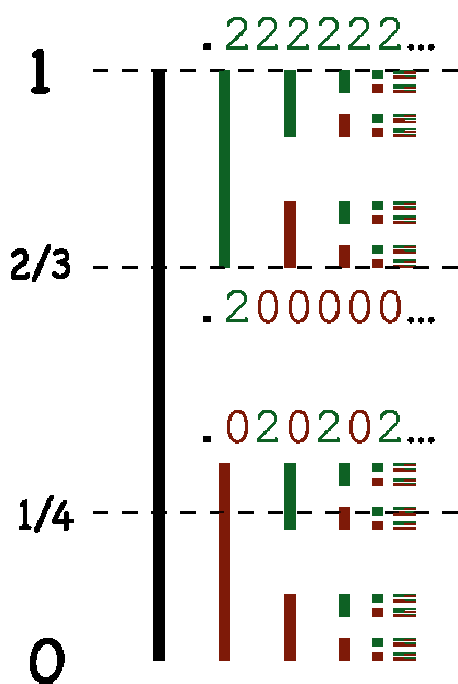
Cette suite se construit par récurrence et dichotomie : $s_1 = 0$ ou 1 selon que $x \in K_0$ ou K_1 .

Si s_1, \dots, s_n sont construits tels que $x \in K_{s_1, \dots, s_n}$, soit $s_{n+1} = 0$ ou 1 selon que x appartient au tiers gauche ou droit de ce segment. Alors on a bien $(\forall n) x \in K_{s_1, \dots, s_n}$.

En vertu de l'axiome des segments emboîtés, $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_{s_1, \dots, s_n}$, i.e. $f(s) = x$.

Cette bijection $f: S \rightarrow K$ permet de visualiser K comme un « arbre binaire infini ».

h) **Description triadique des éléments de K**.



On sait que tout réel $x \in [0, 1]$ admet un développement

triadique $0.s_1s_2s_3 \dots = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s_i}{3^i}$ où les chiffres

$$s_i \in \{0, 1, 2\}.$$

Ce développement est unique sauf pour les rationnels triadiques, qui admettent deux développements triadiques, l'un propre, l'autre impropre.

Ainsi $1/3 = 0.1000\dots = 0.0222\dots$

Or si l'on travaille en base 3, on a par récurrence sur n :

$$K_{s_1, \dots, s_n} = [a_n, b_n]$$

où $a_n = 0.2s_12s_2 \dots 2s_n$ et $b_n = a_n + 1/3^n$.

Du coup, si $x = f(s)$, alors $x = \lim a_n = 0.(2s_1)(2s_2) \dots (2s_n) \dots$ Ainsi, les éléments de K sont les réels $x \in [0, 1]$ admettant un développement en base 3 ne comportant que des 0 ou 2. Ainsi, $1/3 \in K$ puisqu'il s'écrit $0.0222\dots$ Enlever les tiers médians revient à enlever les réels dont les développements triadiques contiennent le chiffre 1. Et l'on peut traduire le résultat de e) en termes probabilistes en disant que tout réel contient certainement (*i.e.* avec

une probabilité 1) le chiffre 1.

k) Description géométrique de l'ensemble K .

Notons h et k les homothéties resp. de centre 0 et 1 de rapport $\frac{1}{3}$, $h(x) = \frac{x}{3}$ et $k(x) = \frac{x+2}{3}$.

À toute partie A de \mathbf{R} associons $T(A) = h(A) \cup k(A)$.

Il est facile de montrer par récurrence que $(\forall n) F_{n+1} = T(F_n)$ et $T(K_{s_1, \dots, s_n}) = K_{0, s_1, \dots, s_n} \cup K_{1, s_1, \dots, s_n}$.

On en déduit que $T(K) = K$. K est donc un point fixe de l'opérateur T agissant dans l'ensemble \mathfrak{K} des compacts non vides de la droite numérique.

Pour montrer que K est l'unique point fixe, et qu'on est dans le cadre du théorème de point fixe, il faudrait munir \mathfrak{K} d'une distance pour laquelle il soit complet et T soit un opérateur contractant : c'est précisément l'objet du prochain §.

Remarque : On trouvera diverses visualisations graphiques de l'ensemble de Cantor sur le site :

<http://www.mathcurve.com/fractals/>

Exercices

Exercice 1 : On considère la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$. Quel est l'ensemble décrit par les sommes $\sum_{n \in A} \frac{1}{3^n}$, lorsque A décrit l'ensemble des parties de \mathbf{N}^* ?

Exercice 2 : Soient $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}$ et $y = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{y_i}{3^i}$ deux éléments de K , où x_i et $y_i \in \{0, 1, 2\}$. On définit

$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{z_i}{3^i}$, où $z_{2k-1} = x_k$ et $z_{2k} = y_k$. Montrer que $\Phi : K \times K \rightarrow K$ est un homéomorphisme.

Exercice 3 : K comme ensemble de Julia.

Soit f la fonction : $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 3x$ si $x \leq \frac{1}{2}$, $f(x) = 3 - 3x$ si $x \geq \frac{1}{2}$.

Quel est l'ensemble des réels a tels que la suite récurrente $x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$ soit bornée ?

Exercice 4 : Décrire l'ensemble $K + K$, où K est l'ensemble de Cantor [Considérer $F_n + F_n$.]
En déduire que les endomorphismes f de $(\mathbf{R}, +)$ bornés sur K sont de la forme $x \rightarrow ax$.

Exercice 5 : Soit S l'ensemble des suites $s = (s_1, s_2, \dots)$ à éléments dans $\{0, 1\}$.

- 1) Montrer que $d(s, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |s_n - t_n|$ est une distance sur S .
- 2) Quelles sont les suites convergentes dans (S, d) ?
- 3) Montrer que (S, d) est compact, non dénombrable et sans point isolé.
- 4) Montrer que $f: s = (s_1, s_2, \dots) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2s_n}{3^n}$ est un homéomorphisme de S sur K .

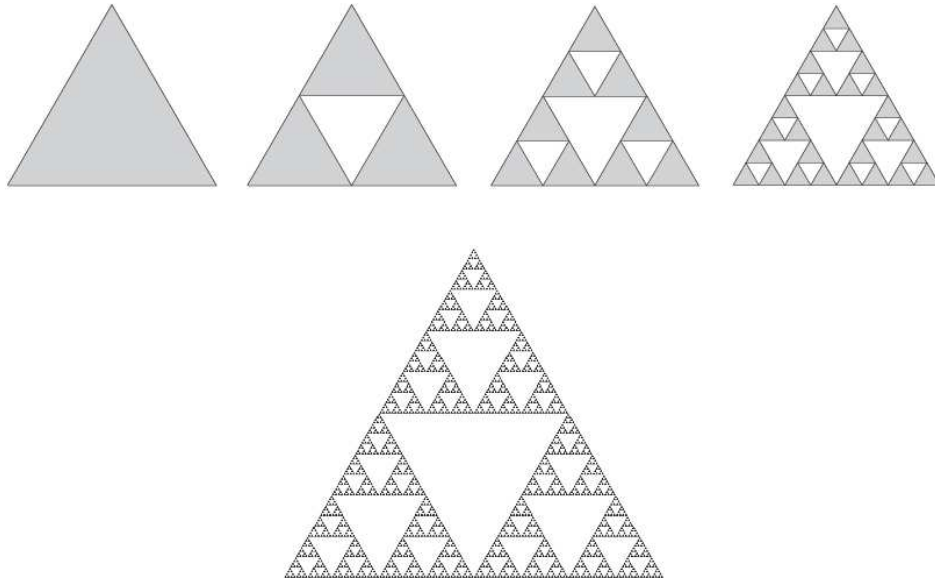
Exercice 6 : La fonction de Cantor-Lebesgue, ou l'escalier du diable.

A toute fonction continue $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, on associe la fonction Lg définie par :

$$Lg(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} g(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} g(3x - 2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que Lg est continue sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $f = L(f)$.
- 2) Indiquer une suite (f_n) de fonctions continues, croissantes, affines par morceaux tendant uniformément vers f . Représenter graphiquement ces fonctions.
- 3) Montrer que f est croissante et vérifie $(\forall x) f(1-x) = 1 - f(x)$. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.
- 4) Soit x un point de K (ensemble de Cantor), et $x = 0.(2a_1)(2a_2)(2a_3)\dots$ son développement triadique où $a_i \in \{0, 1\}$. Montrer que $f(x)$ a pour développement dyadique $0.a_1a_2a_3\dots$. Montrer que f induit un homéomorphisme de K (ensemble de Cantor) sur $[0, 1]$.
- 5) Montrer que $f'(x) = 0$ en tout point $x \notin K$; f est-elle dérivable en un point de K ?
- 6) Montrer que f est rectifiable de longueur 2.

Exercice 7 (napperon de Sierpinski, 1915) : Soient ABC un triangle équilatéral, T l'ensemble des barycentres $\lambda A + \mu B + \nu C$, où $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{2^i}$, $\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu_i}{2^i}$, $\nu = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\nu_i}{2^i}$ sont tels que $(\forall i) \lambda_i + \mu_i + \nu_i = 0$.
 T est-il ouvert, fermé, compact ? Quelle est son aire ? son périmètre ? Dessiner T .



2. Distance et dimension de Hausdorff.

Il existe plusieurs moyens pour définir la distance de deux parties du plan ou d'un espace métrique, et la convergence d'une suite d'ensembles vers un ensemble-limite. La plus connue est celle de Hausdorff, à laquelle introduit le problème suivant. Mais ce n'est pas la seule. La distance de Hausdorff présente des avantages et des inconvénients, selon le type de problème étudié.

Problème

Soient (E, d) un espace métrique, \mathcal{F}^\bullet l'ensemble des parties fermées bornées non vides de E .

Pour toute partie $A \in \mathcal{F}^\bullet$, on note d_A la fonction $x \in E \rightarrow d(x, A) \in \mathbf{R}^+$.

Première partie : épaississement d'une partie.

- 1) a) Montrer que $\forall (x, y) \in E \times E \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$.
b) En déduire que la fonction d_A est continue.
- 2) On appelle **épaississement de A** de rayon r l'ensemble $V(A, r) = \{x \in E ; d(x, A) \leq r\}$.
a) Montrer que $V(A, r)$ est un fermé de E ; reconnaître $\bigcap_{r \geq 0} V(A, r)$.
b) Exemples :
i) Si $A = B'(a, s)$ dans un espace *normé*, reconnaître $V(A, r)$;
ii) Si A est la Norvège, dessiner $V(A, r)$ pour différentes valeurs de r .
iii) Si A est un individu, dessiner $V(A, r)$, où $r = 1$ mètre (humour covid).

3) Démontrer que tout fermé de E est intersection d'une suite décroissante d'ouverts, et tout ouvert de E est réunion d'une suite croissante de fermés.

Deuxième partie : distance de Hausdorff.

- 1) a) Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{F}^\bullet \times \mathcal{F}^\bullet$, la fonction $x \rightarrow d(x, A) - d(x, B)$ est bornée.
b) On pose $\delta(A, B) = \|d_A - d_B\|_\infty$; montrer que c'est une distance sur \mathcal{F}^\bullet (**distance de Hausdorff**).
- 2) Montrer que $\delta(A, B) \leq \rho \Leftrightarrow A \subset V(B, \rho)$ et $B \subset V(A, \rho)$.
En déduire $\delta(A, B) = \inf \{ \rho \geq 0 ; A \subset V(B, \rho) \text{ et } B \subset V(A, \rho) \}$.

puis : $\delta(A, B) = \max (\sup_{x \in A} d(x, B) , \sup_{x \in B} d(x, A))$.

3) Exemples :

a) Soit E un espace vectoriel normé, $A = B'(a, r)$ et $B = B'(b, s)$ deux boules fermées ; calculer $\delta(A, B)$. Quand a-t-on $B \rightarrow A$?

b) Soit (K_n) une suite décroissante de compacts $\neq \emptyset$, d'intersection K ; montrer que $K_n \rightarrow K$.

4) On revient au cas général. Montrer que si $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathfrak{F}^\bullet$, on a :

$$\delta(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max(\delta(A_1, B_1), \delta(A_2, B_2)) . \text{ Conséquence ?}$$

5) On admet que si (E, d) est complet, $(\mathfrak{F}^\bullet, \delta)$ est complet.

Soit E un evn de dimension finie, $(T_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie d'applications contractantes $E \rightarrow E$. Montrer que $A \rightarrow T(A) = \bigcup T_i(A)$ est contractante de \mathfrak{F}^\bullet dans \mathfrak{F}^\bullet . Conséquences?

En particulier, si E est un evn, et $(H_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie d'homothéties $H_i = \text{hom}(a_i, \lambda_i)$ de centres a_i et de rapports $|\lambda_i| < 1$ que dire de $A \rightarrow T(A) = \bigcup H_i(A)$?

6) Exemples :

i) $E = \mathbf{R}$, $H_1 = \text{hom}(0, \frac{1}{3})$, $H_2 = \text{hom}(1, \frac{1}{3})$;

ii) $E = \mathbf{R}^2$, ABC triangle équilatéral, $H_1 = \text{hom}(A, \frac{1}{2})$, $H_2 = \text{hom}(B, \frac{1}{2})$, $H_3 = \text{hom}(C, \frac{1}{2})$;

iii) $E = \mathbf{R}^2$, $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = 1$; S_j ($0 \leq j \leq 3$) est la similitude directe

qui envoie a_0 sur a_j et a_4 sur a_{j+1} .

Problème : Dimension de Hausdorff-Besicovitch

Soit (E, d) un espace métrique, \mathfrak{K}^\bullet l'ensemble des compacts non vides de E .

Soient $K \in \mathfrak{K}^\bullet$, α un réel > 0 .

Une partie A de K est dite α -discernable si $\forall (x, y) \in A^2$ $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > \alpha$.

Une partie F de K est dite α -réseau si $\forall x \in K$ $d(x, F) \leq \alpha$.

1) Montrer que toute partie α -discernable de K est finie, et qu'il existe un α -réseau fini dans K .

2) Soit $M(\alpha, K)$ le plus grand entier m tel qu'il existe une partie α -discernable de K de cardinal m ,
 $N(\alpha, K)$ le plus petit entier n tel qu'il existe un α -réseau fini dans K de cardinal n .

a) Montrer que les fonctions $\alpha \rightarrow M(\alpha, K)$ et $\alpha \rightarrow N(\alpha, K)$ sont décroissantes sur \mathbf{R}_+^* ;

b) Montrer que : $\forall \alpha > 0$ $M(2\alpha, K) \leq N(\alpha, K) \leq M(\alpha, K)$; en déduire que $M(\alpha, K) < +\infty$.

3) On dit que K admet une HB-dimension si $\frac{\ln N(\alpha, K)}{-\ln \alpha}$ a une limite quand $\alpha \rightarrow 0+$, et l'on note

$$\dim K = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\ln N(\alpha, K)}{-\ln \alpha} . \text{ Montrer que, si tel est le cas, } \dim K = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\ln M(\alpha, K)}{-\ln \alpha} .$$

Si K, K' et K'' sont trois compacts tels que $K \subset K' \subset K''$ et $\dim(K) = \dim(K')$, que dire de K'' ?

Si K et K' ont une HB-dimension, montrer que $K \cup K'$ aussi et $\dim(K \cup K') = \max(\dim K, \dim K')$.

4) Si l'on remplace la distance d par une distance équivalente d' , montrer que la HB-dimension reste la même.

5) Exemples : Trouver les HB-dimensions d'une partie finie, du segment $[0, 1]$, du carré $[0, 1]^2$, de l'ensemble triadique de Cantor, de la courbe de Von Koch, du napperon de Sierpinski. Comparer les HB-dimensions d'une forêt de hêtres et d'une forêt de chênes.

3. Courbes de Peano.

« J'ai la plus grande estime pour M. Peano, qui a fait de très jolies choses (par exemple sa courbe qui remplit toute une aire), mais enfin, il n'est allé ni plus loin, ni plus haut, ni plus vite que la plupart des mathématiciens aptères et il aurait pu faire tout aussi bien avec ses jambes », ironise Henri Poincaré, qui ajoute : « Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères et on n'en tirera jamais que cela. » Les développements mathématiques récents (systèmes dynamiques, géométrie fractale) infirment ces jugements de valeur. Novateur en mathématiques et en physique, Poincaré avait en philosophie des sciences des positions conservatrices, et, ne lui en déplaise, Giuseppe Peano fut un grand mathématicien.



Giuseppe Peano (1858-1932)

Problème

On note I le segment $[0, 1]$, Q le carré $[0, 1]^2$ de \mathbf{R}^2 , et on identifie \mathbf{R}^2 à \mathbf{C} via $(x, y) \rightarrow x + i.y$.

1) Montrer qu'il existe une bijection $I \rightarrow Q$ (**Cantor**, 1878), mais qu'aucune bijection $I \rightarrow Q$ n'est continue (**Netto**, 1879).

Peano donna en 1890 un exemple de surjection continue $I \rightarrow Q$, c'est-à-dire de courbe paramétrée continue remplissant tout un carré. **Hilbert** en donna en 1891 un autre exemple, que nous allons étudier. On introduit les 4 transformations suivantes $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$:

$$\mathcal{K}_0 : z \rightarrow \frac{i}{2} \bar{z}, \quad \mathcal{K}_1 : z \rightarrow \frac{z+i}{2}, \quad \mathcal{K}_2 : z \rightarrow \frac{z+1+i}{2}, \quad \mathcal{K}_3 : z \rightarrow -\frac{i}{2} \bar{z} + 1 + \frac{i}{2}.$$

Pour toute partie A de \mathbf{C} , on pose $\mathcal{K}(A) = \bigcup_{0 \leq k \leq 3} \mathcal{K}_k(A)$.

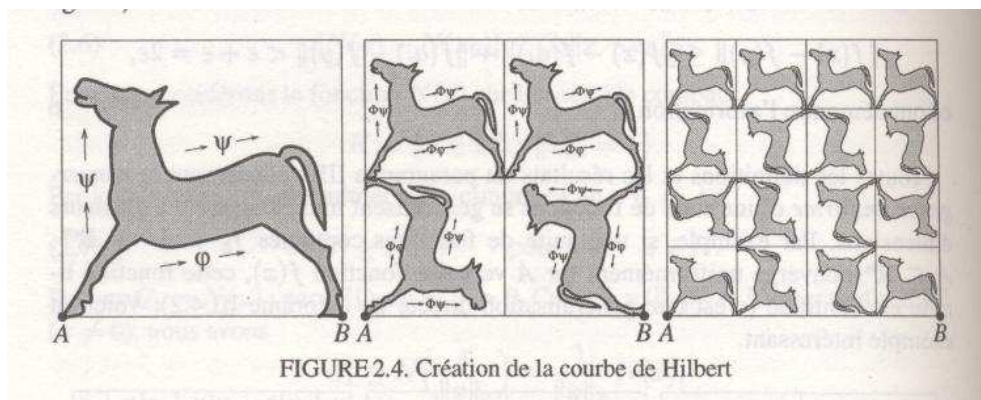
2) Natures géométriques des \mathcal{K}_k , $0 \leq k \leq 3$ (on cherchera leurs points fixes). Préciser les images $\mathcal{K}_k(Q)$, et $\mathcal{K}(Q)$.

3) A toute fonction continue $\varphi : I \rightarrow Q$ telle que $\varphi(0) = (0, 0) = 0$ et $\varphi(1) = (1, 0) = 1$, on associe la fonction $H\varphi : I \rightarrow Q$ définie par : $H\varphi(1) = 1$ et $H\varphi(t) = \mathcal{K}_{q_1}(\varphi(4t - q_1)) = \mathcal{K}_{q_1}(\varphi(0, q_2, q_3 \dots))$ si $t \in [0, 1[$ a pour développement 4-adique propre $t = 0, q_1 q_2 q_3 \dots$, $0 \leq q_k \leq 3$.

Montrer que $H\varphi$ est continue $I \rightarrow Q$ et que $(H\varphi)(I) = \mathcal{K}(\varphi(I))$.

A l'aide du théorème du point fixe, montrer qu'il existe une unique fonction $f : I \rightarrow Q$ telle que $f = Hf$. Montrer que $f(I) = Q$ [On notera que $f(I)$ contient $\{0, 1\}$ et ses itérés par \mathcal{K} ; mais on pourra aussi utiliser le pb sur la distance de Hausdorff.]

4) Ecrire un programme prenant en argument φ et traçant l'arc paramétré associé à $H\varphi$ et à ses itérés.



Felix Hausdorff

La renommée du mathématicien allemand Felix Hausdorff (Breslau, 1868 - Bonn, 1942) repose surtout sur son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), qui en fit le fondateur de la topologie et de la théorie des espaces métriques. Né à Breslau dans une famille de marchands aisés, Hausdorff fit ses études secondaires à Leipzig, puis étudia les mathématiques et l'astronomie à Leipzig, Fribourg-en-Brisgau et Berlin. En 1891, il obtint son doctorat à Leipzig et y enseigna de 1896 à 1902. Durant toute cette époque, Hausdorff, tout en publiant plusieurs mémoires d'astronomie, d'optique et de mathématiques, s'intéressa surtout à la philosophie, la littérature et l'art. Esprit indépendant et éclectique, il publia sous le nom de Paul Mongré deux livres de poèmes et d'aphorismes, plusieurs essais philosophiques et littéraires et écrivit une farce qui, portée sur les planches, eut un grand succès. À partir de 1904 cependant, il se pencha plus intensivement sur les mathématiques, sur la théorie des ensembles plus particulièrement, et abandonna peu à peu ses publications non scientifiques. De 1910 à 1935, il était professeur de mathématiques à l'université de Bonn, à l'exception des années 1913-1921, où il enseignait à Greifswald. Depuis sa retraite forcée, en 1935, les travaux de Hausdorff ne furent plus publiés en Allemagne. Juif, Hausdorff risqua le camp de concentration et, lorsqu'en 1942 l'internement devint imminent, il se suicida à Bonn, avec sa femme et sa belle-sœur. [La rue où ils habitaient porte aujourd'hui son nom.]



Les contributions de Hausdorff au développement des mathématiques se situent dans plusieurs domaines. Son étude approfondie des séries déboucha sur la démonstration de théorèmes sur les méthodes de sommation et les coefficients de Fourier (1921). Considérant les propriétés d'ensembles numériques, il introduisit une classe importante de mesures et, en liaison avec elles, une dimension qui peut prendre des valeurs arbitraires non négatives (1919). Il a étudié, en théorie générale des ensembles, les ensembles partiellement ordonnés et a obtenu plusieurs théorèmes sur les ensembles ordonnés (1906-1909). En théorie descriptive des ensembles, il a démontré le théorème sur la cardinalité des ensembles boréliens (1916).

Outre des résultats isolés mais profonds en topologie et en théorie des ensembles, Hausdorff a surtout, par ses *Grundzüge der Mengenlehre*, posé les fondements d'une discipline. Fréchet, désireux d'unifier la théorie des ensembles de Cantor et le traitement des fonctions comme points d'un espace tel qu'on le rencontrait alors couramment en calcul des variations, avait inauguré

l'étude des espaces abstraits (1906) en introduisant la notion d'espace métrique. Il existait alors plusieurs approches à la notion d'espace topologique. Hausdorff réussit à établir des liens entre ces différentes approches et à créer une théorie des espaces topologiques et métriques englobant parfaitement les résultats antérieurs. Il choisit de construire sa théorie des espaces abstraits sur la notion de voisinage. Sa définition d'espace topologique est exactement celle qu'on peut lire aujourd'hui dans tout manuel de topologie. Il ajouta bon nombre de résultats nouveaux à la théorie des espaces métriques, dont le plus profond est le théorème affirmant que chaque espace métrique peut être étendu d'une manière unique à un espace métrique complet. Il effectua cette extension en généralisant les constructions des réels de Méray et de Cantor. Grâce à son sens de l'équilibre et à sa grande sensibilité esthétique, Hausdorff a su donner à l'exposé de sa théorie dans *Grundzüge der Mengenlehre* (*Eléments de la théorie des ensembles*) une forme très dynamique, fournissant un formidable élan à son développement ultérieur.

Hausdorff était un professeur méthodique, mais ses cours, au contenu riche et rigoureusement structuré, passèrent au-dessus du niveau de ses auditeurs.

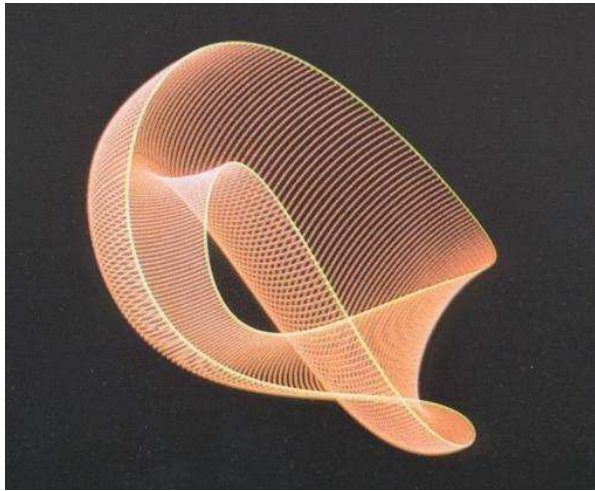
Jeanne Peiffer (Encyclopedia Universalis)

La publication des Œuvres complètes de Felix Hausdorff est en cours chez Springer. Elle inclut ses œuvres littéraires et philosophiques, ainsi qu'une biographie.

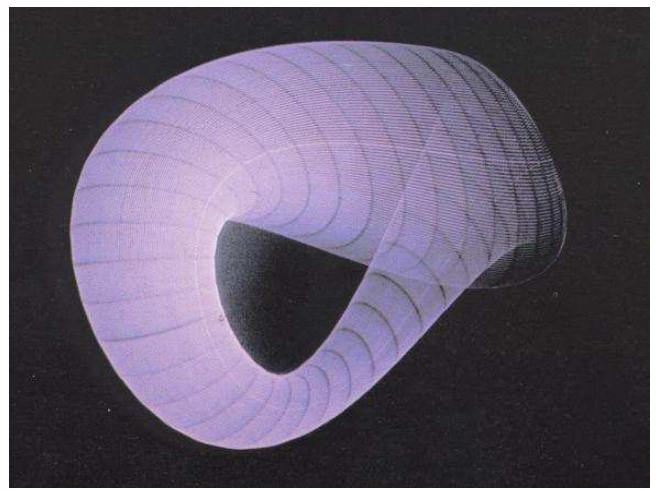
Bibliographie

- Jean Dieudonné : Éléments d'Analyse, t.1 (Gauthier-Villars)
 Nicolas Bourbaki : Topologie générale (Hermann)
 James Dugundji : Topology
 Marcel Berger : Géométrie (Cédic Nathan)
 Yves Sonntag : Topologie et analyse fonctionnelle
 Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences, D. Lecourt (Puf), article Topologie
 Encyclopedia Universalis, articles ⁵⁷
 Analyse mathématique , Notion de limite (Th.) , Continu et discret,
 Espaces métriques , Topologie, Espaces vectoriels topologiques ,
 Espaces vectoriels normés
 Baire René (1874-1932) Th. Dieudonné Jean (1906-1992) Th.
 Banach Stefan (1892-1945) Fréchet Maurice (1878-1973) Th.
 Bolzano Bernard (1781-1848) Hausdorff Félix (1868-1942) Th.
 Borel Émile (1871-1956) Hilbert David (1862-1943)
 Bourbaki Nicolas Lebesgue Henri (1875-1941)
 Cantor Georg (1845-1918) Luzin Nikolaï (1883-1950) Th.
 Cartan Henri (1904-2008) Th. Picard Émile (1856-1941)
 Cauchy Louis-Augustin (1789-1857) Weierstrass Karl (1815-1894)
 Dedekind Richard (1831-1916) Weil André (1906-1998) Th
- Wikipedia, entre autres :
 Espaces métriques, espaces pseudo-métriques, etc.
 Felix Hausdorff, distance de Hausdorff, dimension de Hausdorff

⁵⁷ Les articles suivis de la mention Th. se trouvent dans le Thesaurus, les autres dans le Corpus.



bande de Möbius



bouteille de Klein