

Géométrie du triangle

1. Pythagore, Al'Kashi, Ptolémée...
2. Cas d'égalité et de similitude.
3. Théorèmes de Menelaüs et Ceva.
4. Concours et cercle d'Euler.
5. Droites de Wallace-Simson.
6. Bissectrices, théorème de Feuerbach.
7. Formulaire.
8. De nouveaux cercles.
9. Euler, Poncelet.
10. Inversion isogonale, point de Lemoine.
11. Problèmes d'extrema.
12. Trois problèmes célèbres : Pappus, Castillon, Malfatti.
13. Théorème de Morley.

Exercices

à Roger Coillet Matillon

Pierre-Jean Hormière

*Quarante enfants dans une salle,
Un tableau noir et son triangle,
Un grand cercle hésitant et sourd
Son centre bat comme un tambour.*

Jules Supervielle

Introduction

Le triangle est ici étudié dans son environnement naturel, le plan affine euclidien, et l'on ne distingue guère les propriétés affines des propriétés métriques. Les démonstrations choisies sont élémentaires : elles utilisent les théorèmes de Thalès, Menelaüs, et Ceva, les propriétés des homothéties, des produits scalaires, etc. On pourrait aussi les établir par voie analytique, soit en partant des coordonnées des sommets, soit en partant des équations d'Euler des côtés, soit en repérant les points par leurs coordonnées barycentriques par rapport aux sommets. Enfin, on pourrait aussi utiliser les nombres complexes : les calculs sont élégants si l'on prend soin d'inscrire le triangle dans le cercle unité.¹

L'excellent livre d'Yvonne et René Sortais, publié chez Hermann grâce à l'indépendance d'esprit et la souveraineté d'un éditeur hors pair, Pierre Berès², a inspiré cet exposé, ainsi que les sympathiques numéros de la revue *Tangente* consacrés au triangle et au cercle.

Les démonstrations ne sont pas toutes complètes, provisoirement ou volontairement.

Les figures ont été tracées avec Cabri-géomètre.

¹ Cf. mes chapitres Géométrie plane et nombres complexes, § 3, et Calcul barycentrique.

² **Pierre Berès** (1913-2008) a ouvert avant guerre une librairie avenue Friedland. Il a racheté les éditions Hermann en 1956, et a longtemps imprimé les fascicules de N. Bourbaki ; son catalogue scientifique et littéraire (1200 titres) est remarquable. Grand bibliophile et expert, Pierre Berès possédait six des quarante et une *Illuminations* d'Arthur Rimbaud, parmi lesquelles *Génie* ; il les a montrées au public en 2004.

1. Pythagore, Al'Kashi, Ptolémée...

1.1. Généralités.

Définition : On appelle **triangle** la figure ³ plane formée par trois points A, B, C non alignés. A, B, C sont les **sommets** du triangle, les droites (AB), (BC) (CA), ou les segments [AB], [BC] et [CA] les **côtés**.

On distingue diverses sortes de triangles : rectangles, isocèles, rectangle-isocèles, équilatéraux, scalènes (c'est-à-dire non isocèles), acutangles (tous les angles sont aigus), obtusangles (sinon), etc.

Si le plan est orienté, le triangle ABC sera dit direct si le repère $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ l'est.

Notations : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs des côtés du triangle,

$$\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \hat{B} = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}), \hat{C} = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

les mesures des angles.

Si le triangle est direct, on peut supposer ces mesures dans $[0, \pi]$.

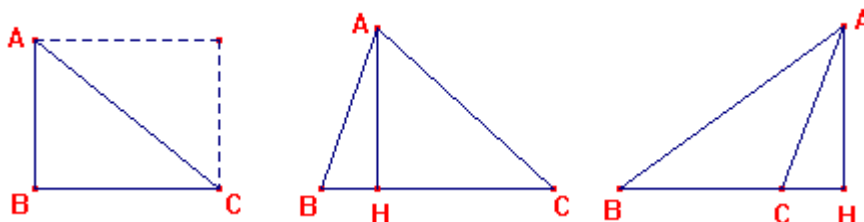
Dans son *Histoire de la géométrie*, Eudemus de Rhodes, disciple d'Aristote, affirme que le résultat suivant fut découvert par les pythagoriciens :

Proposition 1 : La somme des angles d'un triangle est égale à π .

Preuve : Mener de A la parallèle à la droite (BC), et réfléchir une seconde...

Proposition 2 : L'aire d'un triangle est le demi-produit de la base par la hauteur.

Preuve : Elle découle des trois figures suivantes :



Corollaire : Soient B et C deux points distincts fixés, Δ une droite parallèle à (BC). Lorsque M décrit Δ , tous les triangles MBC ont même aire.

1.2. Le théorème de Pythagore.

*Sur ma chair vient ta nuit concave, Anaxagore ;
Et l'éternel me chante, approche ou souvenir,
Un poème d'hier, un poème à venir :
« Tes disciples ardens le savaient, Pythagore... »*

Jorge Luis Borges, Nuit cyclique

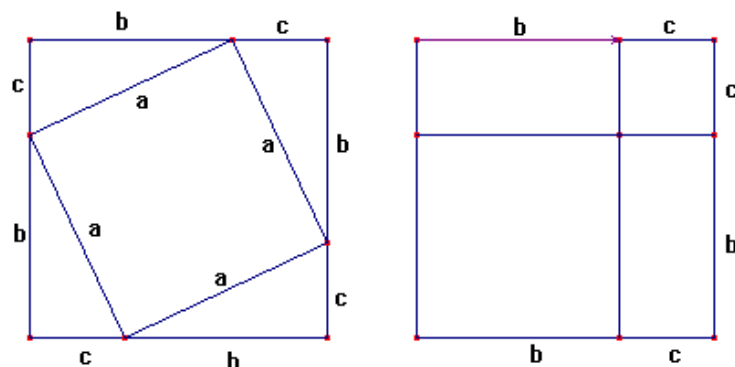
Théorème de Pythagore⁴ : Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$.



³ Le mot « figure » n'a été défini nulle part. Un triangle désigne ici, selon le contexte, tout à la fois le triplet de ses sommets, la réunion des segments qui les joignent, le domaine convexe qu'ils délimitent, la réunion des droites joignant les sommets, leurs représentations graphiques, etc.

⁴ Selon la légende, ce théorème fut inspiré à Pythagore par un carrelage égyptien composé de triangles rectangles isocèles, formant deux à deux ou quatre à quatre des carrés, le carré formé de deux triangles étant la moitié de celui formé des quatre. Bien que la tradition attribue universellement à Pythagore de Samos (580-497 av. J.-C) le théorème relatif au carré de l'hypoténuse, rien ne permet d'affirmer qu'il ait réellement été découvert par

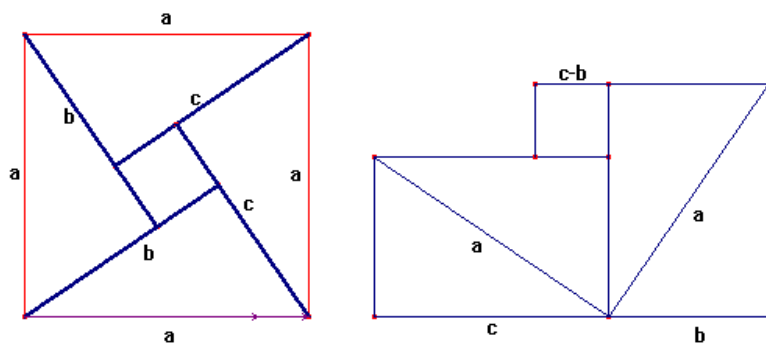
Nous démontrerons ici seulement la condition nécessaire. La preuve géométrique visuelle la plus simple du théorème de Pythagore est sans doute la suivante. Elle fut découverte au temps de l'empereur Wou-ti ou Wudi (140-87 av. J.C.), le plus glorieux souverain de la dynastie des Han.



$$a^2 + 2.bc = (b+c)^2 \text{ et } (b+c)^2 = 2bc + b^2 + c^2 \dots \text{ d'où } a^2 = b^2 + c^2 !$$

C'est l'occasion de rappeler que les Grecs ne connaissaient pas l'algèbre : leurs preuves devaient être géométriques. Comment montrer $(a+b)^3 = ?$ Et comme la dimension 4 n'existait pas, pouvaient-ils calculer, et même concevoir, $(a+b)^4$? Les exposants d'ordre élevé ont attendu Diophante, au III^e siècle ap. J. C. ; quant aux polynômes, ils attendent les arabes.

La preuve du mathématicien indien Bhaskara (1114-1181) est très voisine :

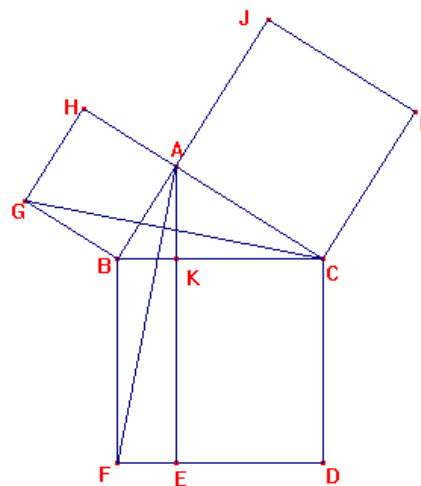


Le carré de gauche a pour aire $a^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + d^2$, où d est le côté du carré central. La seconde figure indique que $d = c - b$. Un calcul élémentaire conclut.

Exercice 1 : première preuve d'Euclide du thme de Pythagore.

Soit $T = ABC$ un triangle rectangle en A . On construit extérieurement à T les carrés $BCDF$, $ABGH$ et $ACIJ$. La hauteur issue de A recoupe BC en K et DF en E .

1) Montrer que les triangles BGC et BAF sont égaux, et que l'aire de BAF est la moitié de celle du rectangle $BFEK$.



lui. Les écrivains tardifs, Plutarque (46 ap. J-C), Athenaeus et Diogène Laërce (200 ap. J-C), qui lui attribuent ce théorème ajoutent que Pythagore a sacrifié un bœuf pour célébrer cette découverte. Ils se réfèrent tous à un distique d'Apollodore l'arithmétique, mais celui-ci ne dit pas quel théorème Pythagore a célébré par ce sacrifice ! Tout en signalant ces doutes, le grand historien des mathématiques grecques Thomas Heath apporte foi à la tradition. Mais il ajoute que les mathématiques indiennes peuvent aussi revendiquer ce théorème. L'*A pastamba-Sulba-Sutra*, qui remonte au moins au V^e siècle av J-C, signale un triangle rectangle de côtés 15, 36 et 39. Ajoutons que le chinois Liu Hui démontra le théorème de Pythagore en 270 av. J.C. La figure ci-dessus est donnée dans le *Livre du roi Chou-Pei-Suan*.

2) La parallèle à BC issue de G recoupe AC en M. Montrer que l'aire du triangle GBC est la moitié de celle du parallélogramme BCMG, puis de celle du carré ABGH.

3) Montrer de même que le carré ACIJ et le rectangle CKED ont même aire. Conclure.

Exercice 2 : deuxième preuve d'Euclide.

1) Montrer que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits.

2) Soit ABC un triangle rectangle en A, AH la hauteur issue de A. Montrer que les triangles ABC, HBA et HAC sont semblables. Conclure que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exercice 3 : de Thalès à Pythagore.

Soit T = ABC un triangle rectangle en A. La droite CB recoupe le cercle $\Gamma(B, BA)$ en M et N.

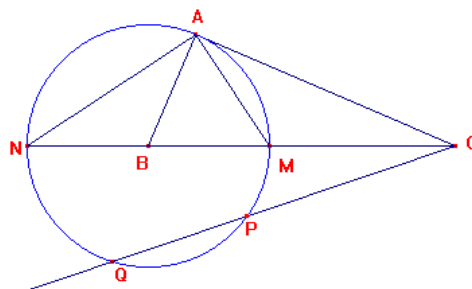
1) Montrer que les triangles CMA et CAN sont semblables. En déduire $\frac{CA}{CM} = \frac{CN}{CA}$.

2) Montrer que $CA^2 = \overline{CM} \cdot \overline{CN} = CB^2 - AB^2$.

3) Une corde issue de C recoupe le cercle Γ en P et Q.

Montrer que $\overline{CM} \cdot \overline{CN} = \overline{CP} \cdot \overline{CQ}$.

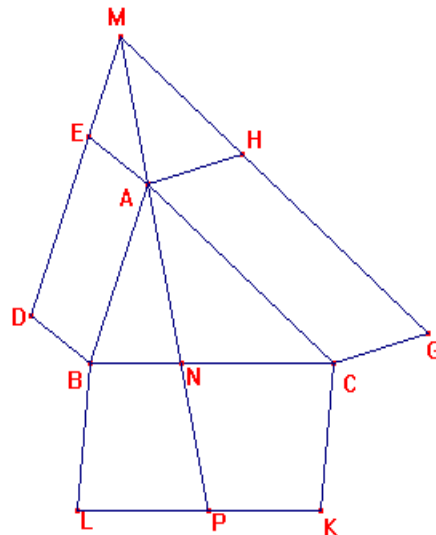
[Noter que B se projette sur la corde en le milieu de PQ, et utiliser Pythagore.]



Exercice 4 : preuve de Pappus du théorème de Pythagore.

1) Soit ABC un triangle quelconque. On construit deux parallélogrammes ABDE et ACGH sur les côtés AB et AC. Les droites GH et DE se coupent en M. La droite AM recoupe BC en N. Soit P le point tel que $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MA}$. Montrer que tout parallélogramme BCKL dont les sommets K et L sont situés sur la parallèle à BC menée de P a pour aire la somme des aires des parallélogrammes.

2) On suppose le triangle ABC rectangle en A, et on suppose que ABDE et ACGH sont des carrés. Retrouver Pythagore.



Exercice 5 : preuve de Garfield (1876).⁵

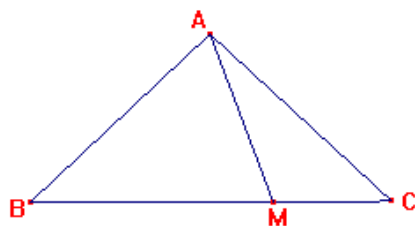
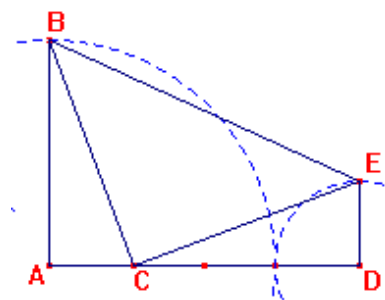
Soit BADE un trapèze rectangle en A et D, tel que

$$AD = AB + DE.$$

Sur le segment AD on porte le point C tel que $AB = CD$.

1) Montrer que le triangle BCE est rectangle isocèle.

2) En calculant de deux manières l'aire du trapèze, retrouver Pythagore.



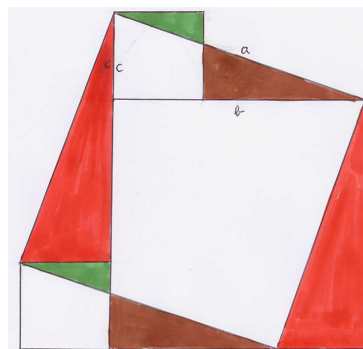
Exercice 6 : une généralisation de Pythagore.

Soit ABC un triangle isocèle en A, M un point de (BC). Montrer que $AB^2 = AM^2 + \overline{MB} \cdot \overline{MC}$.

⁵ **James Abraham GARFIELD** (1831-1881), élu en 1881 vingtième président des Etats-Unis, fut assassiné 6 mois et 15 jours après son investiture. Pour une fois qu'un président américain était philomathe !...

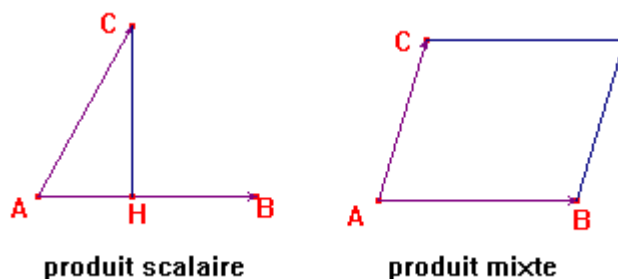
Exercice 7 : une preuve par découpage.

Indiquer une preuve par découpage de Pythagore, suggérée par la figure ci-dessous :



1.3. Al-Kashi, Ptolémée, etc.

Si l'on veut faire de la géométrie plane sérieuse, il faut introduire ici deux notions duales l'une de l'autre, le produit scalaire et le produit mixte de deux vecteurs.



– Le **produit scalaire** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, que l'on peut définir par $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, où H est la projection de C sur la droite (AB), est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

– Le **produit mixte** $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$, que l'on peut définir comme l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , est une forme bilinéaire alternée.

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \theta$ et $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = AB \cdot AC \cdot \sin \theta$, où $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Il résulte de ces définitions que

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| \leq AB \cdot AC \text{ avec égalité ssi les vecteurs sont colinéaires.}$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| \leq AB \cdot AC \text{ avec égalité ssi les vecteurs sont orthogonaux}$$

Théorème d'Al Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$.

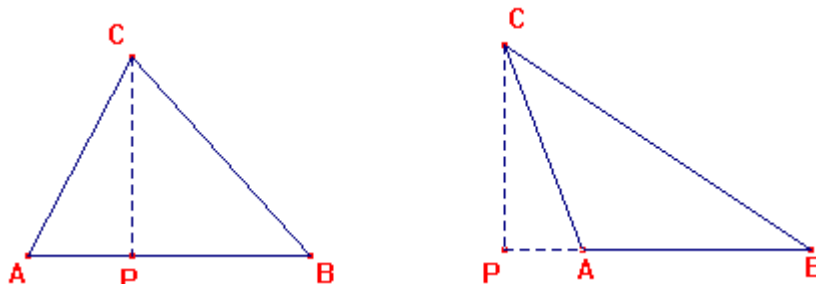
Preuve : simple conséquence de la bilinéarité du produit scalaire !

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

Cela permet de montrer Pythagore et sa réciproque.

Autre preuve, moins anachronique, où l'on déduit Al Kashi de Pythagore.

Notons P la projection de C sur (AB).



$$\begin{aligned}
\text{Par Pythagore, } a^2 &= BC^2 = PB^2 + CP^2 = (\overline{AB} - \overline{AP})^2 + \overline{CP}^2 \\
&= \overline{AB}^2 - 2 \overline{AB} \overline{AP} + \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 \\
&= \overline{AB}^2 - 2 \overline{AB} \overline{AP} + \overline{AC}^2 \quad \text{par Pythagore derechef.}
\end{aligned}$$

$$\text{Or } \overline{AB} \cdot \overline{AP} = 2bc \cdot \cos \hat{A} \dots$$

Corollaire : Le triangle ABC est rectangle en A ssi $a^2 = b^2 + c^2$.

Proposition 2 : (inégalité du triangle).

Les côtés a, b et c vérifient les inégalités : $|b - c| < a < b + c$.

Proposition 3 : Soient a, b, c trois réels > 0 . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe un triangle de côtés a, b, c ;
- ii) On a : $a < b + c, b < c + a$ et $c < a + b$;
- iii) On a : $|b - c| < a < b + c$;

Preuve : L'équivalence ii) \Leftrightarrow iii) est laissée en exercice. L'implication i) \Rightarrow ii) découle de la prop. précédente. On vérifie que iii) implique $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \in]-1, +1[$. Soit $\hat{A} = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \in]0, \pi[$.

Tout triangle ABC d'angle \hat{A} et de côtés b et c répond à la question.

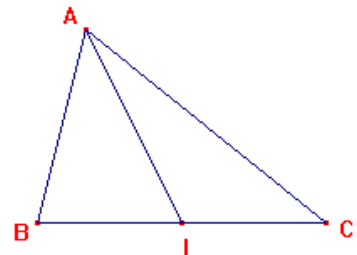
NB : La condition $a > b + c$ signifie que les cercles (B, c) et (C, b) sont extérieurs l'un à l'autre ; la condition $a < |b - c|$ signifie que l'un est intérieur à l'autre. Nous reviendrons sur ce sujet au § 6.

Proposition 4 : (identité de la médiane).

Soient ABC un triangle, I le milieu de BC. On a :

$$4 \cdot AI^2 + BC^2 = 2 \cdot (AB^2 + AC^2).$$

Preuve : $2 \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Elever au carré scalaire, etc.



Corollaire 1 : Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si la médiane et la hauteur issues de A sont égales.

Corollaire 2 : Le triangle ABC est isocèle ss'il a deux médianes de même longueur.

Proposition 5 : (identité de Ptolémée).

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Ils satisfont $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

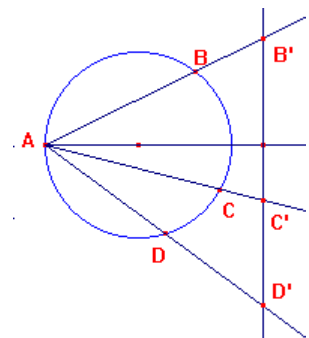
Il y a égalité ssi le quadrilatère ABCD est inscriptible et convexe.

Preuve : Transformons le triangle BCD par l'inversion de pôle A et de puissance 1.

Le triangle image B'C'D' satisfait à $B'D' \leq B'C' + C'D'$, donc

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} \leq \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

Il reste à multiplier par $AB \cdot AC \cdot AD$. Il y a égalité ssi B', C' et D' sont alignés dans cet ordre, ce qui, compte tenu des propriétés de l'inversion, signifie que A, B, C et D sont cocycliques dans cet ordre..



Proposition 6 : Un triangle est équilatéral si et seulement s'il est équiangle.

2. Cas d'égalité, cas de similitude.

2.1. Cas d'égalité.

Définition : Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits **isométriques**, ou (par abus), **égaux** s'il existe une isométrie plane f telle que $f(A) = A', f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Proposition : Si les triangles ABC et A'B'C' sont égaux, alors les côtés et les angles homologues sont égaux : $a = a', b = b', c = c', \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$ (angles non orientés).

Les fameux cas d'égalité des triangles sont des réciproques de la proposition précédente :

Théorème : Les triangles ABC et A'B'C' sont égaux dans les trois cas suivants :

1^{er} cas d'égalité : Si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

2^{ème} cas d'égalité : Si $b = b'$, $c = c'$ et $\hat{A} = \hat{A}'$.

3^{ème} cas d'égalité : Si $a = a'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$.

2.2. Cas de similitude.

Définition : Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits **semblables** (resp. **directement semblables**) s'il existe une similitude plane (resp. directe) f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

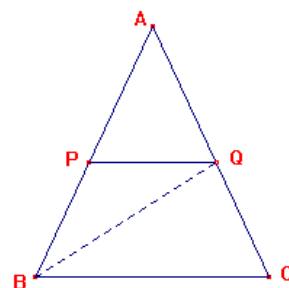
Proposition : Si les triangles ABC et A'B'C' sont semblables, alors les côtés homologues sont proportionnels : $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, et les angles homologues sont égaux : $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$.

Théorème : Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables dans les trois cas suivants :

1^{er} cas de similitude : Si $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

2^{ème} cas de similitude : Si $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ et $\hat{A} = \hat{A}'$.

3^{ème} cas de similitude : Si $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$.



2.3. Une application.

Soit ABC un triangle donné, trouver un point $P \in [AB]$ et un point $Q \in [AC]$ tels que $BP = PQ = QC$.

Si ABC est isocèle en A, la réponse est simple : PQ est parallèle à BC, et BQ est bissectrice de l'angle B.

Analysons la figure, en supposant $AB < AC$.

Soient $P \in [AB]$ et $Q \in [AC]$ deux points tels que $BP = QC$.
Soit J le milieu de l'arc BC du cercle circonscrit qui contient A.

Les triangles JPB et JQC sont égaux (2^{ème} cas d'égalité) car $JB = JC$, $PB = QC$ et $\angle PBJ = \angle QCJ$ (angles inscrits).

Du coup, le triangle mobile JPQ est isocèle, et reste semblable au triangle fixe JBC, car $JP = JQ$ et $\angle BJC = \angle PJQ$ (2^{ème} cas de similitude). Reste à écrire que $BP = PQ$.

Comme $\frac{PJ}{PQ} = \frac{BJ}{BC}$, on a $BP = PQ$ ssi $\frac{PJ}{PB} = \frac{BJ}{BC}$.

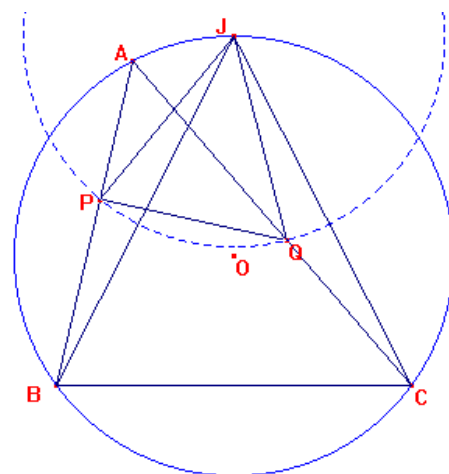
P est l'intersection du segment AB et du cercle de points de base B et J, lieu des points M tels que $\frac{MJ}{MB} = \frac{BJ}{BC}$.

(Ce cercle passe par C, on peut le construire à la règle et au compas).

Synthèse : Le point P existe ssi $AC/2 \leq AB \leq AC$.

En effet P se trouve entre A et B ssi $\frac{AJ}{AB} < \frac{BJ}{BC}$. Or $BJ = 2R \cdot \cos \frac{A}{2}$, $AJ = 2R \cdot \cos(C + \frac{A}{2})$.

$AB = 2R \cdot \sin C$, $BC = 2R \cdot \sin A$. Un peu de trigonométrie conclut.



3. Théorèmes de Menelaüs et Ceva.

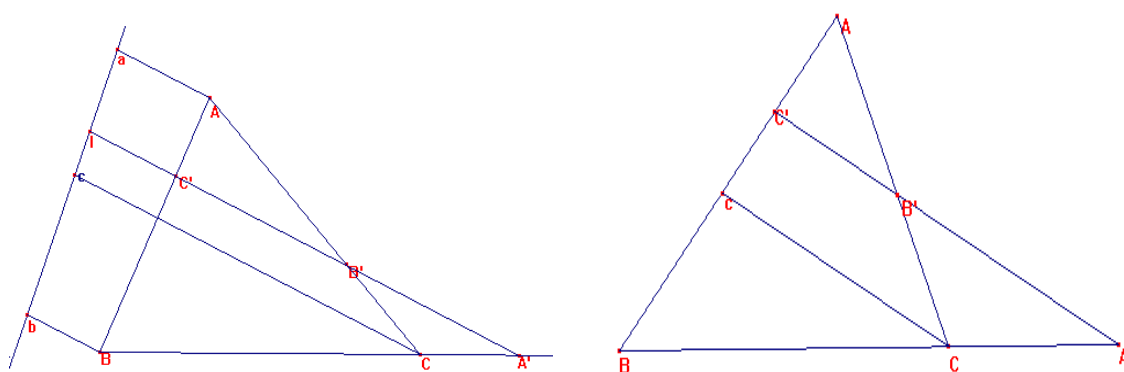
Ces deux théorèmes, de nature affine, ont joué un grand rôle pour montrer l'alignement de points et le concours de droites, avant que Descartes n'invente la géométrie analytique. Leur étoile a un peu pâli depuis lors, mais ils restent d'un usage élégant.

Théorème de Menelaüs⁶ : Soient ABC un triangle du plan affine, A', B', C' trois points situés resp. sur les droites (BC), (CA), (AB). Alors on a l'équivalence :

$$A', B' \text{ et } C' \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1.$$

Avant de démontrer ce résultat, observons que, dans le plan réel, le théorème de Thalès est un cas limite de celui de Menelaüs : en effet, lorsque la transversale $\Delta = A'B'C'$ devient parallèle à la droite BC : A' est rejeté à l'infini, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ tend vers 1, et $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$; d'où $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$. C'est Thalès. En ce sens, on peut dire que Menelaüs généralise Thalès. Nous allons voir qu'il en découle.

Preuve par Thalès :



1) Supposons A', B', C' alignés sur la transversale Δ . Soit D une droite quelconque non parallèle à Δ . Elle rencontre Δ en I. Menons de A, B, C les parallèles à Δ qui rencontrent D en α , β et γ resp.

Par Thalès $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{I\beta}}{\overline{I\gamma}}$, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{I\gamma}}{\overline{I\alpha}}$, $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{I\alpha}}{\overline{I\beta}}$. Il reste à multiplier.

NB : On peut prendre pour droite D la droite AB.

On a alors $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'\gamma}}$, $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'\gamma}}{\overline{C'\alpha}}$. Multiplier par $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$.

2) La réciproque se montre par coïncidence. La droite B'C' recoupe BC en A''.

Par hypothèse $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$. En vertu de 1), on a $\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$.

On en déduit $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}$. Il en résulte $A' = A''$.

Preuve par les homothéties :

1) Supposons A', B', C' alignés. Notons :

⁶ On sait peu de choses de **MENELAÏS d'Alexandrie** (env. 70-130 ap. J.-C.). Ptolémée mentionne qu'il fit des observations astronomiques à Rome le 14 janvier 98. Parmi ses nombreux ouvrages, seules ses *Sphériques* ont survécu ; il y étend la géométrie plane d'Euclide à la géométrie sphérique, en relation avec l'astronomie. Le théorème dit « de Menelaüs » sur les transversales des triangles plans était connu avant lui : Menelaüs l'étendit aux triangles sphériques. Les mathématiciens arabes ont traduit et commenté ses œuvres.

f l'homothétie de centre A' qui envoie C sur B : $f = \text{Hom}(A', \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}})$

g l'homothétie de centre B' qui envoie A et C : $g = \text{Hom}(B', \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}})$.

$f \circ g$ est une homothétie car $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \neq 1$ (sans quoi on aurait $A'B' \parallel AB$).

$f \circ g$ envoie A sur B : son centre est sur la droite AB , et sur la droite $A'B'$. C'est donc C' .

On a $f \circ g = \text{Hom}(C', \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}})$. Mais $(f \circ g)(A) = B \Rightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$. Et voilà !

2) Réciproquement, supposons $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$.

Soient $f = \text{Hom}(A', \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}})$, $g = \text{Hom}(B', \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}})$, $h = \text{Hom}(C', \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}})$.

$f \circ g \circ h$ est l'identité, car c'est une translation qui envoie B sur B .

Par conséquent, $f \circ g = h^{-1}$, et les trois centres d'homothétie sont alignés.

Exercice : Prouver Menelaüs en prenant pour repère affine $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice : Prouver Menelaüs en prenant pour base (A, B, C) (coordonnées barycentriques).

Les deux exercices précédents, incongrus historiquement, ne sont qu'une vérification moderne... Le théorème de Menelaüs est un élégant outil pour démontrer l'alignement de trois points dans le plan, outil indispensable à une époque où les coordonnées n'existaient pas. Il fournit en particulier une belle démonstration du théorème de Pascal.

Théorème de Ceva⁷ (1678) : Soient ABC un triangle du plan affine, A' , B' , C' trois points situés resp. sur les droites (BC) , (CA) , (AB) . Alors on a l'équivalence :

Les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles $\Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

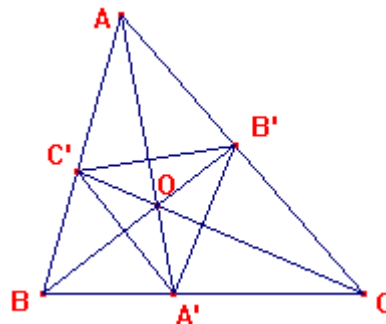
Le cas où les droites sont parallèles est un cas-limite, le point d'intersection est « rejeté à l'infini ». On voit donc la géométrie projective pointer son nez.

Preuve par Thalès :

1) Supposons les droites AA' , BB' et CC' concourantes en O . Menons de B et C les parallèles à AA' . Elles rencontrent CC' en D et BB' en E . Par Thalès

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AO}}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BC}}, \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}.$$

Il reste à multiplier.



⁷ **Giovanni CEVA** (Milan 1647 - Mantoue 1734). Après des études dans un collège jésuite de Milan, Ceva poursuit ses études à l'université de Pise, où il enseigna avant d'être nommé en 1686 professeur de mathématiques à l'université de Mantoue. Il y fit toute sa carrière, d'abord sous les Gonzague, puis, à partir de 1708, sous les Autrichiens. Avant tout géomètre, Ceva découvrit l'un des plus importants résultats de la géométrie synthétique du triangle, entre les Grecs et le 19^{ème} siècle : le fameux théorème de Ceva, publié en 1678 dans *De lineis rectis*. Il redécouvrit le théorème de Menelaüs. Il s'intéressa aux applications de la mécanique et de la statique aux systèmes géométriques. Il affirma que les périodes des oscillations de deux pendules étaient dans le même rapport que leurs longueurs, erreur qu'il corrigea plus tard. Il publia *Opuscula mathematica* (1682) puis *Geometria motus* (1692), où il anticipe le calcul infinitésimal. Dans *De re nummaria* (1711), l'un des premiers traités d'économie mathématique, il cherche les conditions d'équilibre du système monétaire d'un état comme celui de Mantoue. Il fit des recherches en hydraulique, et publia *Opus hydrostaticum* (1728) ; il utilisa ses compétences pour s'opposer, avec succès, à un projet de détournement de la rivière Reno vers le Po.

Si les droites AA' , BB' et CC' sont parallèles, O est « rejeté à l'infini ».

Par Thalès $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$, $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = -\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}}$. Il reste à multiplier.

2) Supposons $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

Si les droites AA' et BB' se rencontrent en O , notons $CO \cap AB = C''$. Comme les droites AA' , BB' et CC'' sont concourantes, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1$. On en déduit $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$, donc $C' = C''$.

Si les droites AA' et BB' sont parallèles, la parallèle menée de C coupe AB en C'' , et on conclut de même.

Preuve par Menelaüs lorsque AA' , BB' et CC' sont concourantes. Appliquons ce théorème :

à la transversale BOB' du triangle $A'AC$: $\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1$.

à la transversale COC' du triangle $AA'B$: $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1$.

Il reste à diviser membre à membre.

Exercice : Prouver Ceva en prenant pour repère affine $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice : Prouver Ceva en prenant pour base (A, B, C) (coordonnées barycentriques).

Exercice : Menelaüs & Ceva.

On se donne un triangle ABC , et trois points α sur BC , β sur CA , γ sur AB .

Soient α' le conjugué harmonique de α par rapport à B et C , β' le conjugué harmonique de β par rapport à C et A , γ' le conjugué harmonique de γ par rapport à A et B .

Montrer l'équivalence : α, β et γ sont alignés \Leftrightarrow les droites $A\alpha'$, $B\beta'$ et $C\gamma'$ sont concourantes.

Exercice : Menelaüs & Ceva.

On se donne un triangle ABC . Une transversale D coupe les côtés BC en α , CA en β , AB en γ .

Soient O un point de D , α' , β' et γ' les symétriques de α , β et γ par rapport à O .

Montrer que les droites $A\alpha'$, $B\beta'$ et $C\gamma'$ sont concourantes.

Exercice : Ceva & Ceva.

On se donne un triangle ABC , et trois points A' sur BC , B' sur CA , C' sur AB . On suppose les droites AA' , BB' et CC' concourantes en O . Soient α , β et γ les milieux respectifs de $B'C'$, $C'A'$ et $A'B'$. Montrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$ sont concourantes.

4. Concours et cercle d'Euler.

Dans ce paragraphe, nous adoptons en général la convention suivante : si P est un point du plan, les droites (AP) , (BP) et (CP) , dites **céviennes** passant par P , coupent resp. (BC) en P_A , (CA) en P_B et (AB) en P_C , du moins lorsque ces points existent.

Le site de Clark Kimberling cité en fin de chapitre répertorie des milliers de points remarquables liés à un triangle ABC , et les numérote $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, etc.⁸ Il ne faut pas s'étonner qu'il y en ait tant : dès qu'un point remarquable M est trouvé, le triangle cévien associé $M_A M_B M_C$ a lui aussi ses points remarquables, lesquels sont aussi points remarquables du triangle de départ : ainsi du triangle complémentaire, du triangle orthique, etc. Et il y a bien d'autres triangles remarquables. Certains points coïncident, et cela fait les délices des géomètres du triangle. Mais ceux-ci s'intéressent aussi

⁸ $X(1)$ désigne le centre du cercle inscrit, $X(2)$ le centre de gravité, $X(3)$ le centre du cercle circonscrit, $X(4)$ l'orthocentre, $X(5)$ le centre du cercle des 9 points, $X(6)$ le point de Lemoine, $X(7)$ le point de Gergonne, $X(8)$ le point de Nagel, $X(11)$ le premier point de Feuerbach, etc.

aux cercles, aux coniques et aux cubiques associées à un triangle. Nous nous intéressons ici aux 10 ou 12 premiers points de la liste de Kimberling.

4.1. Médianes, centre de gravité.

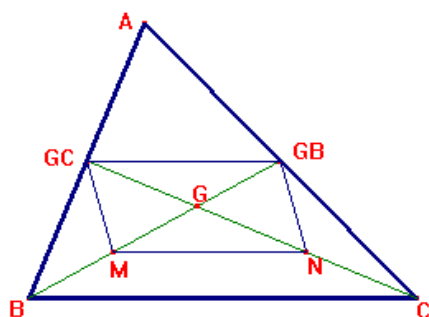
Proposition 1 : concours⁹ des médianes, centre de gravité.

Soient G_A , G_B et G_C les milieux resp. des segments BC , CA et AB . Les médianes AG_A , BG_B et CG_C du triangle ABC concourent en un point G , isobarycentre de A , B et C , appelé aussi **centre de gravité** du triangle. Ce point G est situé aux deux tiers de chaque médiane, i.e. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AG_A}$, etc.

C'est l'unique point du plan qui satisfait $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Preuve : Ce résultat, de nature affine, a été démontré dans le chapitre de géométrie affine. Il découle de l'associativité des barycentres. Voici deux preuves élémentaires, utilisant Thalès.

1^{ère} méthode. Je dis que le point d'intersection G des médianes BG_B et CG_C est aux deux tiers de chacune d'elles. Pour le voir, introduisons les milieux respectifs M et N de BC et CG .

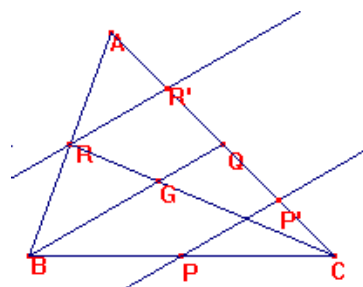


Par Thalès, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{RQ}$.

Du coup, MNG_BG_C est un parallélogramme ; ses diagonales se coupent en leurs milieux. On a donc $G_BG = GM = MB$ et $G_CG = GN = NC$. Ainsi, la médiane BG_B passe par le point situé au tiers de CG_C . De même, la médiane issue de A passerait par ce point.

2^{ème} méthode : Les médianes BG_B et CG_C se coupent en G . Menons de G_A et G_C les parallèles à la médiane BG_B . Elles recoupent AC en P' et R' resp. P' est milieu de CG_B , R' milieu de IG_A . Par Thalès $\overrightarrow{CG} / \overrightarrow{CI_C} = \overrightarrow{CI_B} / \overrightarrow{CR'} = 2/3$.

G est aux deux tiers de la médiane CG_C . De même, il est aussi aux deux tiers de BG_B . Par raison de symétrie la médiane AG_A recoupe BG_B aux deux tiers de BG_B , donc elle passe par G .



Proposition 2 : Le centre de gravité G est l'unique point du plan rendant minimum la **fonction de Leibniz** : $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. Ce minimum vaut $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

Ainsi, le centre de gravité est aussi le centre d'inertie des sommets pondérés par des masses égales.

Preuve : On a $f(M) = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + \text{etc.} = 3 \overrightarrow{MG}^2 + f(G)$.

Définition : Le triangle $G_A G_B G_C$ est appelé **triangle complémentaire** du triangle ABC .

Exercice : Montrer qu'il a même centre de gravité et même fonction de Leibniz que le triangle ABC .

Proposition 3 : Le centre de gravité G du triangle ABC est aussi le centre de gravité et le centre d'inertie de la plaque triangulaire de sommets ABC , à condition de la supposer homogène.

Preuve : Voici une preuve élémentaire, évitant tout recours aux intégrales doubles.

⁹ Je ne trouve pas le mot « concurrence » dans le dictionnaire, mais seulement le mot « concurrence », qui n'a pas le même sens. Même notre vocabulaire est capitaliste ! Le seul mot disponible est celui de concours, utilisé par mon ami Jean-Denis Eiden.

Considérons la symétrie oblique S par rapport à la médiane AG_A parallèlement à la droite BC . Les triangles ABG_A et AG_AC ont même aire orientée : la moitié de celle du triangle ABC . Les centres de gravité des deux plaques triangulaires ABG_A et AG_AC sont l'image l'un de l'autre par S . Le centre de gravité de la plaque ABC est donc situé sur la médiane AG_A . Il est de même situé sur les autres médianes. Cqfd.

NB : En revanche, le centre de gravité d'un triangle en fil de fer homogène est le barycentre des milieux G_A, G_B, G_C pondérés par les longueurs a, b, c . On en déduit aisément que c'est aussi le centre du cercle inscrit du triangle complémentaire $G_AG_BG_C$: c'est le **point de Spieker** du triangle.

4.2. Médiatrices, cercle circonscrit.

Proposition 4 : concours des médiatrices, centre du cercle circonscrit.

Les médiatrices des segments AB, BC et CA concourent en un point O , qui est le seul point équidistant de A, B et C . Le cercle de centre O passant par A, B et C est dit **cercle circonscrit** du triangle ABC ; O est donc le **centre du cercle circonscrit** au triangle.

Preuve : Comme A, B et C ne sont pas alignés, les droites (AB) et (BC) ne sont pas parallèles. Les médiatrices des côtés AB et BC se coupent en un point O , qui vérifie $OA = OB = OC$. O se trouve donc sur la médiatrice de AC . Et le cercle de centre O et de rayon OA passe par A, B et C .

Remarque : Si le triangle ABC est acutangle, O est intérieur au triangle ABC . S'il est rectangle, O est le milieu de l'hypoténuse. S'il est obtusangle, O est extérieur au triangle ABC .

4.3. Hauteurs, orthocentre.

Proposition 5 : concours des hauteurs, orthocentre.

Les hauteurs AH_A, BH_B et CH_C du triangle concourent en un point H appelé **orthocentre** du triangle.

Preuve : Le concours des hauteurs est moins facile à établir que les précédents.

1^{ère} méthode. Menons de A, B et C les parallèles aux droites BC, CA et AB resp. Elles délimitent un triangle $A'B'C'$ dont A, B et C sont les milieux des côtés. Ce triangle est dit **anticomplémentaire** du triangle ABC . Les hauteurs du triangle ABC ne sont autres que les médiatrices du triangle $A'B'C'$, donc elles concourent en un point H , qui est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$.

2^{ème} méthode. Elle repose sur le :

Lemme : $(\forall M) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Lemme facile à établir, en prenant M ou tout autre point comme origine.

Si les hauteurs issues de A et B étaient parallèles, les droites BC et CA seraient aussi parallèles, donc A, B et C seraient alignés. Ces hauteurs se coupent donc en H . En vertu du lemme précédent appliqué à $M = H$, H est sur la hauteur issue de C .

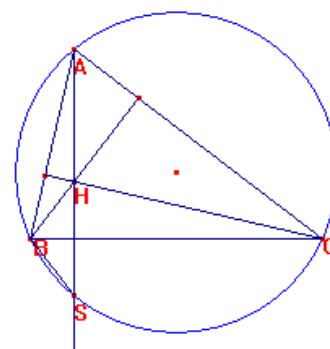
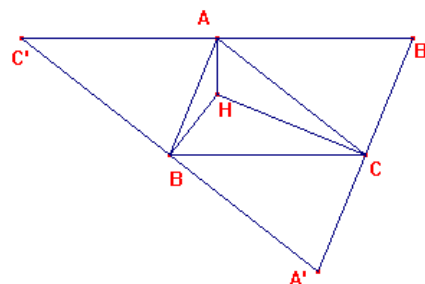
3^{ème} méthode : appliquer le théorème de Ceva aux trois hauteurs.

Si P est le pied de la hauteur issue de A , $\frac{PB}{PC} = -\frac{\tan C}{\tan B}$, etc.

Proposition 6 : Les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit.

Preuve : La hauteur issue de A recoupe le cercle circonscrit en S . On a, d'une part,

$$(\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}) \quad (\text{en tant qu'angles inscrits})$$



d'autre part, $(\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}) = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$.

Du coup, $(\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH})$. La droite BC est donc à la fois bissectrice et hauteur du triangle SBH. Celui-ci est donc isocèle, et S est le symétrique de H par rapport à (BC). Ce symétrique est donc bien sur le cercle circonscrit.

Proposition 7 (Euler, 1765¹⁰) : Les points O, G et H sont alignés et tels que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Preuve : Considérons l'homothétie de centre G et de rapport -2 . Elle envoie le triangle $G_A G_B G_C$ sur le triangle ABC. Elle envoie l'orthocentre du triangle $G_A G_B G_C$ sur celui du triangle ABC.

Or l'orthocentre du triangle $G_A G_B G_C$ n'est autre que O. Par conséquent $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. cqfd.

Autre preuve : Soit X le point tel que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

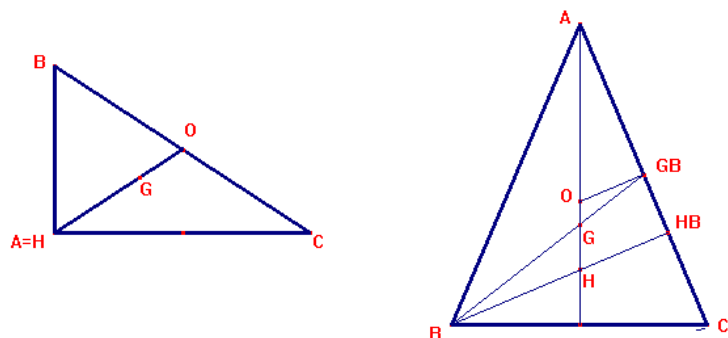
$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$, où A' est le milieu de [BC].

La droite (OA') est la médiatrice du segment BC.

La droite (AX), qui lui est parallèle, est donc perpendiculaire à (BC) : c'est la hauteur issue de A.

Par symétrie, les droites (AX), (BX) et (CX) sont les hauteurs du triangle : cela démontre d'office leur concours : X = H, et, de plus, $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Remarque : La formule $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ est évidente pour un triangle rectangle. Pour un triangle isocèle, elle découle aisément de Thalès, comme le montre la figure ci-dessous :



Proposition 8 : Les symétriques de H par rapport aux milieux des côtés sont sur le cercle circonscrit.

Preuve : Il découle de la preuve précédente que

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$$

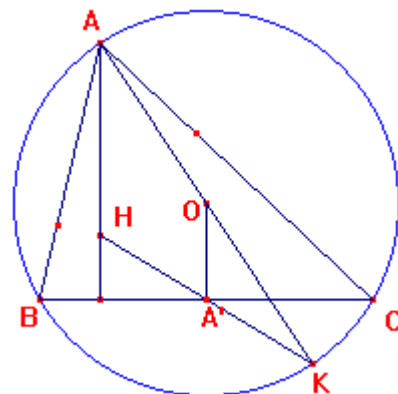
Soit K le symétrique de H par rapport à A'.

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK} = 2(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'K}) = 2\overrightarrow{OK}.$$

Du coup, O est milieu de AK et K appartient au cercle circonscrit.

Proposition 9 : Pour que le triangle ABC soit équilatéral, il faut et il suffit que deux des trois points O, H, G soient confondus.

Définition : Si ABC n'est pas équilatéral, la droite OGH est appelée **droite d'Euler** du triangle.



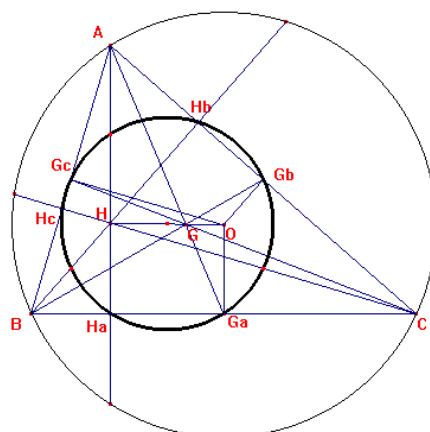
¹⁰ Ce théorème parut en 1765 sous le titre *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* dans le journal *Novi commentarii Academiae Petropolitanae*.

4.4. Cercle des neuf points.

Théorème 10 : cercle des neuf points. Le milieu Ω du segment OH est le centre d'un cercle passant par neuf points remarquables : les milieux G_A , G_B et G_C des côtés, les pieds H_A , H_B et H_C des hauteurs et les milieux K_A , K_B et K_C des segments HA , HB et HC .

Ce cercle est appelé **cercle d'Euler** ou **cercle des neuf points** du triangle.

Preuve : L'homothétie $\text{Hom}(H, 1/2)$ envoie le cercle circonscrit au triangle ABC sur un cercle passant par les milieux de HA , HB et HC . En vertu de la prop. 5, ce cercle passe par les pieds des hauteurs. En vertu de la prop. 7, il passe par les milieux des côtés. Il a pour centre Ω , milieu de OH et pour rayon $R/2$.



Variante, sans la prop. 7. L'homothétie $\text{Hom}(G, -1/2)$ envoie le cercle circonscrit au triangle ABC sur le cercle passant par les milieux des côtés. Ce cercle a aussi pour centre Ω (pourquoi ?), et pour rayon $R/2$. Il coïncide avec le précédent. Et voilà nos neuf points sur le même cercle.

Voici une élégante preuve indiquée par Gilles Boutte.

Par Thalès, $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{K_B K_C}$. Le quadrilatère

$C'K_B K_C B'$ est donc un parallélogramme. C'est même un rectangle, car $C'K_B \parallel AH \perp C'B'$.

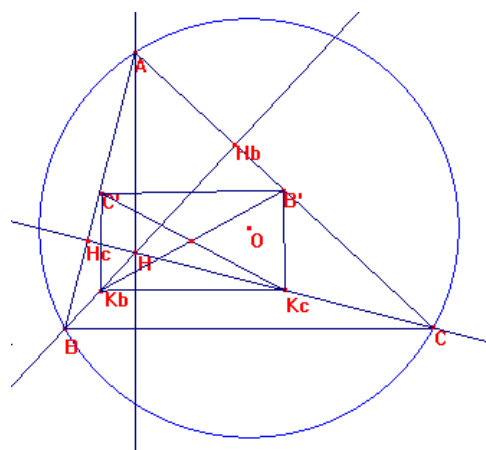
Les sommets C' , K_B , K_C et B' de ce rectangle se trouvent sur un cercle Γ . Comme l'angle $K_B H_B B'$ est droit, H_B appartient au cercle de diamètre $K_B B'$, c'est-à-dire à Γ . De même, H_C appartient à Γ .

Ce cercle passe donc par six des neuf points.

Il a pour centre le milieu de $K_B B'$, et par raison de symétrie, il passera par K_A , H_A et A' .

Comme il passe par $A'B'C'$, il se déduit du cercle circonscrit par l'homothétie $\text{Hom}(G, -1/2)$. En vertu de la prop. 6, il a pour centre le milieu de OH .

Exercice : Quels sont les orthocentres des triangles HAB , HBC et HCA ? En déduire que le cercle d'Euler du triangle ABC est aussi celui des triangles HAB , HBC et HCA .



Qui a trouvé le cercle des neuf points ?

Leonhard Euler (1707-1783) a montré l'alignement des points O , G et H et la propriété les reliant. On lui prête aussi l'intuition du cercle des six points. Il a fondé la géométrie du triangle.

L'ingénieur civil anglais **Benjamin Bevan**, spécialiste de la construction des canaux, posa en 1804 la question : « Montrer que le centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC est le milieu du

segment joignant le centre I du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit au triangle excentral, et que le rayon de ce cercle est le double de celui circonscrivant ABC . » On pense qu'il connaissait la cocyclicité des neuf points. John Whitley publia en 1808 un article sur « *Les propriétés caractéristiques du cercle des neuf points* » dans la revue *Gentleman's Mathematical Companion*.

Le français **Charles Brianchon** (1785-1864) démontra la cocyclicité des neuf points dans les *Annales de Gergonne* en 1821. **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867) fait mention explicitement de ce cercle dans ces mêmes Annales.

L'allemand **Karl Feuerbach** (1800-1834) publia ses recherches en 1822, un an après Brianchon. Il démontre que le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits : le cercle des 9 points contient donc 13 points remarquables. Le français **Olry Terquem** (1782-1862) publia une seconde preuve analytique des résultats de Feuerbach.

5. Droites de Wallace-Simson.

5.1. Droites de Simson.

Proposition 1 : droites de Wallace-Simson.¹¹

Soient M un point du plan, P , Q et R ses projections respectives sur les droites BC , CA et AB . Pour que P , Q et R soient alignés, il faut et il suffit que le point M appartienne au cercle circonscrit Γ du triangle. A tout point M du cercle circonscrit est associé la droite PQR , dite **droite de Simson** de M .

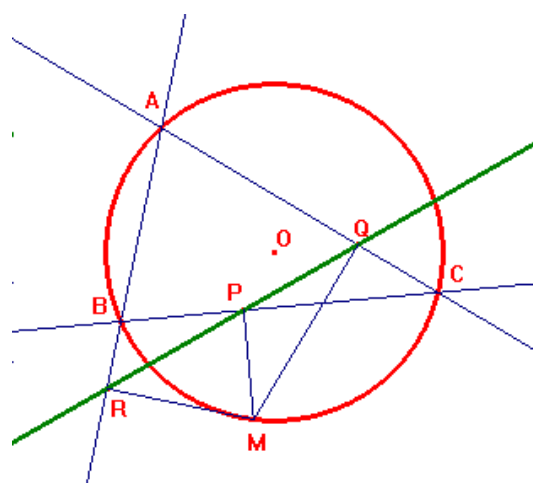
Idée de la preuve :

Supposons d'abord que M n'appartient à aucune des droites (AB) , (BC) et (CA) .

On a $(PQ, PR) \equiv (CA, CM) + (BM, BA) \pmod{\pi}$

On en conclut que P , Q et R sont alignés si et seulement si M appartient à $\Gamma - \{A, B, C\}$.

Si M appartient à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$, les points P , Q et R sont alignés si et seulement si M appartient à $\{A, B, C\}$.



Corollaire : Soient M un point, P' , Q' et R' ses symétriques par rapport aux droites BC , CA et AB . Pour que P' , Q' , R' soient alignés, il faut et il suffit que M appartienne au cercle circonscrit au triangle. A tout point M du cercle circonscrit est associé la droite $P'Q'R'$, dite **droite de Steiner** de M .

5.2. Paraboles tangentes aux trois côtés d'un triangle.

Une conique est dite **inscrite** dans un triangle si elle est tangente aux trois côtés de ce triangle.

Nous allons montrer que le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle est le cercle circonscrit privé des sommets.

Théorème 2 : Soit \mathcal{P} une parabole inscrite dans le triangle ABC . Son foyer F appartient au cercle circonscrit, la tangente au sommet est la droite de Simson du point F et la directrice la droite de

¹¹ **William WALLACE** (Dysart, Ecosse, 1768 - Edimbourg 1843). Autodidacte en mathématiques, Wallace gagna sa vie en travaillant chez un relieur et en donnant des leçons de maths. Il devint professeur de mathématiques à l'Académie de Perth en 1794. Playfair lui conseilla de briguer le poste de professeur au Collège militaire royal de Great Marlow, puis il fut nommé en 1819 professeur de maths à l'université d'Edimbourg. Les travaux de Wallace portent sur la géométrie. La droite dite « de Simson » apparaît pour la première fois dans un papier de Wallace de 1799 ; c'est par erreur que Servois attribua cette découverte à Simson. Wallace publia deux ouvrages, des articles d'astronomie, et inventa le pantographe, instrument pour dupliquer une figure géométrique à une échelle réduite ou agrandie.

Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein : Pour que deux polygones plans se déduisent l'un de l'autre par des découpages en un nombre fini de polygones, il faut et il suffit qu'ils aient même aire.

En dimension 3, il n'existe aucun théorème analogue, comme l'a montré Max Dehn en 1901.

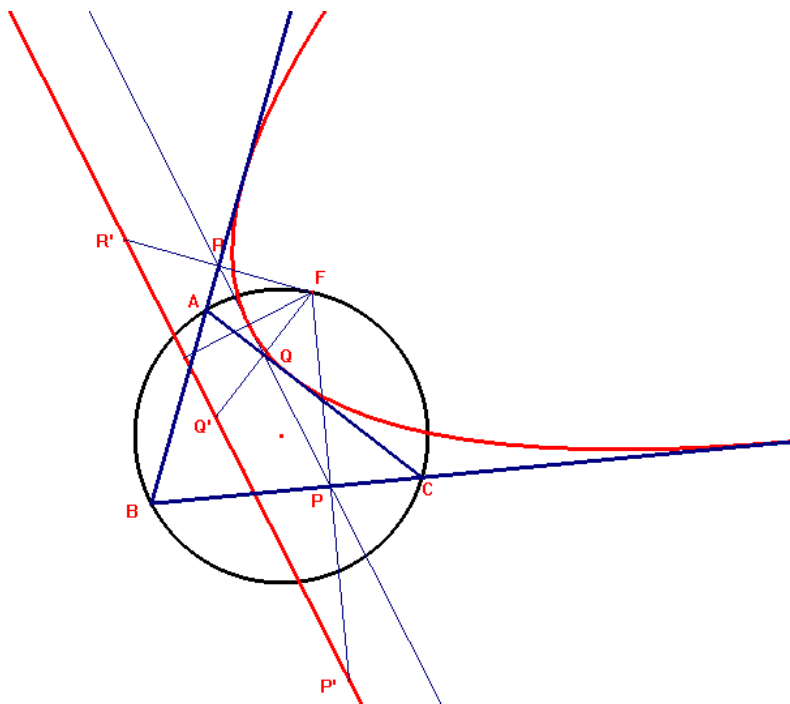
Steiner du point F relatives au triangle. Réciproquement, tout point F du cercle circonscrit privé de $\{A, B, C\}$ est foyer d'une parabole inscrite dans le triangle : c'est la parabole de foyer F et ayant pour directrice la droite de Steiner de F .

Preuve : Rappelons que si \mathcal{P} est une parabole de foyer F , de tangente au sommet T et de directrice D , les projections de F sur les tangentes à la parabole décrivent la tangente au sommet, et les symétriques de F par rapport aux tangentes à \mathcal{P} décrivent la directrice D .

Il en découle aussitôt que les projections P, Q, R de F sur les côtés $(BC), (CA), (AB)$ sont alignées. F appartient donc au cercle circonscrit, et la droite PQR , droite de Simson de F , est la tangente au sommet de la parabole. Quant à la droite de Steiner de F , c'est la directrice de \mathcal{P} .

Réciproque, détails et approfondissements dans Sortais, p. 66 à 71.

La figure ci-dessous montre qu'une parabole inscrite dans un triangle est en fait exinscrite.

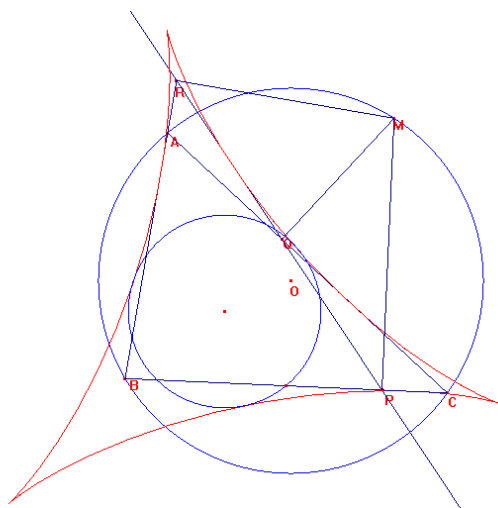


5.3. Hypocycloïde de Steiner.

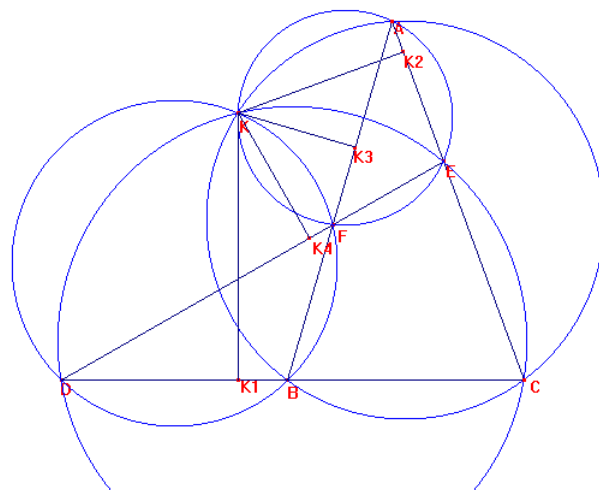
Steiner a montré que, lorsque M décrit le cercle circonscrit, la droite de Simson enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements ou deltoïde, tritangente au cercle d'Euler. Le cercle d'Euler contient donc plus de 9 points remarquables : il faut leur adjoindre les 4 points de contact avec les cercles inscrit et exinscrits, et les 3 points de contact avec l'hypocycloïde de Steiner.¹² Voici un exercice à ce sujet.

¹² **Jakob STEINER** (Utzendorf 1796 - Berne 1863), fils de paysans alémaniques du canton de Berne, n'apprit à lire et écrire qu'à 14 ans, et travailla à la ferme jusqu'à 18 ans. Il alla alors à l'école, contre le désir de ses parents. Il étudia à l'école de Pestalozzi à Yverdon, où son extraordinaire intuition géométrique fut découverte. et aux universités de Heidelberg et de Berlin à partir de 1821, donnant des leçons particulières pour gagner sa vie. Vers 1824, il découvrit la transformation géométrique appelée inversion, mais il ne publia pas son travail. Il fut un des premiers contributeurs au *Journal de Crelle*, fondé en 1826, première revue entièrement consacrée aux mathématiques. En 1832, il reçut un doctorat honoraire de l'université de Königsberg. Deux ans plus tard, il occupa la chaire de géométrie créée pour lui à l'université de Berlin ; il garda ce poste jusqu'à sa mort, et devint membre de l'Académie prussienne des sciences.

Steiner est un des créateurs de la géométrie projective, branche de la géométrie étudiant les propriétés qui sont conservées quand une figure est projetée sur un plan. L'ouvrage de Steiner *Développement systématique de la dépendance des formes géométriques l'une de l'autre* (1832) contient une discussion approfondie du principe de dualité, un principe de géométrie projective qui affirme que, si l'une de deux théories duales est vraie, l'autre est aussi vraie. Adversaire de l'algèbre et de l'analyse, il proclamait que le calcul remplace la pensée tandis que la géométrie la stimule. C'est en utilisant exclusivement des méthodes synthétiques qu'il a



Hypocycloïde de Steiner d'un triangle



Point de Miquel d'un quadrilatère complet

Exercice : 1) Deux points P et Q décrivent le cercle $C(O, a)$ de façon que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OQ}) = -2 \cdot (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$. Montrer que la droite (PQ) enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

2) Soit ABC un triangle. A tout point M du cercle circonscrit on associe sa droite de Simson $S(M)$. Montrer que, si M et M' sont diamétralement opposés, les droites $S(M)$ et $S(M')$ sont perpendiculaires, et que le lieu de leur point d'intersection est le cercle d'Euler.

3) La droite de Simson $S(M)$ coupe le cercle d'Euler en N et Z. Montrer que lorsque M varie, les arcs décrits par N et Z sont dans le rapport -2 , i.e. que $\overline{ZZ_1} = -2 \overline{NN_1}$. En déduire que $S(M)$ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

5.4. Quadrilatères complets.

Définition : On appelle **quadrilatère complet** la figure formée par six points ABCDEF, où ABC est un triangle et DEF une transversale de ce triangle.

Théorème 3 : point de Miquel d'un quadrilatère complet.

Soit ABCDEF un quadrilatère complet. Les cercles circonscrits aux triangles ABC, DBF, AEF et CDE sont concourants en un point K, dit **point de Miquel** du quadrilatère.

Preuve : Il est facile d'établir que les cercles ABC et DBF ne sont pas tangents en B. Ils se coupent donc en deux points, B et K. Soient K_1, K_2, K_3 et K_4 les projections respectives de K sur (BC), (AC), (AB) et (DE). Comme K appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, les points K_1, K_2 et K_3 sont alignés. Comme K appartient au cercle circonscrit au triangle DBF, les points K_1, K_3 et K_4 sont alignés. Du coup, les quatre points K_i sont alignés. Par suite, K appartient aussi aux cercles circonscrits aux triangles AEF et CDE.

démontré qu'une surface du troisième degré contient seulement 27 droites, théorème dont la démonstration semblerait relever de l'analyse. Il trouva la transformation de Steiner, l'alternative de Steiner, la formule de Steiner-Minkowski. Il donna en 1826 une solution géométrique du problème des cercles de Malfatti. Il étudia la transformation arguésienne, qui à une courbe associe le lieu des inverses triangulaires de ses points. Considéré comme le plus grand géomètre depuis Apollonios de Perga, Steiner a écrit des ouvrages qui font classiquement autorité en géométrie synthétique. On lui doit de nombreux concepts et résultats de géométrie projective, et il a découvert la surface de Steiner (dite aussi surface romaine), qui contient une double infinité de sections coniques. Il a aussi généralisé le théorème de Poncelet-Steiner, qui affirme que toute construction euclidienne exige seulement une règle et la donnée d'un cercle avec son centre. Ses autres travaux portent principalement sur les propriétés des courbes et surfaces algébriques et des maxima et minima. Ses œuvres complètes ont été réunies en deux volumes (*Gesammelte Werke*, 1881-1882).

6. Bissectrices, théorème de Feuerbach.

6.1. Cercles inscrit et exinscrits.

Définition : On appelle **bissectrice intérieure** de l'angle \hat{A} la bissectrice des droites AB et AC qui coupe le segment BC. L'autre bissectrice est dite **extérieure**.

Proposition 1 : La bissectrice intérieure de l'angle A coupe BC en P, la bissectrice extérieure en Q.

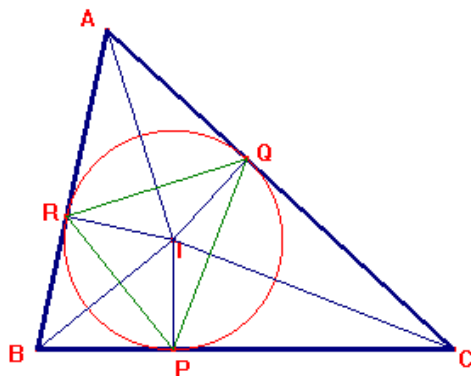
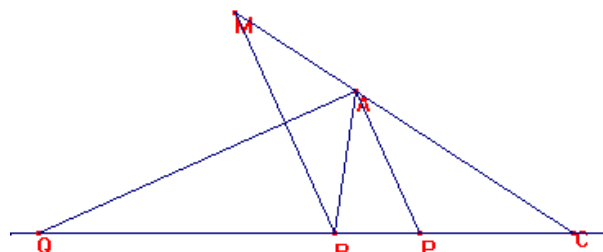
Alors on a $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{AB}{AC}$.

En particulier, les pieds P et Q des bissectrices sont conjugués harmoniques par rapport à B et C.

Preuve : La parallèle menée de B à (AP) recoupe (AC) en M.

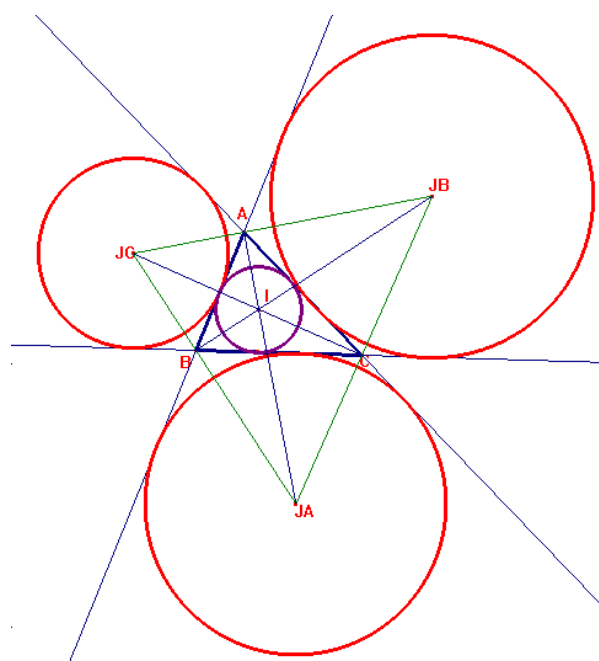
Par Thalès $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = -\frac{AB}{AC}$, car le triangle

ABM est isocèle. Idée analogue pour Q. Mais on peut aussi faire un peu de trigo.



Cercle inscrit, triangle de Gergonne PQR

Cercles inscrit et exinscrits



Proposition 2 : Cercles inscrit et exinscrits.

i) Les trois bissectrices intérieures se coupent en un point I, centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, appelé **cercle inscrit** dans le triangle ABC.

ii) La bissectrice intérieure de l'angle A et les bissectrices extérieures des angles B et C se coupent en un point J_A , centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, appelé **cercle exinscrit** dans l'angle A.

Il y a donc un cercle inscrit et trois cercles exinscrits.

Remarque : Le centre du cercle inscrit est, avec le centre de gravité, le seul point remarquable classique qui est toujours à l'intérieur du triangle.

Proposition 3 : Triangle et point de Gergonne.

Soient P, Q et R les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA et AB du triangle. Le triangle PQR est appelé **triangle de Gergonne**, ou **triangle de contact**, du triangle ABC. Les droites AP, BQ et CR concourent en un point J appelé **point de Gergonne** du triangle ABC.

Preuve : Céva fait ici merveille...

Proposition 4 : Le triangle $J_A J_B J_C$.

Le triangle $J_A J_B J_C$ a I pour orthocentre, et pour cercle d'Euler le cercle circonscrit de ABC.

Il se déduit du triangle de Gergonne PQR par une homothétie de rapport $\frac{2R}{r}$.

Preuve : laissée en exercice, ou cf. Sortais, p. 84.

6.2. Théorème de Feuerbach.

Théorème de Feuerbach¹³ (1822) : Le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.

Ainsi, le cercle d'Euler contient quatre nouveaux points remarquables, ses points de contact avec les cercles inscrit et exinscrits, ou **points de Feuerbach**.

Preuve : Soient F_A le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A, I le centre du cercle inscrit, L_A sa projection sur (BC), J_A le centre du cercle exinscrit dans l'angle A, L'_A sa projection sur (BC). Notons que le cercle d'Euler est homothétique du cercle circonscrit par $\text{Hom}(G, -\frac{1}{2})$, car IAIBIC est homothétique de ABC par $\text{Hom}(G, \frac{1}{2})$.

Lemme : $I_A L_A^2 = I_A L'_A{}^2 = \overline{I_A H_A} \cdot \overline{I_A F_A} = k$.

Admettons ce lemme et montrons le théorème à l'aide de l'inversion f de pôle I_A et de puissance k .

– Le cercle inscrit est tangent en L_A à (BC). Son image est un cercle centré sur la droite Π_A et tangent en $f(L_A) = L_A$ à $f(BC) = BC$. C'est donc lui-même !

– Le cercle exinscrit est de même globalement invariant par f .

– Le cercle d'Euler passant par I_A , et de diamètre $I_A \Omega K_A$, est transformé en une droite Δ perpendiculaire à $I_A K_A$ passant par $f(H_A) = F_A$. Cette droite est parallèle à la tangente en I_A au cercle d'Euler (car toutes deux perpendiculaires à $I_A K_A$).

La droite AF_A est bissectrice des angles SAT et BAC, car $SAB = ACB = CAT$.

Donc $SAF_A = AF_A \Delta$, car Δ et SA sont parallèles.

$= F_A AT = AF_A B$ car AT et BC sont parallèles.

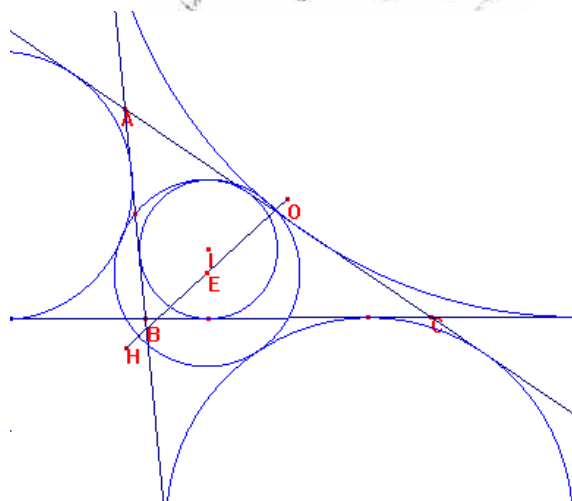
Finalement, $F_A A$ est bissectrice de $BF_A \Delta$. I est donc équidistant de BC et Δ , J_A aussi. CQFD.

Preuve du lemme : la division $AF_A I J_A$ est harmonique car CI et CJ_A sont les bissectrices de l'angle C. La division $H_A F_A L_A L'_A$ aussi par projection sur (BC).

Le cercle de diamètre $I J_A$ passe par B et C car $IBJ_A = ICJ_A = 1$ droit.

Donc le milieu de $I J_A$ est équidistant de B et C : sa projection I_A est milieu de $L_A L'_A$.

D'où $I_A L_A^2 = I_A L'_A{}^2 = \overline{I_A H_A} \cdot \overline{I_A L_A}$.



¹³ **Karl Wilhelm FEUERBACH** (Iéna 1800 – Erlangen 1834), professeur de mathématiques à Erlangen, fils d'un grand juriste, eut pour frères un archéologue, un juriste, un orientaliste et le philosophe Ludwig Feuerbach. A Erlangen, il se lia d'amitié avec le poète August von Platen. Outre-Rhin, le cercle d'Euler est appelé *cercle de Feuerbach*.

Remarque : autre approche dans Sortais (p. 188-193).

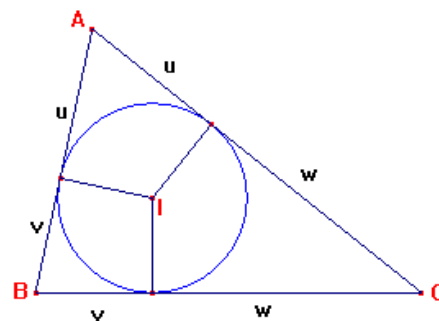
6.3. Transformation de Ravi.

Proposition : Soient a, b, c trois réels > 0 . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe un triangle de côtés a, b, c ;
- ii) On a : $a < b + c, b < c + a$ et $c < a + b$;
- iii) On a : $|b - c| < a < b + c$;
- iv) Il existe des réels $u, v, w > 0$, tels que
 $a = v + w, b = w + u, c = u + v$.

Remarque : Soit u la distance de A aux points de contact du cercle inscrit avec les côtés AB et AC , v et w définis symétriquement. On a aussitôt :

$$a = v + w, b = w + u, c = u + v, \\ u = \frac{b+c-a}{2}, v = \frac{c+a-b}{2}, w = \frac{a+b-c}{2}.$$



La transformation $(a, b, c) \leftrightarrow (u, v, w)$, dite de Ravi, est utile, car elle met en bijection l'ensemble des triplets (a, b, c) tels que $|b - c| < a < b + c$ et l'ensemble des triplets (u, v, w) de réels > 0 .

Exercice : Soient p, q, r trois réels > 0 ; trouver une cns pour qu'existe un triangle ayant des hauteurs de longueurs p, q, r .

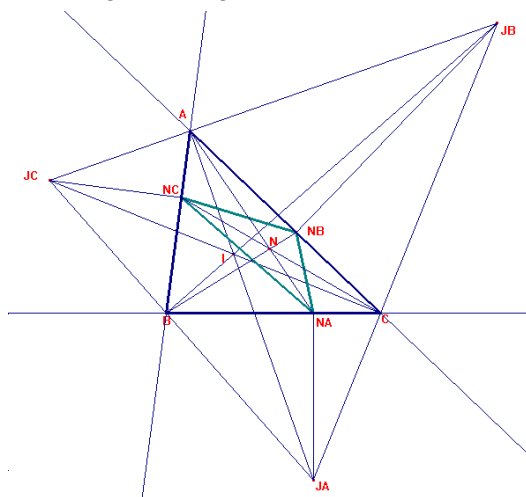
Exercice : Soient a, b, c les côtés d'un triangle. Montrer que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$.

Exercice : Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC . Le cercle de centre I passant par A (resp. B , resp. C) recoupe la droite BC en A_1 et A_2 , (resp. B_1 et B_2 , resp. C_1 et C_2).

Montrer que $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = P$, périmètre du triangle ABC . (Olympiades françaises 2005)

6.4. Triangle et point de Nagel.

Définition : On appelle **triangle de Nagel** du triangle ABC le triangle $N_A N_B N_C$, où N_A désigne le point de contact avec (BC) du cercle exinscrit dans l'angle A , etc. Le **cercle de Mandart** est le cercle circonscrit du triangle de Nagel.



Proposition : Les droites (AN_A) , (BN_B) et (CN_C) concourent en un point N , dit **point de Nagel** du triangle ABC .

Preuve : cf. Sortais. J'ai aussi une preuve par calcul barycentrique dans mon chapitre.

Proposition : Le point de Nagel est le centre du cercle inscrit du triangle anticomplémentaire.

Preuve : Le triangle anticomplémentaire $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par l'homothétie $h = \text{Hom}(G, -2)$. Il suffit donc de vérifier que $N = \text{Bar}((I, -2), (G, 3))$. Or c'est très facile.

7. Formulaire.

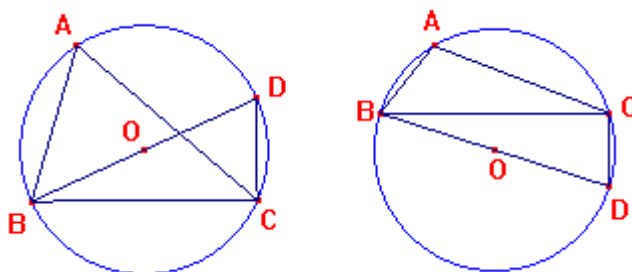
Soient ABC un triangle, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre, S l'aire, R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, r_a le rayon du cercle exinscrit dans l'angle \hat{A} , h_a la hauteur issue de A , m_a la hauteur issue de A , etc.

Formule d'Al Kashi : $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Loi des sinus : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$.

Preuve : Si le triangle est rectangle en A , BC est un diamètre et $a = 2R$.

Sinon, soit D le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit. Les angles BAC et BDC sont égaux ou supplémentaires, selon que l'angle A est aigu ou obtus. Ils ont donc même sinus.



Comme le triangle BCD est rectangle en C , $\sin(\text{BDC}) = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$. D'où $\sin \hat{A} = \frac{a}{2R}$.

Formule des compléments : $\sin \hat{A} = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\sin \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

Preuve : $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} = \text{etc.} = \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$.

$$\sin^2 \frac{\hat{A}}{2} = \frac{1-\cos \hat{A}}{2} = \text{etc.} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Formules de Héron : $S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} bc.\sin \hat{A} = p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$.

Preuve : La première formule est élémentaire, la seconde en découle.

La troisième découle de ce que S est la somme des aires des triangles IBC , ICA et IAB .

La quatrième découle de la deuxième et de la formule des compléments.

La cinquième découle de la deuxième et de la loi des sinus.

Formules de la médiane : $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + bc.\cos \hat{A}$.

Formules d'Euler : $OI^2 = R^2 - 2Rr$ et $OJ_A^2 = R^2 + 2Rr_a$. (cf. § 8)

Cercles inscrits, exinscrits : $r = \frac{S}{p}$, $r_a = \frac{S}{p-a}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, $p^2 = r_a.r_b + r_b.r_c + r_c.r_a$.

Relations trigonométriques :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4.\sin A.\sin B.\sin C$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R} \quad \sin A \sin B \sin C = \frac{S}{2r^2}$$

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{abc}{2R^2} = \frac{8S^2}{abc} = \frac{2S}{R}$$

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$$

Coordonnées barycentriques des points remarquables.

Les coordonnées barycentriques indiquées n'ont pas toujours pour somme 1 : les normaliser.

Un point M quelconque du plan a pour coordonnées barycentriques :

(A, Aire(MBC)) , (B, Aire(MCA)) , (C, Aire(MAB)). Il s'agit d'aires algébriques.

Ce sujet sera repris au § 10.3.

Centre de gravité G	1/3	1/3	1/3
Orthocentre H	$\tan \hat{A}$	$\tan \hat{B}$	$\tan \hat{C}$
Centre du cercle circonscrit O	$a \cos \hat{A}$	$b \cos \hat{B}$	$c \cos \hat{C}$
Centre du cercle d'Euler Ω	$a \cos(\hat{B} - \hat{C})$	$b \cos(\hat{C} - \hat{A})$	$c \cos(\hat{A} - \hat{B})$
Centre du cercle inscrit I	A	b	c
Centre du cercle exinscrit dans l'angle A, J_A	$-a$	b	c
Point de Lemoine	a^2	b^2	c^2

Ces résultats sont établis dans mon chapitre sur le Calcul barycentrique.

Autres références : R. et Y. Sortais : La géométrie du triangle, p. 98-113.

J.-D. Eiden : Géométrie analytique classique

Résoudre un triangle, c'est calculer les éléments inconnus et l'aire au moyen des données.

Les cas classiques de résolution sont :

– La donnée de a, \hat{B}, \hat{C} ; les inconnues sont b, c, \hat{A} et S.

– La donnée de b, c, \hat{A} ; les inconnues sont a, \hat{B}, \hat{C} et S.

– La donnée de a, b, c ; les inconnues sont $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ et S.

– La donnée de a, b, \hat{A} ; les inconnues sont c, \hat{B}, \hat{C} et S.

Ces problèmes remplissaient jadis les livres de trigonométrie.

8. De nouveaux cercles.

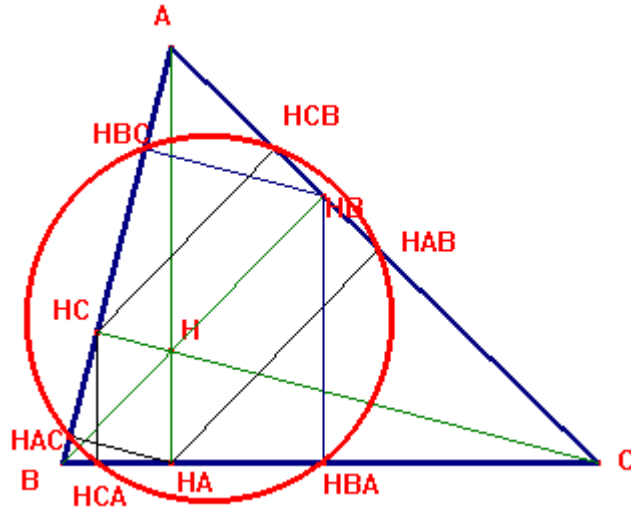
Cercle circonscrit, cercle d'Euler, cercles inscrit et exinscrits... Au fil du temps, les géomètres ont découvert bien d'autres cercles liés au triangle. En voici quelques-uns.

8.1. Le cercle de Taylor.

Soient ABC un triangle, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs resp. de A, B et C. On mène de H_A les perpendiculaires à (AB) et (AC) ; leurs pieds sont notés resp. H_{AC} et H_{AB} . Et l'on fait de même avec H_B et H_C . Les six points obtenus, $H_{AC}, H_{AB}, H_{BA}, H_{BC}, H_{CB}$ et H_{CA} sont situés sur un même cercle, appelé **cercle de Taylor**.

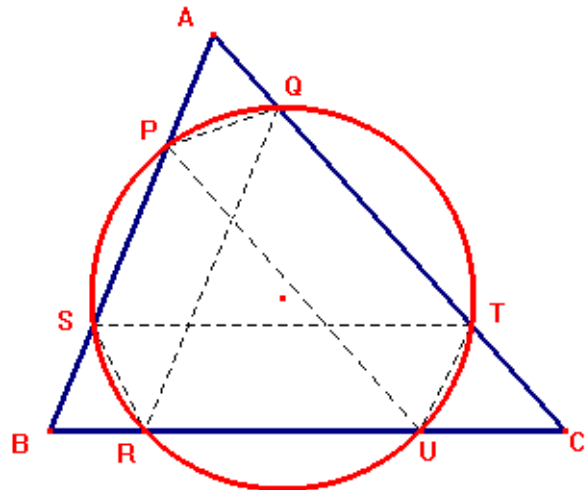
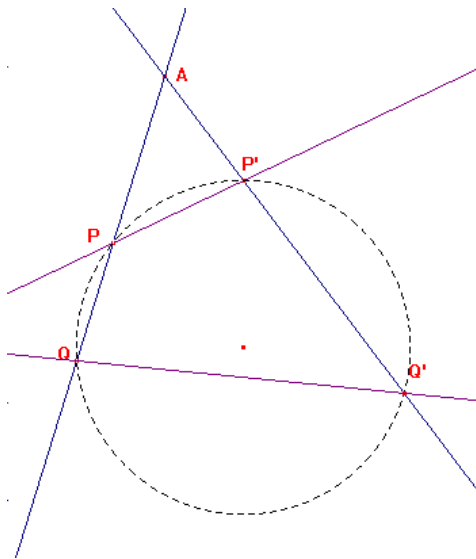
Ce cercle a été découvert en 1882 par le géomètre anglais Henry Martyn Taylor (1842-1927). Mais il aurait auparavant été étudié en 1877 par le français Eustaris (pseudonyme d'un certain M. Restiau, professeur au collège Chaptal), et par le belge Eugène Catalan en 1879.

Preuve : Il suffit de vérifier, via Thalès, que $\overline{AH_{BC}} \cdot \overline{AH_{AC}} = \overline{AH_{CB}} \cdot \overline{AH_{AB}} = c^2 \cos^2 A \sin^2 B$, etc.



8.2. Les cercles de Tucker.

Définition : Soient D et D' deux droites sécantes en A. Une droite Δ coupe D et D' en P et P', une droite Δ' coupe D et D' en Q et Q'. Les droites Δ et Δ' sont dites **antiparallèles** si les angles AP'P et AQQ' sont égaux, ou encore si les points PP'QQ' sont cocycliques.



Théorème : Soient un triangle ABC, P un point de (AB). L'antiparallèle à (BC) relative aux droites (AB) et (AC) menée de P coupe (AC) en Q. La parallèle à (AB) menée de Q recoupe (AC) en R. L'antiparallèle à (CA) relative aux droites (BA) et (BC) menée de R recoupe (AB) en S. La parallèle à (BC) menée de S recoupe (AC) en T. L'antiparallèle à (AB) relative aux droites (CA) et (CB) menée de T recoupe (BC) en U. Alors, la droite (UP) est parallèle à (AC), et les six points P, Q, R, S, T, U sont situés sur un même cercle, appelé **cercle de Tucker**, du nom du géomètre anglais Robert Tucker (1832-1905).

Preuve : Notons $x = \overline{AP}$, $y = \overline{AQ}$, $z = \overline{BR}$, $u = \overline{BS}$, $v = \overline{CT}$, $w = \overline{CU}$.

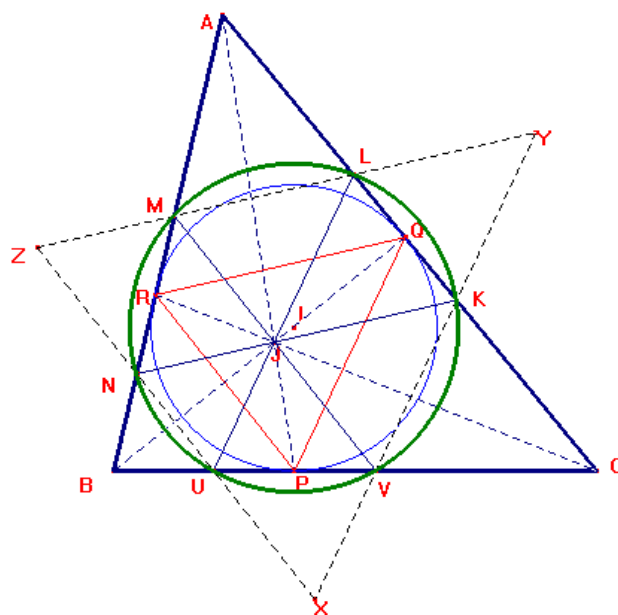
Il vient facilement : $y = x \frac{c}{b}$, $z = y \frac{a}{b}$, $u = z \frac{a}{c}$, $v = u \frac{b}{c}$, $w = v \frac{b}{a}$.

Le parallélisme des droites (UP) et (AC) découle de : $\frac{x}{c} = \frac{w}{a}$.

Enfin, la cocyclicité de P, Q, R, S, T, U découle de : $\overline{AP} \cdot \overline{AS} = \overline{AQ} \cdot \overline{AT}$ et $\overline{BP} \cdot \overline{BS} = \overline{BU} \cdot \overline{BR}$.

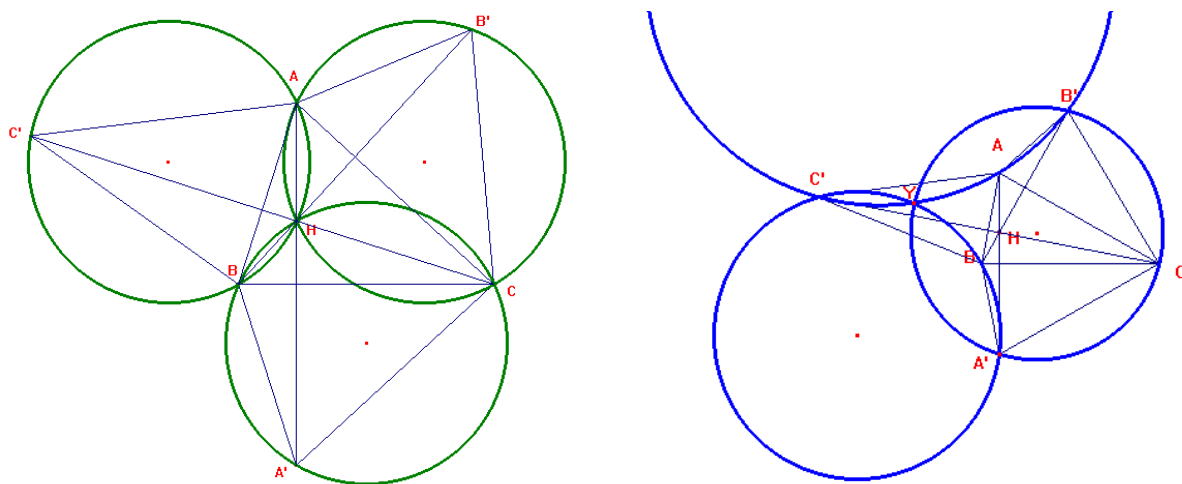
8.3. Le cercle d'Adams.

Reprenons le triangle de Gergonne PQR du triangle ABC. Rappelons qu'il est formé des points de contact du cercle inscrit avec les trois côtés. On a vu que les droites (AP), (BQ) et (CR) concourent en un point J appelé point de Gergonne du triangle. Menons par le point J les parallèles aux trois côtés du triangle de Gergonne. Elles coupent les côtés du triangle en six points U, V, K, L, M, N. Ces six points sont cocycliques, et situés sur un cercle ayant pour centre I, centre du cercle inscrit au triangle ABC. Ce cercle est appelé **cercle d'Adams**, du nom du géomètre suisse Carl Adams (1811-1849) qui le découvrit en 1843. De plus, le cercle d'Adams est le cercle de Lemoine du triangle XYZ formé par les droites (ML), (NU) et (VK).



8.4. Les cercles de Yiu.

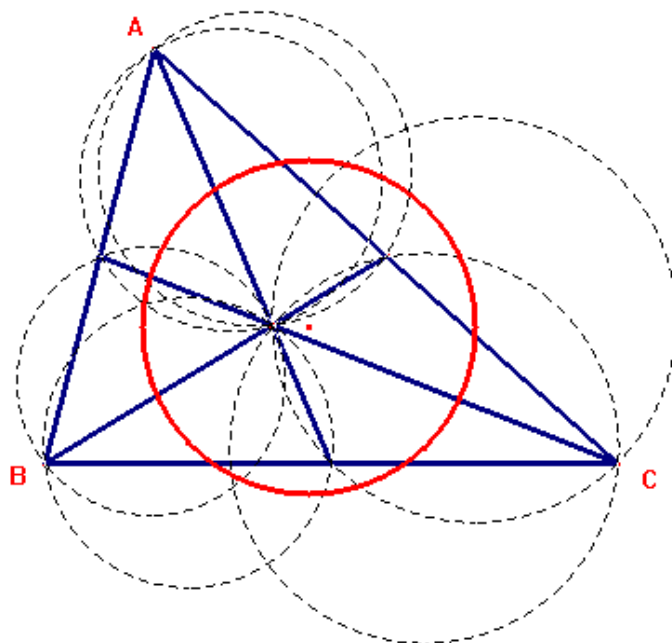
Soit ABC un triangle dont aucun angle ne vaut $\pi/3$. Soient A' , B' , C' les symétriques des sommets A, B, C par rapport aux côtés opposés. Les cercles circonscrits aux triangles ABC' , BCA' , CAB' passent tous trois par l'orthocentre H du triangle ABC. Les cercles circonscrits aux triangles $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$, appelés **cercles de Yiu**¹⁴, passent également par un même point, Y.



¹⁴ Le géomètre **Paul Yiu** est auteur de nombreux ouvrages, dont certains disponibles en ligne, tels *A Tour of Triangle Geometry* (Florida Atlantic University, 2004).

8.5. Le cercle de van Lamoen.

Les trois médianes d'un triangle divisent celui-ci en six petits triangles. Les centres des cercles circonscrits de ces six triangles sont situés sur un même cercle, appelé **cercle de van Lamoen**, du nom de son découvreur, le géomètre néerlandais Floor van Lamoen, né en 1966.

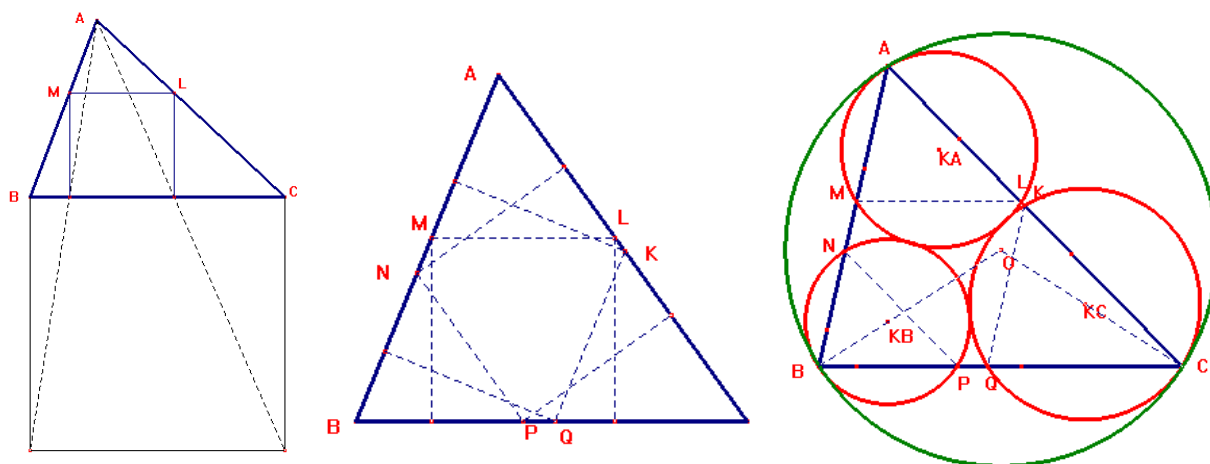


8.6. Les cercles de Lucas.

On peut inscrire un carré dans un triangle ABC de trois façons possibles. Ces trois carrés déterminent les points K, L, M, N, P, Q (voir la figure). Les cercles circonscrits aux triangles AML, BNP et CQK, appelés **cercles de Lucas**¹⁵, sont deux à deux tangents, et tangents intérieurement au cercle circonscrit au triangle ABC.

La première figure indique comment inscrire un carré dans un triangle : problème classique.

La seconde figure montre les trois carrés ainsi obtenus. La troisième montre les cercles de Lucas.



Le triangle AML se déduit du triangle ABC par une homothétie de centre A. Il en résulte que son cercle circonscrit est homothétique de celui de ABC. Le point A et les centres K_A et O des deux cercles sont donc alignés et les cercles sont tangents en A.

¹⁵ Du nom du mathématicien français **Edouard LUCAS** (1842-1891), qu'on ne présente plus.

Le rapport d'homothétie peut se calculer : $\frac{AM}{c} = \frac{ML}{a} = \frac{MB \sin B}{a} = \frac{MB \cdot b}{2Ra} = \frac{(c-AM) \cdot b}{2Ra}$.

Par conséquent, AM se calcule et $\frac{AM}{c} = \frac{bc}{2Ra+bc}$. Donc $AK_A = \frac{Rbc}{2Ra+bc}$ et $OK_A = \frac{2R^2a}{2Ra+bc}$.

Al Kashi permet de calculer $K_B K_C$ et de vérifier que $K_B K_C = BK_B + CK_C$. Il faut pour cela utiliser $\cos(2A) = 2 \cos^2 A - 1 = \text{etc.}$, ainsi que $R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$. J'ai fait le calcul avec Maple.

8.7. Cercles et triangle de Stammer. (p. 87)

Théorème : Le cercle circonscrit Γ du triangle ABC détermine, sur les droites (BC), (CA) et (AB) des cordes de longueurs respectives a, b, c . Il existe trois autres cercles interceptant, sur les droites (BC), (CA) et (AB) des cordes de longueurs respectives a, b et c . Ce sont les **cercles de Stammer**. Les centres de ces cercles forment un triangle équilatéral appelé **triangle de Stammer**, du nom de Ludwig Stammer, enseignant-chercheur à l'université Martin Luther de Halle-Würtemberg.

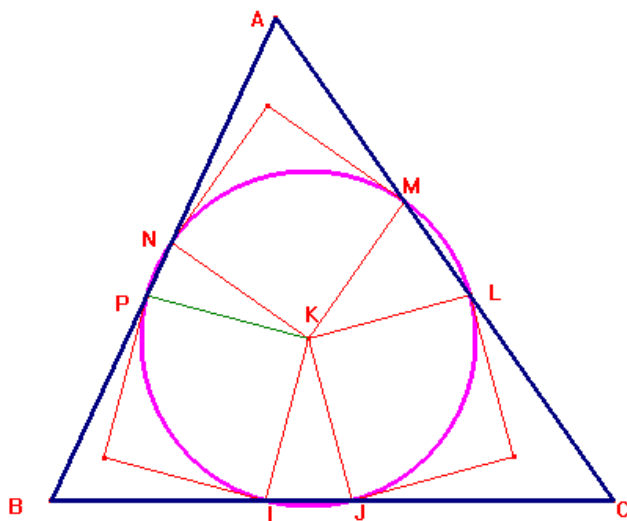
8.8. Les cercles d'Yff. (p. 63)

Soit ABC un triangle. On nomme **cercles d'Yff** la figure formée par trois cercles, ayant un point commun et tels que chacun d'eux soit tangent à deux côtés du triangle (éventuellement prolongés). Il existe deux systèmes de cercles d'Yff. Les trois cercles de chaque système sont égaux, et ont pour rayon, soit $\rho_1 = \frac{rR}{R+r}$, soit $\rho_2 = \frac{rR}{R-r}$, où R est le rayon du cercle circonscrit, et r le rayon du cercle inscrit du triangle ABC.

L'américain Peter Yff a passé une grande partie de sa carrière, de 1951 à 1986, à Beyrouth. Il est l'auteur de nombreux problèmes portant sur la géométrie et les groupes finis.

8.9. Cercle de Kenmotu.

Etant donné un triangle ABC, il existe trois carrés égaux, ayant un sommet commun K, et tels que chaque carré ait deux autres sommets sur les côtés du triangle. Le point K est appelé **centre de Kenmotu**, et le cercle passant par les six points de contact **cercle de Kenmotu**, du nom du mathématicien japonais Shoro Kenmotu (1790-1871).

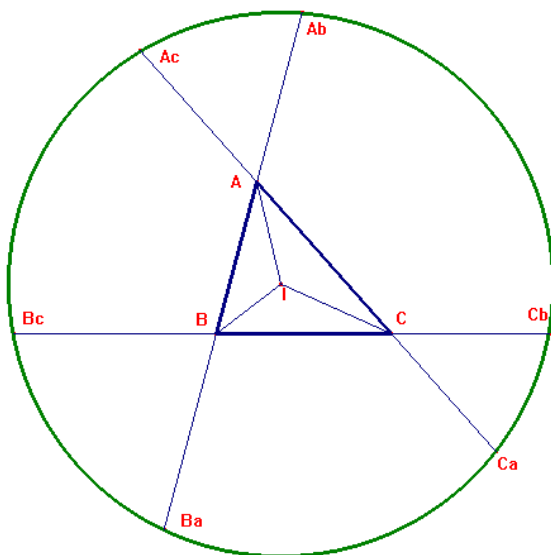


8.10. Cercle de J. H. Conway.

Théorème : Soit un triangle ABC. On prolonge extérieurement les trois côtés, d'une longueur égale à BC à partir du sommet A, d'une longueur égale à CA à partir du sommet B, d'une longueur égale à AB à partir du sommet C. On obtient ainsi 6 points $A_b, A_c, B_a, B_c, C_a, C_b$, qui sont cocycliques. Le

cercle qui les porte, appelé **cercle de John Horton Conway**, a pour centre le centre du cercle inscrit du triangle ABC.

Preuve : La vérification de cette propriété est bien facile. Avec la transformation de Ravi, et par Pythagore $IA_c^2 = r^2 + (u + a)^2 = r^2 + \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$. Cette expression est symétrique en a, b, c . Cqfd



9. Euler, Poncelet.

Théorème d'Euler : Soient ABC un triangle, $\mathcal{C}(O, R)$ et $\mathcal{C}'(I, r)$ les cercles circonscrit et inscrit.

Alors : $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Preuve : Il suffit d'appliquer la formule d'Al-Kashi au triangle AOI.

$$\begin{aligned} OI^2 &= AO^2 + AI^2 - 2AI \cdot AO \cdot \cos(\angle AIO) \\ &= R^2 + \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} - 2 \frac{rR}{\sin \frac{A}{2}} \cos(\angle AIO). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \angle AIO &= \angle BAO - \angle BAI = \frac{\pi - 2C}{2} - \frac{A}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - C - \frac{A}{2} \quad (\text{le triangle OAB est isocèle}). \end{aligned}$$

Tout revient à vérifier que :

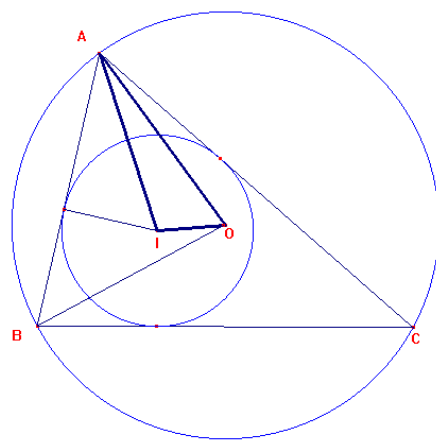
$$\frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} - 2 \frac{rR}{\sin \frac{A}{2}} \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) = -2rR.$$

$$\begin{aligned} \text{Autrement dit : } r &= 2R \cdot \sin \frac{A}{2} \left(\sin\left(C + \frac{A}{2}\right) - \sin \frac{A}{2} \right) = 4R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A+C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\ &= 4R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}. \text{ Résultat connu !} \end{aligned}$$

Corollaire : $r \leq \frac{R}{2}$, avec égalité ssi ABC est équilatéral.

Théorème de Poncelet pour le triangle : Soient $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(I, r)$ deux cercles vérifiant la relation d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Alors le cercle Γ est intérieur au cercle \mathcal{C} . Tout point A de \mathcal{C} est sommet d'un triangle inscrit dans \mathcal{C} et circonscrit à Γ .

Preuve : $OI^2 = R^2 - 2Rr$ implique $r < R$, puis $OI^2 < (R - r)^2$, donc $OI < R - r$.



Pour montrer la seconde assertion nous allons prendre appui sur la relation d'Euler.

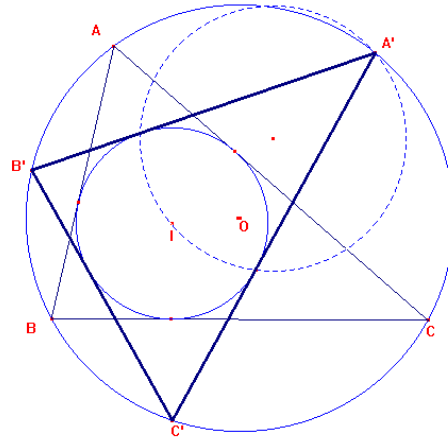
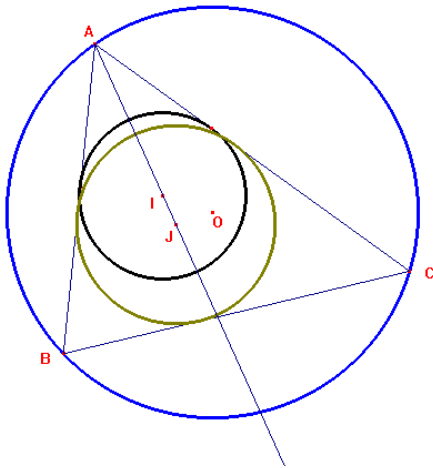
Menons de A les deux tangentes à Γ ; elles recoupent le cercle \mathcal{C} en B et C. Tout revient à vérifier que la droite (BC) est tangente à Γ . Soient J le cercle inscrit du triangle ABC, ρ son rayon. Il faut montrer que $I = J$ et $r = \rho$. On a $OI^2 = R^2 - 2Rr$ et $OJ^2 = R^2 - 2R\rho$.

I et J sont situés sur la demi-bissectrice intérieure de A ; les cercles (I, r) et (J, ρ) sont homothétiques.

La fonction qui à t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AI}$, $t > 0$, associe $P(t) = R^2 - 2R \cdot d(P, (AB)) - OM^2$ est du second degré, car $P(t) = R^2 - 2Rr \cdot t - OA^2 - t^2 AI^2 - 2t \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI} = -2Rr \cdot t - t^2 AI^2 - 2t \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI}$.

Or a $P(0) = 0$, $P(1) = 0$ et $P(\rho) = 0$, donc $\rho = 1$. Cqfd.

La figure de gauche est volontairement erronée.



10. Inversion isogonale ; point de Lemoine.

A mon père

Il existe plusieurs correspondances remarquables liées à un triangle. Lorsqu'elles sont involutives, on les nomme « inversions ». Les inversions triangulaires les plus connues sont l'inversion isotomique et l'inversion isogonale. Nous allons étudier ici cette dernière. Toutes les deux sont reprises du point de vue barycentrique dans mon chapitre sur le sujet.

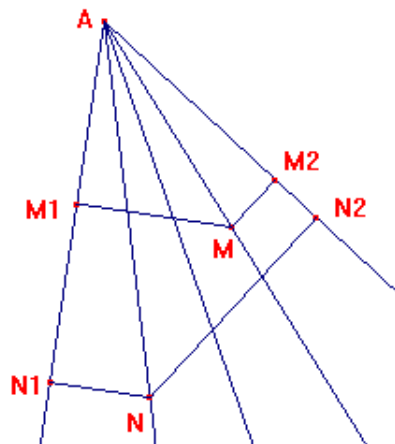
10.1. Points isogonaux relativement à un triangle.

Définition 1 : Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en A . Deux droites D et D' sont dites **isogonales** par rapport à D_1 et D_2 si $(D_1, D) = (D', D_2) \pmod{\pi}$.

Dans la suite, pour tout point M , on note M_1 et M_2 ses projections respectives sur D_1 et D_2 .

Théorème 1 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) Les droites AM et AN sont isogonales par rapport à D_1 et D_2 ;
- ii) $(AN) \perp (M_1M_2)$;
- iii) $(AM) \perp (N_1N_2)$;
- iv) $(D_1, M_1M_2) \equiv (N_1N_2, D_2) \pmod{\pi}$;
- v) Les points M_1, M_2, N_1 et N_2 sont sur un cercle de centre Ω , milieu de MN ;
- vi) $AM_1 \cdot AM_2 = AN_1 \cdot AN_2$.



Théorème 2 : Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Si un point M du plan n'appartient pas à Γ , les droites isogonales respectives de (AM) , (BM) et (CM) relativement aux angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} se coupent en un point N .

Définition 2 : Le point N est dit **isogonal** de M relativement au triangle ABC . L'application $L : M \rightarrow N$ est appelée **inversion isogonale** par rapport au triangle ABC .

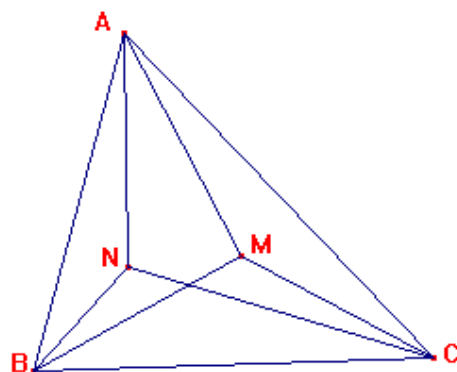
A noter que si M appartient à la droite (AB) , son isogonal est C , etc. L n'est donc pas injective. Si l'on veut que L soit involutive, il faut restreindre son domaine :

Proposition 3 : Soit U l'ouvert du plan obtenu en lui ôtant les trois droites (AB) , (BC) , (CA) et le cercle circonscrit. L'application L est une involution continue de U .

Elle permute ses 10 composantes connexes par arcs, d'une façon que l'on pourra déterminer.

Théorème 4 : Si M appartient à U et a pour coordonnées barycentriques (x, y, z) , $N = L(M)$ a pour coordonnées barycentriques : $x' = \frac{a^2}{x}$, $y' = \frac{b^2}{y}$, $z' = \frac{c^2}{z}$.

Preuve : cf. mon chapitre de calcul barycentrique.



10.2. Exemples de points isogonaux.

L'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont isogonaux.

Les centres des cercles inscrit et exinscrits sont leurs propres isogonaux ; ce sont les seuls.

Définition 3 : L'isogonal K du centre de gravité G s'appelle **point de Lemoine**¹⁶ du triangle. Ce point est donc l'intersection des trois **symédianes**, qui sont les symétriques des médianes par rapport aux bissectrices issues du même sommet.

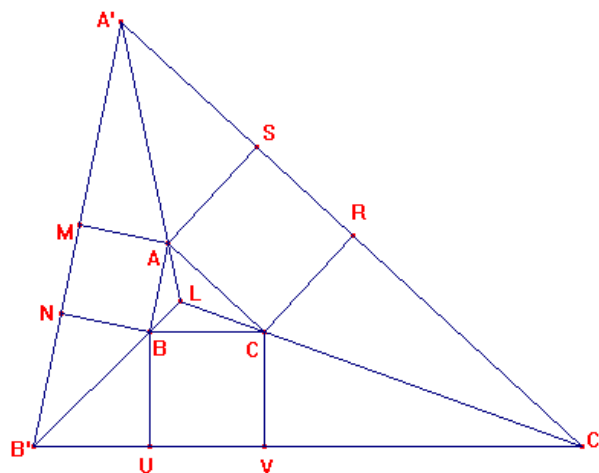
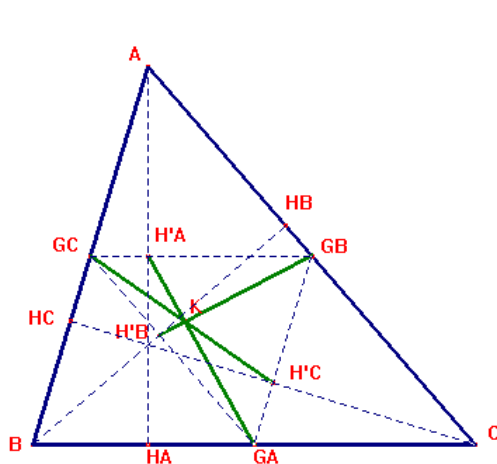
Théorème 5 : Soient P, Q et R les projections orthogonales de M sur les droites (BC), (CA) et (AB). Le point de Lemoine est l'unique point du plan minimisant $F(M) = MP^2 + MQ^2 + MR^2$.

Proposition 6 : Le point de Gergonne d'un triangle ABC est le point de Lemoine de son triangle de Gergonne PQR.

Les deux résultats suivants donnent d'autres constructions du point de Lemoine.

Proposition 7 : Notons G_A, G_B, G_C les pieds des médianes, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs, H'_A, H'_B, H'_C les milieux des segments $[AH_A], [BH_B], [CH_C]$. Les droites $G_AH'_A, G_BH'_B$ et $G_CH'_C$ concourent en K, point de Lemoine.

Preuve : cf. Eiden, p. 148.



Théorème 8 (Grèbe) : Soit ABC un triangle. On trace les trois carrés BCUV, ACRS et ABNM extérieurs au triangle. Les droites (MN), (RS), (UV) déterminent un triangle A'B'C'. Les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en le point de Lemoine L du triangle ABC.

Preuve : cf. Sortais, p. 160-163.

Problème : Dans le plan affine euclidien \mathcal{E} on se donne n droites affines $D_i, 1 \leq i \leq n$. À tout point M associons la somme des carrés des distances aux droites $D_i : f(M) = \sum d(M, D_i)^2$, et étudions le ou les points M rendant minimum $f(M)$.

1) Résoudre ce problème lorsque les droites sont deux à deux parallèles (choisir un bon repère).

¹⁶ **Émile Michel Hyacinthe LEMOINE** (Quimper 1840 - Paris 1912) entra à l'École polytechnique en 1860, et y enseigna pendant six ans. Il imagina le « Point Gamma », fête de l'Ecole polytechnique, en faisant référence à son professeur d'astronomie, le capitaine Laussédad, qui, dans toutes ses leçons mentionnait ce point par où passe la Terre à l'équinoxe de printemps. Lemoine abandonna l'enseignement pour raisons de santé, et devint ingénieur du gaz de Paris, mais il continua de s'intéresser aux mathématiques et à pratiquer la musique en amateur (à l'X déjà, il faisait partie d'un groupe de musique de chambre, «La Trompette», qui influa sur le mouvement musical de Paris. Camille Saint-Saëns avait composé un septuor pour trompette pour ce groupe).

Ses travaux concernent surtout la géométrie plane. Il reste connu pour ses études de 1873 sur le triangle et le cercle ; il montre le concours des symédianes d'un triangle, et présenta ce résultat à Lyon lors d'un congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, dont il était un fondateur. Lors d'un congrès tenu à Oran en 1888, il classifia les constructions géométriques en 5 opérations, mais cela ne suscita guère d'intérêt.

2) Ce cas est désormais exclu. On rapporte \mathcal{E} à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et l'on choisit pour chaque droite D_i une équation d'Euler $x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - p_i = 0$. On introduit les vecteurs \vec{C} de coordonnées $\cos \theta_i$, \vec{S} de coordonnées $\sin \theta_i$ et \vec{P} de coordonnées p_i dans \mathbf{R}^n .

a) Vérifier que si $M(x, y)$, alors $f(M) = \|x \cdot \vec{C} + y \cdot \vec{S} - \vec{P}\|^2$.

b) En déduire l'existence et l'unicité du point Ω rendant minimum f ; calculer ses coordonnées.

c) Préciser la nature des courbes de niveau de f : $C(k) = \{M; f(M) = k\}$.

3) Dans le cas de 3 droites, montrer que Ω est le point de Lemoine.

10.3. Ellipses inscrites dans un triangle.

Etant donné un triangle ABC, il existe une conique inscrite dans le triangle : le cercle inscrit. On peut démontrer que, pour tout point F intérieur au triangle, il existe une unique ellipse inscrite dans le triangle ABC et ayant F pour foyer. L'autre foyer de cette ellipse est l'isogonal F' de F.

Sur les coniques en tous genres inscrites dans un triangle, cf. Sortais, p. 144, Tangente, p. 84, etc.

11. Problèmes d'extrema.

11.1. Triangle orthique.

Problème : Soit ABC un triangle, PQR un triangle inscrit ($P \in [BC]$, $Q \in [CA]$, $R \in [AB]$). Trouver le, ou les triangle(s) inscrit(s) de périmètre minimum.

Ce problème célèbre fut posé par Giovanni Fagnano¹⁷.

L'application $\Phi : (P, Q, R) \in [BC] \times [CA] \times [AB] \rightarrow PQ + QR + RP$ est continue sur un compact, donc bornée et atteint ses bornes. Il découle facilement de l'inégalité du triangle que le triangle de périmètre maximum est ABC lui-même.

Définition : Soient ABC un triangle acutangle, H_A , H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C, H l'orthocentre. Le triangle $H_A H_B H_C$ est appelé **triangle orthique**.

Proposition 1 : On suppose que le triangle ABC n'est pas rectangle.

- i) Les angles BAC et HOA ont mêmes bissectrices.
- ii) OA, OB, OC sont resp. perpendiculaires aux côtés $H_B H_C$, $H_C H_A$ et $H_A H_B$ du triangle orthique.
- iii) Les droites $H_A H_C$ et $H_A H_B$ sont symétriques par rapport à la hauteur AH_A .

Proposition 2 : On suppose que le triangle ABC est acutangle.

- i) Les triangles $AH_B H_C$, $H_A B H_C$ et $H_A H_B C$ sont directement semblables entre eux, et indirectement semblables au triangle ABC.
- ii) Les hauteurs de ABC sont bissectrices intérieures du triangle orthique. H est donc le centre du cercle inscrit du triangle orthique. Ce triangle est donc une trajectoire de lumière, ou de billard, de la figure.
- iii) Le triangle orthique est l'unique triangle de lumière inscrit dans ABC.
- iv) Le triangle orthique est l'unique triangle de périmètre minimum inscrit dans le triangle ABC.

Ce périmètre vaut $\frac{8S^2}{abc}$.

Proposition 3 : Si ABC est rectangle ou obtusangle en A, le triangle inscrit de périmètre minimum correspond à $Q = R = A$, P pied de la hauteur issue de A.

¹⁷ **Giovanni Francesco FAGNANO dei TOSCHI** (Sinigaglia, 1715-1797), fils du gonfalonier et mathématicien Giulio Carlo Fagnano (1682-1766), célèbre pour la duplication de l'arc de lemniscate, fut ordonné prêtre. Il poursuivit l'œuvre de son père sur le triangle et la lemniscate de Bernoulli, et calcula diverses primitives.

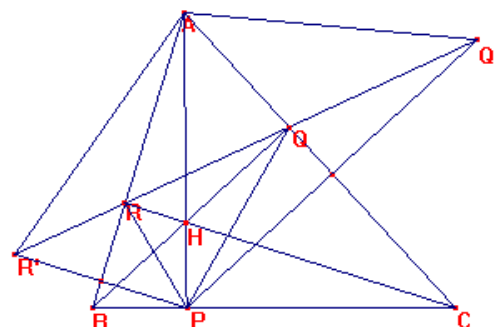
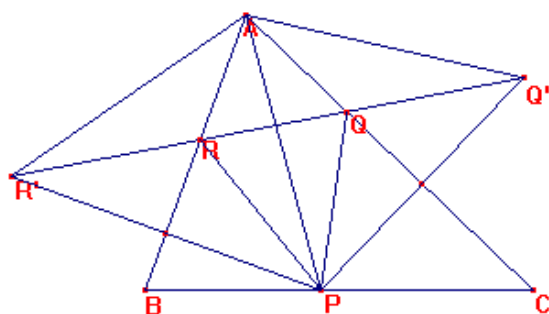
Voici une solution géométrique simple, supposant le triangle acutangle.

Fixons un point P sur le segment BC, et cherchons, parmi tous les triangles inscrits PQR de sommet P, celui de périmètre minimum. Notons R' et Q' les symétriques de P par rapport aux droites (AB) et (AC). Je dis que le segment [R'Q'] coupe les segments [AB] et [AC] ; admettons cela.

On a $PR + RQ + QP = R'R + RQ + QQ' \geq R'Q'$ par « effet miroir ».

$PR + RQ + QP$ est minimum ssi R'RQ' sont alignés dans cet ordre. Il vaut $2AP \cdot \sin \hat{A}$.

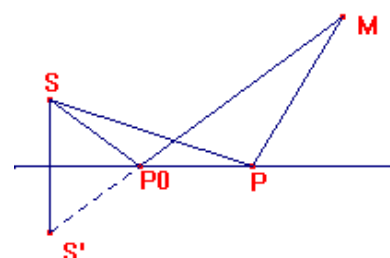
Ce périmètre est minimum ssi AP est minimum, i.e. ssi P est pied de la hauteur issue de A.



Voici une autre approche, utilisant le principe de Fermat, supposant le triangle acutangle.

La fonction Φ introduite ci-dessus est minorée et atteint son inf.

Il est facile de voir que cet inf est atteint pour un triangle PQR tel que $(P, Q, R) \in]BC[\times]CA[\times]AB[$. Fixons Q et R par la pensée. P est le point de la droite (BC) tel que $RP + PQ$ soit minimum. En vertu du principe de Fermat, cela a lieu ssi les droites (RP) et (PQ) sont symétriques par rapport à (BC). Par symétrie, on voit que le triangle PQR est un triangle de lumière de ABC. C'est donc le triangle orthique (prop. 2, iii).



Principe de Fermat

Remarque : Pour des compléments, cf. Sortais p. 26-35, Dörrie, p. 359, et RMS juin 1995, p. 788.

11.2. Inégalités isopérimétriques et autres.

Problème : Trouver, parmi les triangles de périmètre donné, celui, ou ceux, d'aire maximum.

Trouver, parmi les triangles d'aire donnée, celui, ou ceux, de périmètre minimum.

La réponse est donnée par le :

Théorème : Soit T un triangle ABC de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, de demi-périmètre

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ et d'aire } S. \text{ Alors } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}, \text{ avec égalité ssi T est équilatéral.}$$

Preuve : L'inégalité de la moyenne géométrique donne :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p} \left[\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \right]^{3/2} \leq \sqrt{p} \left[\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right]^{3/2} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Notons que $p-a = \frac{b+c-a}{2} > 0$, de même que $p-b$ et $p-c$. Cas d'égalité obvie.

Exercice 1 : inégalité isodiamétrique.

Soit T une plaque triangulaire ABC. On appelle « diamètre » de T $D = \sup \{ MP ; (M,P) \in T \times T \}$.

Montrer que $D = \max(a, b, c)$ et que $S \leq \frac{\pi}{4} D^2$.

NB : L'inégalité isodiamétrique de Bieberbach étend cela aux compacts (cf. Berger, 9.13.8).

Exercice 2 : Montrer que $S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (abc)^{2/3}$. Cas d'égalité ?

Solution : $S = \frac{ab}{2} \cdot \sin C = \text{etc.}$, d'où $S^3 = \frac{a^2 b^2 c^2}{8} \sin A \sin B \sin C$.

Or $f(t) = \ln(\sin t)$ est strictement concave sur $]0, \pi[$, d'où $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{A+B+C}{3}) \geq \frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}$, etc., avec égalité ssi A, B, et C sont égaux, donc ssi le triangle est équilatéral.

Exercice 3 : Montrer $\frac{\pi}{3} \leq \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$, le minimum étant atteint pour le triangle équilatéral.

Exercice 4 : Trouver le ou les triangles ABC inscrits dans un cercle, qui maximisent le produit AB.BC.CA.

Indication : On montrera que cela équivaut à maximiser la fonction :

$f(a, b, c) = 8 \cdot \sin \frac{b-a}{2} \cdot \sin \frac{c-a}{2} \cdot \sin \frac{c-b}{2}$ sous les contraintes $0 \leq a \leq b \leq c \leq 2\pi$. Conclure.

Mais on peut aussi utiliser la formule $2R = \frac{abc}{2S}$.

Exercice 5 : Soient r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, d'un triangle. Montrer que $2r \leq R$, avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

Exercice 6 : On se donne deux triangles rectangles tels que le cercle inscrit au premier soit égal au cercle circonscrit au second. On note S l'aire du premier triangle, S' celle du second.

Montrer que $\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}$. [Sélection française Olympiades 2005]

Exercice 7 : Trouver, parmi les triangles inscrits dans un cercle donné, celui, ou ceux, d'aire maximum, resp. de périmètre maximum. Mêmes questions avec le minimum.

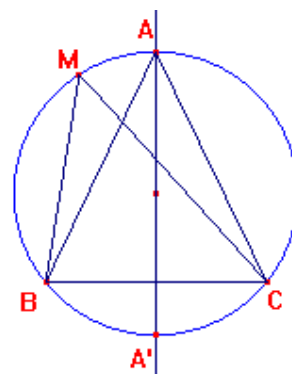
Preuve : Soit Γ le cercle en question. Les applications

$$T = (A, B, C) \in \Gamma^3 \rightarrow S \text{ et } P \in \mathbf{R}^+ \text{ (S aire, P périmètre)}$$

sont continues sur un compact, donc bornées et atteignent leurs bornes.

Soit $T = ABC$ un triangle d'aire maximum. Fixons un instant B et C. La médiatrice de [BC] recoupe le cercle en deux points A et A'. Soit A celui des deux qui est le plus éloigné de la base BC. Le point de l'arc BAC le plus éloigné de la droite BC est le point A : le triangle MBC est d'aire maximum ssi M = A. De même, si M est sur l'arc BA'C, son aire est inférieure à celle de BA'C, donc à celle de BAC. Ainsi, le triangle ABC est isocèle en A. Par raison de symétrie, il est isocèle en B et C, donc équilatéral. T est d'aire minimum ss'il a deux sommets égaux.

Les triangles de périmètre minimum sont ceux de la forme AAA. Soit $T = ABC$ un triangle de périmètre maximum. Fixons un instant B et C. Soit M un point du cercle. L'ellipse de foyers B et C passant par M recoupe le cercle en un point M'



Exercice 8 : Mêmes questions pour les triangles circonscrits à un cercle donné.

Exercice 9 : Quels sont les triangles d'aire maximum inscrits dans une ellipse ?

Quels sont les triangles d'aire minimum circonscrits à une ellipse ?

Exercice 10 : Parmi les trapèzes de hauteur et de bases données, le trapèze isocèle est celui de périmètre minimum.

11.3. Somme, produit des distances aux côtés.

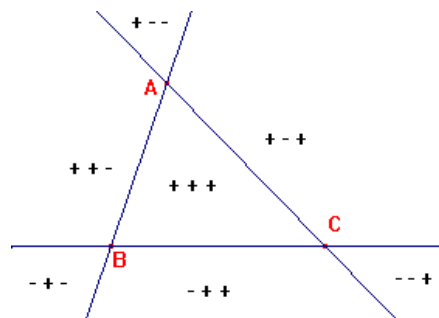
Problème : Un point M se projette en P, Q et R sur les côtés (BC), (CA) et (AB) d'un triangle ABC. Trouver le ou les point(s) M rendant minimum respectivement

$$f(M) = MP + MQ + MR \quad , \quad g(M) = MP^2 + MQ^2 + MR^2 \quad \text{et} \quad h(M) = MP \cdot MQ \cdot MR$$

Solution : Pour résoudre élégamment ces problèmes, introduisons la notion suivante.

Définition : Soit M un point du plan. On appelle **coordonnées trilineaires** de M les distances algébriques $x = \overline{MP}$, $y = \overline{MQ}$, $z = \overline{MR}$ de M aux droites (BC), (CA) et (AB), les normales étant orientées de telle sorte qu'un point M intérieur au triangle ait des coordonnées trilineaires > 0 .

Autrement dit on oriente la normale à (BC) de sorte que A soit du côté positif, etc.



Régionnement du plan selon les signes de x, y, z

Supposons le triangle ABC orienté dans le sens direct. Un point M du plan peut être repéré par :

- Ses coordonnées trilineaires x, y, z
- Ses coordonnées barycentriques λ, μ, ν , qui sont uniques si l'on suppose $\lambda + \mu + \nu = 1$.
- Les aires orientées des triangles \overline{MBC} , \overline{MCA} et \overline{MAB} , de somme $S = \overline{ABC}$.

Proposition 1 : Ces trois systèmes de coordonnées sont liés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a.x + b.y + c.z &= 2S \\ \overline{MBC} &= \frac{ax}{2}, \quad \overline{MCA} = \frac{by}{2}, \quad \overline{MAB} = \frac{cz}{2} \\ \lambda S &= \overline{MBC}, \quad \mu S = \overline{MCA}, \quad \nu S = \overline{MAB}. \end{aligned}$$

Il découle des propriétés des coordonnées barycentriques et de ces formules que tout triplet (x, y, z) de réels liés par $ax + by + cz = 2S$ est le triplet des coordonnées trilineaires d'un point M.

Dans la suite, on suppose que le point M est intérieur au triangle, *i.e.* que $x, y, z, \lambda, \mu, \nu, \overline{MBC}, \overline{MCA}$ et \overline{MAB} sont ≥ 0 .

Proposition 2 : • Si le triangle est scalène, f est minimum, resp. maximum, en un seul sommet.

- S'il est isocèle en A, et si l'angle A est obtus, f est minimum en A, maximum sur [BC].
- S'il est isocèle en A, et si l'angle A est aigu, f est minimum sur [BC], maximum en A.
- S'il est équilatéral, f est constante sur la plaque triangulaire.

Preuve : Il s'agit de minimiser ou maximiser $x + y + z$ sous les contraintes

$$ax + by + cz = 2S, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad (*)$$

c'est-à-dire sur un triangle de \mathbf{R}^3 . C'est un problème très simple de programmation linéaire.

Supposons $a \geq b \geq c$. Il vient : $c.(x + y + z) \leq 2S \leq a.(x + y + z)$.

$\max (x + y + z) = \frac{2S}{c}$, atteint pour $x = y = 0$, donc en C (C seulement si $b > c$).

$\min (x + y + z) = \frac{2S}{a}$, atteint pour $y = z = 0$, donc en A (A seulement si $a > b$).

Remarque : Les courbes de niveau $f(M) = cte$ sont des segments parallèles entre eux.

Corollaire (Viviani)¹⁸ : Soit ABC un triangle équilatéral, M un point intérieur du triangle. La somme des distances de M aux trois côtés est constante et égale à la hauteur du triangle.

¹⁸ Le géomètre et physicien **Vincenzo VIVIANI** (Florence, 1622-1703) étudia dans une école de Jésuites. Son intelligence y fut remarquée, et il obtint une bourse du grand duc Ferdinand de Médicis. Disciple de Galilée de 1639 à 1642, Viviani étudia sous Torricelli. Il fut nommé à l'Académie de Dessin de Florence, puis ingénieur des Offices fluviaux. En 1660, en compagnie de Borelli, Viviani mesura la vitesse du son en chronométrant la différence entre l'éclair et le son d'un canon. Ils obtinrent le valeur de 350 m/s, considérablement meilleure que la valeur de 478 m/s obtenue par Gassendi (la valeur actuellement admise est de 331,29 m/s à 0°C). La réputation de Viviani s'étendit à toute l'Europe : Louis XIV le nomma à l'Académie royale des sciences, Jean Casimir II de Pologne le nomma astronome, et il fut élu à la Royal Society en 1696.

On prouve directement ce résultat en notant que si a est le côté du triangle, $\frac{a}{2}(x+y+z)$ est son aire.

Proposition 3 : La fonction $g(M) = MP^2 + MQ^2 + MR^2$ est minimum en un unique point L, de coordonnées barycentriques $\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Preuve : Il s'agit de minimiser $x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes (*).

Si l'on projette orthogonalement le point O sur le plan affine $ax + by + cz = 2S$, (x, y, z) est proportionnel à (a, b, c) , vecteur normal au plan, et il est clair que x, y et z sont ≥ 0 . etc.

Remarque : Ce point L est le point de Lemoine du triangle (cf. § 8). Les lignes de niveau $g(M) = \text{cte}$ sont des ellipses de centre L.

Proposition 4 : La fonction $h(M) = MP \cdot MQ \cdot MR$ est minimum sur la réunion $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$, maximum en G, centre de gravité du triangle.

Preuve : La première affirmation est évidente : elle correspond à $h(M) = 0$.

La seconde consiste à maximiser le produit $x \cdot y \cdot z$ sous la contrainte $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 2S$.

Posant $X = ax, Y = by, Z = cz$, il s'agit de maximiser $\frac{XYZ}{abc}$ sous la contrainte $X + Y + Z = 2S$.

L'inégalité de la moyenne géométrique montre que le maximum est atteint pour $X = Y = Z = \frac{2S}{3}$.

D'où $\max h(M) = \frac{8S^3}{27abc}$. Il est atteint au centre de gravité G du triangle, seul point tel que $\text{Aire}(GBC) = \text{Aire}(GCA) = \text{Aire}(GAB)$, en vertu du lien entre les coordonnées barycentriques d'un point M et les aires des triangles MBC, MCA et MAB.

Exercice : Trouver le point M intérieur au triangle ABC, qui minimise $k(M) = \frac{BC}{MP} + \frac{CA}{MQ} + \frac{AB}{MR}$.
(Olympiades 1981)

11.4. Point de Fermat-Torricelli.

Problème : Soit ABC un triangle. Trouver le ou les point(s) M rendant minimum la somme des distances aux trois sommets $f(M) = MA + MB + MC$.

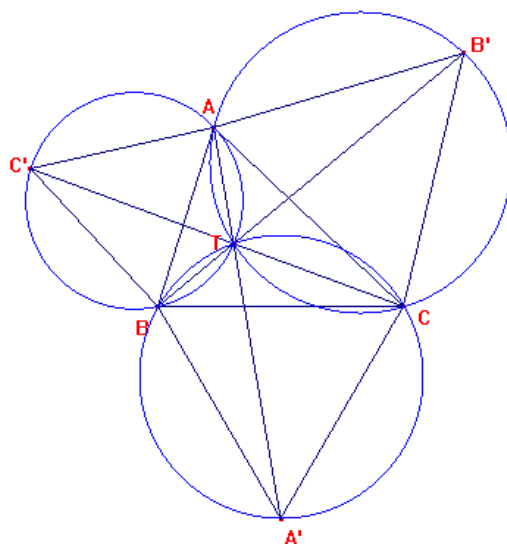
Ce célèbre problème fut posé par Fermat (1601-1665) à Torricelli (1608-1647). Celui-ci le résolut de plusieurs façons. Il a suscité depuis une abondante littérature.

Proposition : Soit ABC un triangle orienté de sorte que ses angles aient des mesures dans $]0, \pi[$. On construit à l'extérieur du triangle les triangles équilatéraux ACB', BAC' et CBA' . Alors :

- Les segments AA', BB' et CC' sont égaux.
- Les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en un point T.
- Les cercles circonscrits à ces trois triangles se coupent en T.
- T est strictement intérieur au triangle ssi les angles du triangle sont tous $< 2\pi/3$.

T est appelé **point de Torricelli** du triangle ABC.

Proposition : La fonction $f : M \rightarrow MA + MB + MC$ atteint son minimum en un point unique. Si tous les angles du triangle sont $< 2\pi/3$, ce point est le point de Torricelli.



Si l'angle A est $\geq 2\pi/3$, ce point est A .

Solution : Vérifions que si tous les angles sont $< 2\pi/3$, le point de Torricelli T est l'unique point rendant minimum la fonction f .

Soit r la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$, et $M' = r(M)$.

$$f(M) = MA + MB + MC = M'C' + M'M + MC \geq CC'.$$

$f(M) = CC'$ ssi C, M, M' et C' ont alignés dans cet ordre.

M doit donc appartenir à la droite CC' et $r(M) = M'$ aussi, donc $M \in (CC') \cap r^{-1}(CC') = (CC') \cap (AA') : M = T$. cqfd

NB : Sortais, p.200, Dörrie, p.361, Berger 2, Avez, p.139, Eiden, p. 250.

Exercice : approche moderne du problème de Fermat.

1) Que dire de la fonction $f: M \rightarrow MA + MB + MC$ de \mathcal{P}

dans \mathbf{R}^+ ? Soit m sa borne inférieure ; montrer que $m \geq$

$\max(a, b, c)$. Montrer que $K = \{ M ; f(M) \leq m + 1 \}$ est compact non vide. En déduire que f atteint sa borne inférieure en un point Ω . Montrer que ce point appartient à l'enveloppe convexe des points A, B, C .

2) Montrer que f est strictement convexe. En déduire que Ω est unique.

3) Montrer que f est différentiable sur l'ouvert $U = \mathcal{P} - \{A, B, C\}$, et que

$$(\forall M \in U) \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \vec{u}_A + \vec{u}_B + \vec{u}_C, \text{ où } \vec{u}_A = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM}, \text{ etc.}$$

Montrer que si $\Omega \in U$, les angles $A\Omega B, B\Omega C$ et $C\Omega A$ valent tous $\frac{2\pi}{3}$.

4) Conclure si tous les angles du triangle sont $< \frac{2\pi}{3}$, et sinon.

11.5. Couvercle d'un triangle.

Problème : Parmi tous les disques contenant un triangle donné, trouver celui ou ceux de rayon minimum.

Ce problème fut étudié, dans le cadre plus général des compacts, par l'allemand Heinrich Wilhelm Ewald Jung dans deux articles de 1899 et 1910, puis par le français Raoul Bricard en 1914.

Théorème de Jung : Soit K un compact non vide du plan euclidien. Parmi tous les disques fermés contenant K , il en existe un, et un seul, de rayon minimum.

Preuve : Notons $B'(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r .

Existence. Notons D l'ensemble des rayons des boules fermées contenant K .

D est une demi-droite non vide de \mathbf{R}^+ , car $(\forall a) (\exists r) K \subset B'(a, r)$. Soit $\rho = \inf D$.

Par définition, il existe une suite (a_n) de points du plan tels que

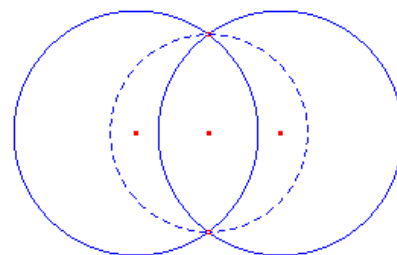
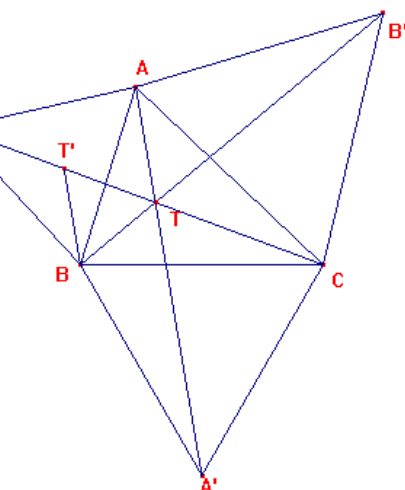
$$(\forall n) K \subset B'(a_n, \rho + \frac{1}{n}). \text{ Du coup, } (\forall n) K \subset B'(a_n, \rho + 1);$$

comme K est borné, la suite (a_n) est bornée.

On peut en extraire une suite convergente $(a_{n(k)}) \rightarrow a$.

Il est facile de voir que $K \subset B'(a, \rho)$.

Unicité. L'unicité du centre a se voit par absurde sur la figure ci-contre.



NB : une autre solution consiste à montrer que la fonction $f: x \rightarrow \max_{y \in K} \|x - y\|$ est continue, convexe et coercive. Elle n'est pas strictement convexe, mais l'unicité se montre comme ci-dessus.

Définition : Le disque considéré s'appelle **couvercle** de K ; son centre est parfois dit **centre** de K.

Proposition : Soit K un triangle ABC. S'il est acutangle, le couvercle de K est le disque circonscrit au triangle ABC. Si l'angle A est obtus, le couvercle est le cercle de diamètre BC. Dans les deux cas, le centre de K est le point du plan qui minimise la fonction $f(M) = \max(MA, MB, MC)$.

Remarques : 1) Le théorème de Jung s'étend aux espaces euclidiens ; cf. Berger, t. 3, § 11.5.8.

2) Problème ouvert : Soit $T = ABC$ un triangle. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique point M_n minimisant $f_n(M) = MA^n + MB^n + MC^n$, et que la suite (M_n) converge vers le centre du couvercle de T.

Exercice¹⁹ : Montrer que le rayon minimum vérifie l'encadrement $\frac{\text{diam}(K)}{2} \leq r(K) \leq \frac{\text{diam}(K)}{\sqrt{3}}$.

$r(K) = \frac{\text{diam}(K)}{2}$ ssi K est un disque fermé, $r(K) = \frac{\text{diam}(K)}{\sqrt{3}}$ ssi K est un triangle équilatéral.

Notons que si ABC est un triangle inscrit d'aire maximum, la tangente en A à l'ellipse est parallèle à la droite (BC).

11.6. Théorème d'Erdős-Mordell.

Conjecturé en 1935 par P. Erdős, ce théorème fut démontré en 1937 par L. Mordell, mais il fallut attendre 1945 pour que D. K. Kazarinov en donnât une démonstration élémentaire.

Théorème : Soit $T = ABC$ un triangle. Pour tout point M de l'intérieur de T, se projetant en P, Q et R sur les côtés du triangle, on a : $MA + MB + MC \geq 2.(MP + MQ + MR)$.

L'égalité est atteinte si et seulement si T est équilatéral de centre M.

La preuve ici proposée (Avez), repose sur le :

Lemme : $(\forall r > 0) \quad r + \frac{1}{r} \geq 2$ et $r + \frac{1}{r} = 2 \Leftrightarrow r = 1$.

Preuve : Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (AM) recoupe Γ en A' . Soit A'' le point diamétralement opposé à A' .

Le théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère convexe inscriptible $ABA'C$, donne :

$$A'C.AB + A'B.AC = AA'.BC \quad (1)$$

Les triangles AQM et $A''CA'$, rectangles en Q et C resp., sont semblables. Pourquoi ?

Par suite $\frac{AM}{A''A'} = \frac{MQ}{A'C}$. D'où :

$$A'A''.MQ = AM.A'C \quad (2)$$

De même, considérant les triangles MAR et $A'A''B$:

$$A'A''.MR = AM.A'B \quad (3)$$

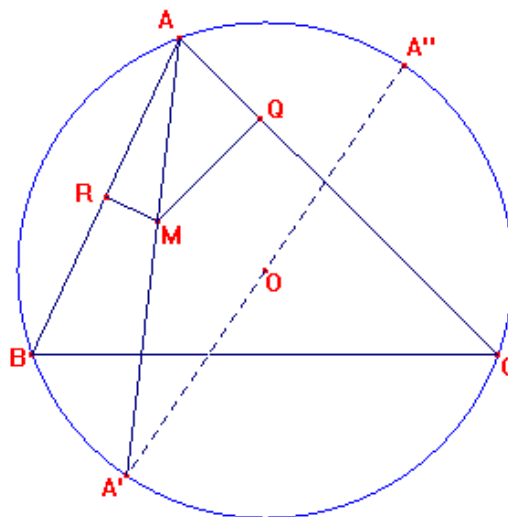
On peut supposer $A'A'' = 1$, à homothétie près.

Multiplions (1) par $\frac{MA}{BC}$: $MA.A'C \cdot \frac{AB}{BC} + MA.A'B \cdot \frac{AC}{BC} = MA.AA'$

D'où, compte tenu de (2), (3) et $A'A'' = 1$:

$$MQ \cdot \frac{AB}{BC} + MR \cdot \frac{AC}{BC} = MA.AA'$$

De même, par symétrie : $MR \cdot \frac{CB}{CA} + MP \cdot \frac{AB}{AC} = MB.BB'$



¹⁹ Oral ENS 2005, corrigé dans la RMS mai 2006, n° 71 p. 104.

$$MP \cdot \frac{AC}{AB} + MQ \cdot \frac{BC}{BA} = MC \cdot CC'$$

Additionnons membre à membre !

$$MP \cdot \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} \right) + MQ \cdot \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{BA} \right) + MR \cdot \left(\frac{AC}{BC} + \frac{CB}{CA} \right) = MA \cdot AA' + MB \cdot BB' + MC \cdot CC'.$$

Minorons le premier membre grâce au lemme, et majorons le second grâce à $AA', BB', CC' \leq 1$.

Il vient $2(MP + MQ + MR) \leq MA + MB + MC$.

Il y a égalité ssi $AB = BC = CA$ et $AA' = BB' = CC' = 1$, c'est-à-dire si T est équilatéral et A' est diamétralement opposé à A , etc., bref T est équilatéral de centre M

11.7. Triangle cévien d'aire maximum.

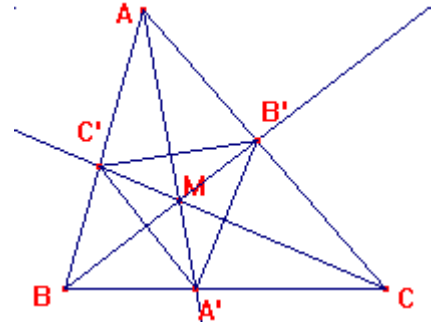
Problème : Soit M un point intérieur au triangle ABC . Les droites MA , MB et MC recoupent les côtés BC , CA et AB resp. en A' , B' et C' . Comment choisir le point M pour que l'aire du triangle $A'B'C'$ soit maximum ?

Ind. : Soient (x, y, z) les coordonnées barycentriques de M .

Montrer que $\text{Aire}(A'B'C') = \frac{2xyz \cdot \text{Aire}(ABC)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$, et déterminer

$$\sup \left\{ \frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} ; x, y, z > 0, x + y + z = 1 \right\}.$$

Pour des compléments, cf. Concours général 1985.



11.8. Ellipses d'aires extrémales.

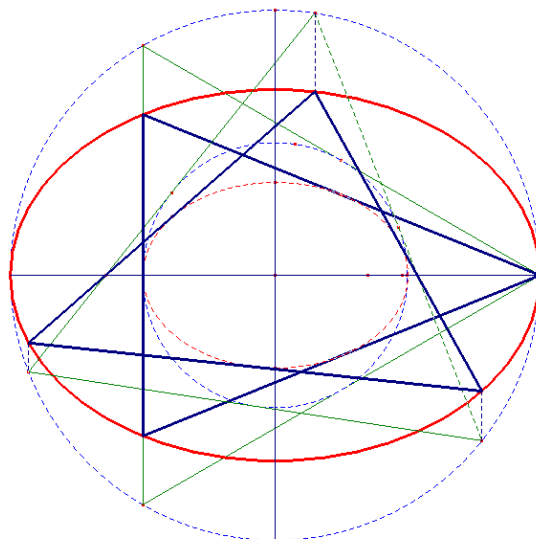
Proposons-nous de résoudre ici quatre problèmes relatifs à des ellipses.

- ♣ Parmi tous les triangles inscrits dans une ellipse, trouver celui ou ceux d'aire maximale.
- ♦ Parmi tous les triangles circonscrits à une ellipse, trouver celui ou ceux d'aire minimale.
- ♥ Parmi toutes les ellipses circonscrites à un triangle, trouver celle d'aire minimale.
- ♠ Parmi toutes les ellipses inscrites dans un triangle, trouver celle d'aire maximale.

Triangles inscrits d'aire maximale.

Soit \mathcal{E} une ellipse. L'application qui, à un triangle inscrit $T = (A, B, C) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ associe son aire $\text{Aire}(T) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$, est continue. Comme $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ est compact, cette fonction est bornée et atteint ses bornes. Le minimum est 0 ; il est atteint pour $A = B$ par exemple.

Pour caractériser les triangles d'aire maximum, transformons le problème par affinité. Si f est une affinité transformant l'ellipse en un cercle, on est ramené au problème suivant : trouver les triangles d'aire maximum inscrits dans un cercle. Il est facile de montrer que ce sont les triangles équilatéraux. Il y en a une infinité ; ils sont tous circonscrits au cercle de même centre et de rayon moitié. Par affinité, les triangles cherchés sont en nombre infini ; ce sont les affines de ces triangles équilatéraux. Tous sont circonscrits à l'ellipse de même centre et de demi-axes moitiés.



Ellipses de Steiner.

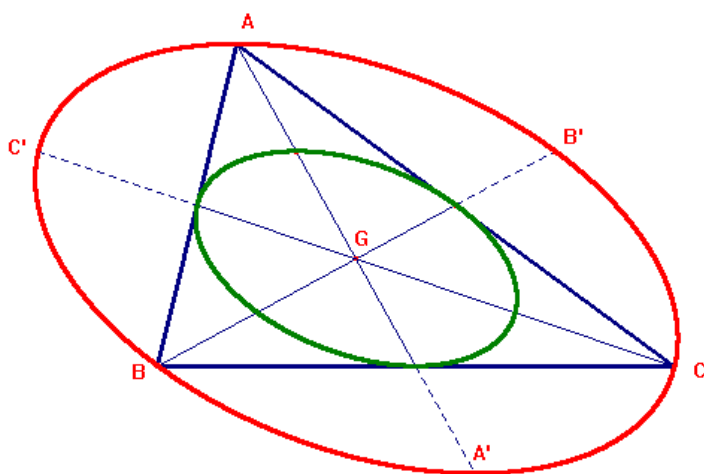
Soit T le triangle ABC . Parmi les ellipses circonscrites à T , c'est-à-dire passant par A , B et C , il y en a d'aire aussi grande qu'on veut. Mais il n'y en a qu'une d'aire minimum :

Théorème : Parmi les ellipses circonscrites au triangle ABC il y en a une, et une seule, d'aire minimum. On l'appelle **ellipse circonscrite de Steiner**. Elle a pour centre le centre de gravité G du triangle, et elle passe par $ABCA'B'C'$, où A' , B' , C' sont les symétriques de A , B , C par rapport à G . La tangente en A à cette ellipse est parallèle à (BC) .

Parmi les ellipses inscrites dans T , c'est-à-dire tangentes aux 3 côtés, il y en a une d'aire maximum.

Théorème : Parmi les ellipses inscrites dans le triangle ABC il y en a une, et une seule, d'aire maximum. On l'appelle **ellipse inscrite de Steiner**. Le rapport de l'aire de cette ellipse à l'aire du triangle est $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Cette ellipse a pour centre le centre de gravité G du triangle, et elle passe par les

milieux des côtés, et elle se déduit de la précédente par $\text{Hom}(G, \frac{1}{2})$. Si z_1, z_2, z_3 sont les affixes des sommets du triangle, et $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, les foyers de cette ellipse sont les racines du polynôme dérivé $P'(z)$. Enfin, la droite passant par ces foyers est la droite minimisant la somme des carrés des distances des sommets (droite de régression orthogonale).

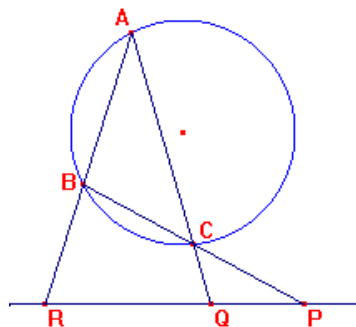


12. Trois problèmes célèbres.

12.1. Le problème de Pappus.

Problème : Soient Γ un cercle donné, P, Q et R trois points alignés. Construire un triangle ABC inscrit dans le cercle Γ dont les côtés, éventuellement prolongés, passent respectivement par P, Q et R.

Ce problème est résolu dans mon chapitre sur le cercle. Il permet de résoudre le problème des cercles tangents d'Apollonios, comme le montre Heath (t. 2, p. 182-185). Le problème suivant le généralise.

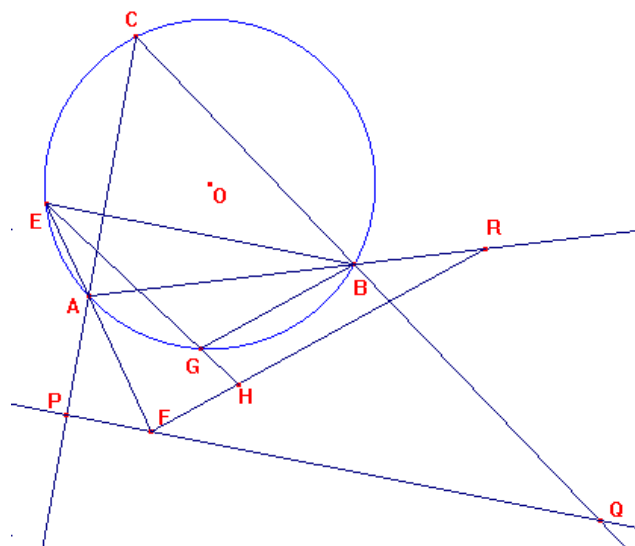
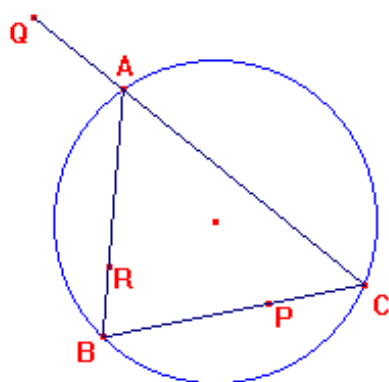


12.2. Le problème de Cramer-Castillon.

Ce problème généralise celui de Pappus. Il fut posé en 1742 par le suisse Gabriel Cramer (1704-1750), et résolu en 1776 par le géomètre italien Castillon²⁰.

Problème de Cramer-Castillon : Etant donné un cercle Γ et trois points P, Q et R non situés sur Γ , construire à la règle et au compas un triangle ABC, inscrit dans le cercle, et dont les côtés, éventuellement prolongés, passent par P, Q et R.

La solution que voici est tirée de Carrega.



Analyse : Supposons le problème résolu. Soit O le centre du cercle Γ .

1) La parallèle à (PQ) passant par B recoupe le cercle Γ en E, la droite (EA) coupe la droite (PQ) en F. Montrons que F est déterminé par les données.

On a $\angle ACB = \angle AEB$ (angles inscrits) et $\angle AEB = \angle AFP$ (alternes-internes), donc $\angle ACB = \angle AFP$.

Il en résulte que les triangles CPQ et PAF sont semblables.

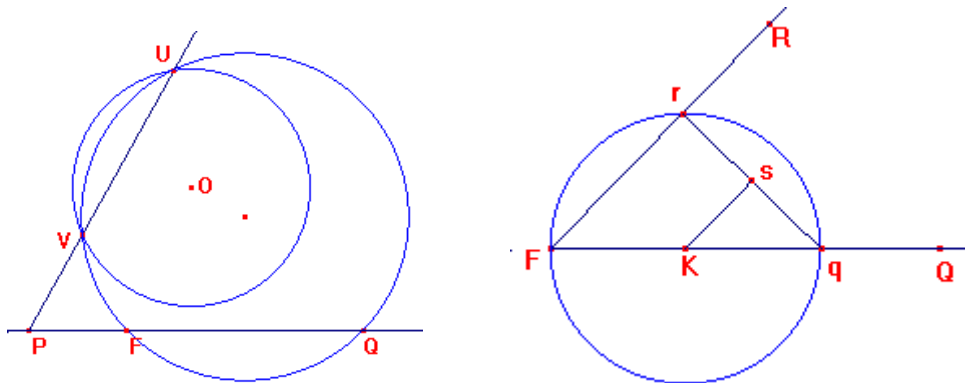
Ainsi, on a $\overline{PF} \cdot \overline{PQ} = \overline{PA} \cdot \overline{PC}$ = puissance de P par rapport à Γ .

Ceci détermine F à l'aide du cercle Γ et des seuls points P et Q.

De plus, F peut être construit à la règle et au compas à partir de Γ , P et Q.

Il suffit de mener de P une sécante au cercle Γ . Si cette sécante coupe Γ en U et V, le cercle circonscrit au triangle UVQ recoupe la droite (PQ) en le point F cherché (fig. de gauche).

²⁰ Giovanni Francesco SALVEMINI (Castiglione 1709 - 1791), géomètre italien connu sous le pseudonyme de Castillon, du nom de son lieu de naissance.



2) La parallèle à la droite (FR) menée de B recoupe Γ en G. La droite (EG) coupe la droite (FR) en H. (Si $E = G$, la droite (EG) est remplacée par la tangente en E à Γ). On montre comme précédemment que les triangles EFH et RFA sont semblables, et que $\overline{FH} \cdot \overline{FR}$ est la puissance de F par rapport à Γ . Ainsi, H est constructible à la règle et au compas à l'aide de Γ , F et R.

3) Montrons que la corde EG peut être construite à partir des données (à l'aide de F et H) à la règle et au compas.

La corde EG est sous-tendue par l'angle inscrit GBE égal à un angle des droites (FQ) et (FR).

Soit K le point de la demi-droite [FB) tel que $FK = \text{rayon du cercle } \Gamma$.

Le cercle de centre K passant par F coupe (FQ) et (FR) en q et r et la corde [q r] a même longueur que EG. Il en résulte que si s est le milieu de la corde [q r], la corde EG est tangente au cercle de centre O et de rayon Ks . On construit donc EG en traçant une tangente passant par H au cercle de centre O et de rayon Ks .

Synthèse.

1) On construit le point F sur la droite (PQ) tel que $\overline{PF} \cdot \overline{PQ} = \text{puissance de P par rapport à } \Gamma$.

Nous avons vu que cela pouvait se faire à la règle et au compas.

2) On construit le point H sur la droite (FR) tel que $\overline{FH} \cdot \overline{FR} = \text{puissance de F par rapport à } \Gamma$.

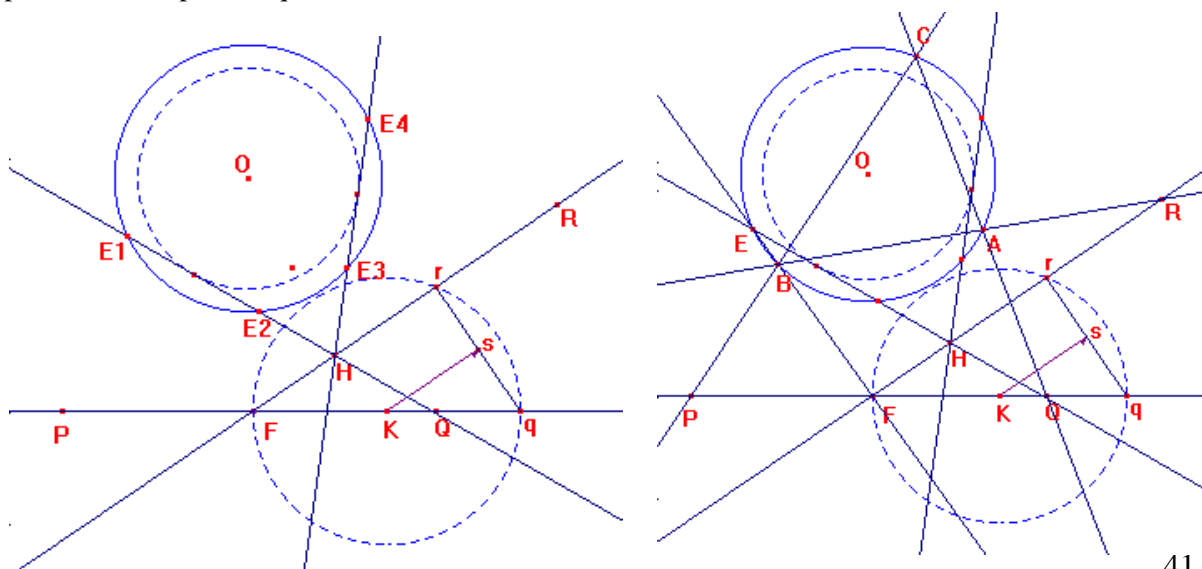
3) On construit le point K sur la demi-droite [FQ) tel que $FK = \text{rayon de } \Gamma$; puis on construit le cercle de centre K passant par F qui coupe les droites (FQ) et (FR) en q et r ; puis on construit s milieu de [q, r].

4) On construit le cercle ayant même centre O que Γ et de rayon Ks .

5) On construit les tangentes au cercle précédent issues de H, ce qui se fait à la règle et au compas.

6) Ces tangentes coupent le cercle Γ en quatre points. L'un de ces points est le point E qui permet de terminer la construction ainsi :

La droite (EF) coupe Γ en A, la droite (AR) coupe Γ en B et la droite (BP) coupe Γ en C. Comme le point E est à choisir parmi quatre points, il est possible que l'on soit amené à faire plusieurs essais pour retenir le point E qui convient.



Remarques : 1) La méthode proposée est également valable lorsque P, Q et R sont alignés (Pappus). L'analyse montre alors que E et G sont confondus, la droite (EG) est alors remplacée par la tangente en E à Γ . La synthèse se simplifie car le cercle de rayon K_s est confondu avec Γ .

2) Ce problème se généralise à un cercle ou une conique Γ et des points M_i ($1 \leq i \leq n$) non situés sur Γ ; il s'agit de trouver un polygone P_i ($1 \leq i \leq n$) inscrit dans Γ tel que $M_i \in P_i P_{i+1}$ pour tout i .

Exercice : On considère les trois inversions f, g et h , de pôles respectifs P, Q et R, et qui conservent le cercle Γ . Montrer l'existence du triangle ABC en considérant $h \circ g \circ f$.

Références : Berger, 10.11.4 et 16.3.10.3, Dörrie, p. 144-147, Callandreaux, p. 199, Carrega, p. 98.

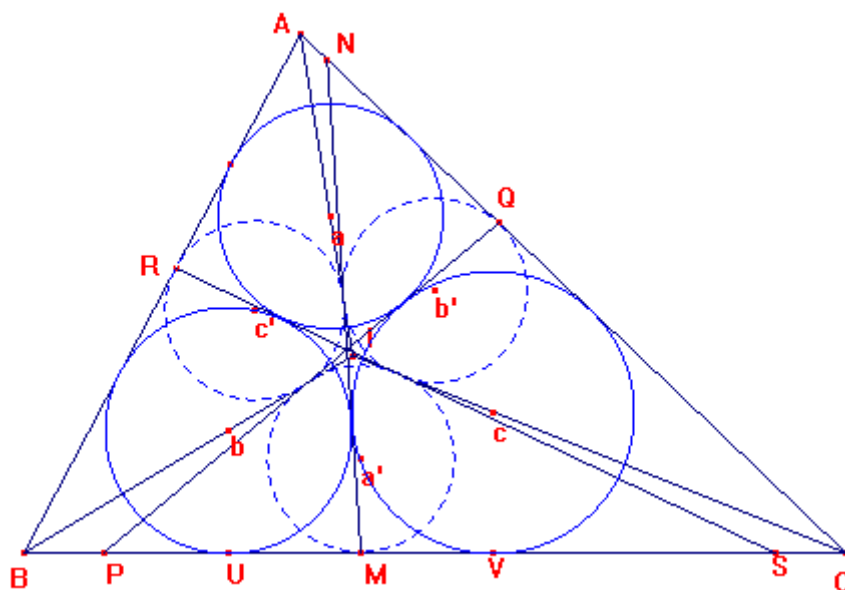
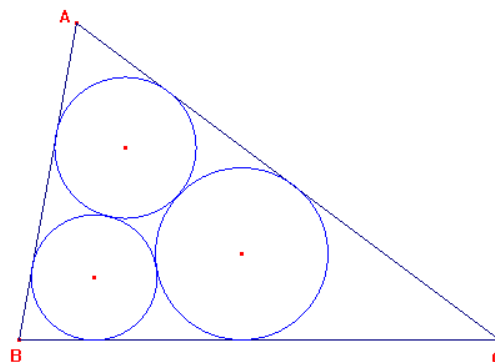
12.3. Le problème de Malfatti.

Ce problème fut posé en 1803 par l'italien Malfatti²¹, et résolu par lui dans le 10^{ème} volume de ses *Memorie di Matematiche e di Fisica della Società italiana delle Scienze*.

Problème de Malfatti : Tracer à l'intérieur d'un triangle trois cercles, chacun d'eux étant tangent aux deux autres et à deux des côtés du triangle.

Ici encore, je suis fidèlement Carrega.

Analyse : Supposons la construction réalisée, et désignons par (a), (b), (c) les trois cercles cherchés, centrés en a, b, c, et inscrits dans les angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.



²¹ **Gian Francesco MALFATTI** (Ala, Trento, 1731 - Ferrara 1807) étudia sous Riccati et d'autres, avant de recevoir une chaire à l'université de Ferrare. Il écrivit un livre important sur les équations du 5^{ème} degré. Il est célèbre pour avoir posé et résolu en 1803 le problème des trois cercles, problème déjà résolu dans le cas du triangle isocèle par Jakob Bernoulli. Malfatti démontra analytiquement l'existence de ces cercles, mais ne parvint pas à en donner une construction effective. Ceci fut l'œuvre de Steiner en 1826 ; Steiner se contenta d'indiquer sans démonstration les théorèmes permettant de parvenir à ce tracé. Cayley en 1852 et Hart en 1861 explicitèrent cette construction. Clebsch résolut le problème au moyen des fonctions elliptiques.

1) On désigne par D, E, F les points de contact de (b) avec (c), de (c) avec (a) et de (a) avec (b). Les trois tangentes aux cercles passant par D, E, F sont les axes radicaux des cercles pris deux à deux, elles concourent donc au centre radical G des trois cercles. On note ces tangentes à l'aide de leurs points d'intersection avec les côtés du triangle par MN, PQ et RS.

Appelons U et V les points de contact de (b) et (c) avec la droite BC. M ayant même puissance par rapport à (b) et (c), on a $MU = MV$. On obtient alors $MS - MP = US - VP = SF - PE = GS - GP$.

La relation $MS - MP = GS - GP$ exprime que M est le point de contact avec la droite BC du cercle inscrit dans le triangle GPS. On désigne par (a') le cercle inscrit dans le triangle GPS. On obtient de façon analogue les cercles (b') et (c') tangentes en Q et R aux droites AC et AB.

2) RS est tangente commune intérieure aux cercles (a') et (b'). Nous allons établir que la seconde tangente commune intérieure à ces deux cercles passe par C.

Menons par C la seconde tangente issue de C au cercle (b'). Cette droite coupe la droite GS en H. Le quadrilatère CNGH étant circonscrit au cercle (b') nous avons :

$$(1) \quad CN + GH = NG + HC.$$

En effet
$$\begin{aligned} CN + GH &= (CQ + NQ) + (G\alpha + \alpha H) \\ &= (C\beta + N\gamma) + (G\gamma + H\beta) \\ &= (N\gamma + G\gamma) + (C\beta + H\beta) \\ &= NG + HC. \end{aligned}$$

Le quadrilatère CNPG est circonscrit au cercle (c), car les droites portant ses côtés sont tangentes à (c). De façon analogue au cas précédent, on a :

$$(2) \quad CN + GP = NG + PC.$$

De (1) et (2) on déduit : (3) $GP + HC = PC + GH$.

Menons par C la seconde tangente issue de C au cercle (a'). Cette droite coupe la droite GS en H'. Le quadrilatère GPCH' est alors circonscrit à (a') et on a :

$$(4) \quad GP + H'C = PC + GH'.$$

De (3) et (4) on déduit $HC - HG = H'C - H'G$. Cette relation nous indique que H et H' sont situés sur une même branche d'hyperbole de foyers C et G. De plus nous savons que H et H' sont situés sur la droite GS et même « visiblement » sur la demi-droite GS. Cette demi-droite passant par le foyer G de l'hyperbole coupe la branche d'hyperbole en un seul point, d'où $H = H'$. Ceci montre que les secondes tangentes issues de C aux cercles (a') et (b') coïncident ; ainsi, la seconde tangente commune intérieure aux cercles (a') et (b') passe par C.

- 3) Désignons par W le point de contact de (c) avec AC ,
X le point de contact de (a') avec PQ ,
Y le point de contact de (b') avec MN.

On a $MD = MV = XE$ ($MV = XE$ est la distance entre deux points de contact des cercles (a') et (c) avec une tangente commune extérieure). De même $DY = QW = QE$.

Par addition on obtient $MY = QX$.

Désignons par Q' et M' les points d'intersection de la droite QM avec les cercles (b') et (a'). la relation $MY = QX$ s'écrit $MY^2 = QX^2$ et elle exprime que la puissance de M par rapport à (b') est égale à la puissance de Q par rapport à (a'), ce qui s'exprime aussi par :

$$\overline{MQ} \cdot \overline{MQ'} = \overline{QM} \cdot \overline{QM'}$$

Il en résulte que $MQ' = QM'$, puis $MM' = QQ'$.

Appelons a_1, b_1, C_1 les projections orthogonales de a', b', C sur la droite QM.

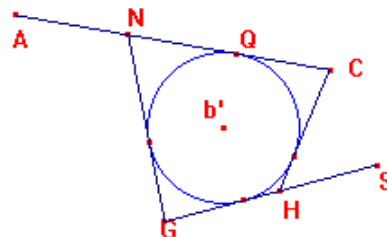
Les triangles CC_1M et Ma_1a' sont semblables, ainsi que les triangles CC_1Q et Qb_1b' , on a donc :

$$\frac{CM}{CC_1} = \frac{Ma'}{Ma_1}, \quad \frac{CQ}{CQ_1} = \frac{Qb'}{Qb_1} \quad \text{et par multiplication :} \quad \frac{CM}{CQ} = \frac{Ma'}{Ma_1} \cdot \frac{Qb_1}{Qb'}.$$

Mais $MM' = QQ'$ entraîne $Ma_1 = Qb_1$, d'où $\frac{CM}{CQ} = \frac{Ma'}{Qb'}$.

Les triangles rectangles CMa' et CQb' sont donc semblables et ainsi $Mba' = QCb'$.

Il en résulte que les cercles (a') et (b') sont vus de C sous le même angle.



Rappelons que nous avons démontré en 2) que la seconde tangente commune intérieure à (a') et (b') passe par C. Le résultat que nous venons d'obtenir nous dit alors que cette tangente est la bissectrice intérieure de l'angle \hat{C} du triangle ABC.

Nous avons, pour démontrer ce résultat, raisonné avec le point C et les cercles (a') et (b') . On démontre de même que la seconde tangente commune intérieure à (b') et (c') est la bissectrice intérieure de \hat{A} , et la seconde tangente commune intérieure à (a') et (c') est la bissectrice intérieure de \hat{B} .

Synthèse :

- 1) On construit I, centre du cercle inscrit du triangle ABC.
- 2) On construit (a') , (b') , (c') cercles inscrits dans les triangles IBC, ICA et IAB.
- 3) On construit MN, PQ, RS, secondes tangentes communes intérieures aux couples de cercles (b') , (c') , (c') et (a') , (a') et (b') . Ces droites sont nommées par leurs points d'intersection avec les côtés du triangle ABC. On retrouve ainsi les axes radicaux des cercles cherchés, qui se coupent en un point G.
- 4) Les droites MN, PQ, RS déterminent des triangles chacun ayant pour côtés une de ces droites et deux côtés du triangle ABC. Les cercles (a) , (b) , (c) inscrits dans ces triangles sont les cercles cherchés.

Notons que toutes ces constructions sont élémentaires et s'effectuent à la règle et au compas.

Références : Hadamard, t.1, p.310, Dörrie, p. 147-151, Callandreau, p. 202, Carrega, p. 102, Brocard-Lemoyne, t.1, p.157

13. Théorème de Morley.

« Avec mon trio, nous avons essayé toutes les figures de la géométrie, triangle, carré, et les combinaisons qui s'entre-coupaient eussent révélé de nouveaux théorèmes si on nous avait observés. »

Eric Jourdan, *Le songe d'Alcibiade*

Tous les points et toutes les droites remarquables du triangle sont constructibles à la règle et au compas... à l'exception des trisectrices, qui possèdent pourtant de très intéressantes propriétés découvertes en 1899 par Morley²². En réalité, celui-ci s'est intéressé au lieu des centres des cardioïdes variables tangentes aux trois côtés du triangle, et a découvert en passant que les trisectrices intérieures du triangle forment un triangle équilatéral : ce qu'on pourrait appeler le « petit théorème de Morley », seul abordé ici.

En 1910 Satyanarayana a publié une démonstration trigonométrique, et Naraniengar en a donné une preuve élémentaire. Il existe une preuve par les complexes, et une preuve à l'envers, due à Raoul Bricard. En 1998, Alain Connes est revenu sur le sujet. L'exercice ci-dessous donne une preuve du petit théorème. Pour une étude plus complète, utilisant toutes les trisectrices et non plus les

²² **Franck MORLEY** (Woodbridge, Suffolk, 1860 - Baltimore, USA, 1937) gagna une bourse qui lui permit d'entrer en 1879 au King's College de Cambridge. Il dut interrompre ses études pendant un an pour raisons de santé, et passa ses examens en 1884. Il enseigna les mathématiques au collège de Bath jusqu'en 1887, puis gagna les Etats-Unis où il devint professeur au collège Quaker de Haverford (Pennsylvanie). Il y collabora avec deux autres anciens de Cambridge, Scott et Harkness, qui étaient à Bryn Mawr. Il enseigna à l'Université John Hopkins. Morley a travaillé surtout en géométrie, mais aussi en algèbre. Il est surtout connu pour avoir démontré en 1900 un célèbre théorème de géométrie selon lequel les foyers des cardioïdes tangentes aux trois côtés d'un triangle forment un ensemble de neuf droites, trois à trois parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral. Il en résulte en particulier que les trisectrices d'un triangle forment un triangle équilatéral. Mais son article géométrique préféré portait sur la quartique de Lüroth (1919). Morley adorait poser des problèmes de maths, et en 50 ans publia une soixantaine de problèmes, la plupart géométriques. Enfin, c'était un excellent joueur d'échecs, qui battit une fois le champion du monde Lasker, autre mathématicien.

trisectrices intérieures, et les cardioïdes tangentes aux trois côtés du triangle, voir le problème d'agrégation interne 2001, l'article de Warusfel dans la RMS, et le livre de Viricel.

Problème : Soit ABC un triangle. On note $\hat{A} = 3\alpha$, $\hat{B} = 3\beta$ et $\hat{C} = 3\gamma$ les angles en A, B et C du triangle, a, b, c les longueurs des côtés BC, CA et AB, et R le rayon du cercle circonscrit.

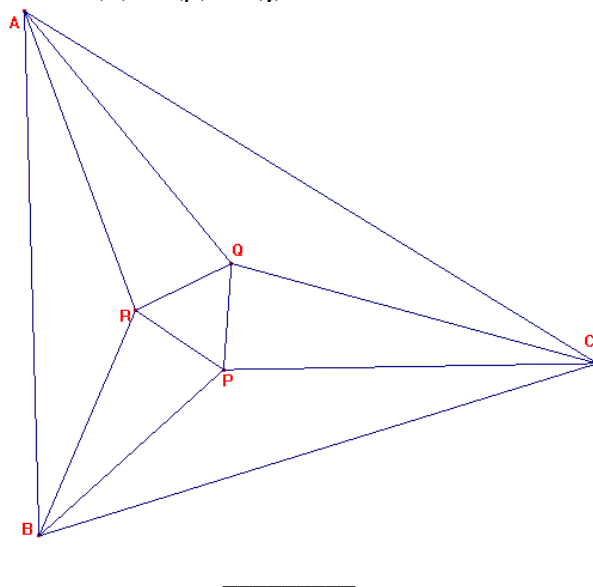
Les trisectrices intérieures du triangle ABC se coupent en P, Q et R comme l'indique la figure ci-contre. On se propose de montrer que le triangle PQR est équilatéral.

1) Montrer que $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$.

2) Montrer que :

$$RA = 2R \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin(3\alpha + 3\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = 8R \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right).$$

3) Montrer que $QR = 8R \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)$ et conclure.



La géométrie du triangle n'a pas fini de susciter des recherches, comme en témoigne un article de Grégoire Nicollier, professeur de mathématiques valaisan (et guide de haute montagne), sur les suites de triangles de réflexion, paru dans *Pour la science* en juin 2013,

Exercices

Exercice 1 : Hommage à Camille Lebossé & Corentin Hémary (Cours de 4^{ème}, Nathan, 1947).

Construire un triangle connaissant : – Les trois côtés, a , b et c .

- Les côtés $c = AB$, $b = CA$ et la hauteur h_a issue de A .
- Les côtés $a = BC$, $b = CA$ et la hauteur h_c issue de C .
- Deux côtés et la médiane relative à l'un d'eux (resp. au troisième).
- Un côté et les médianes relatives aux deux autres.
- Les trois médianes.
- Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.
- Un côté, un angle adjacent à ce côté et la somme des deux autres cotés (ou leur différence).
- Un côté, un angle adjacent à ce côté et la hauteur issue du sommet de cet angle.
- Deux côtés et la hauteur relative à l'un d'eux (resp. au troisième).
- Deux côtés et le rayon du cercle circonscrit. (On discutera)

Exercice 2 : Soient B et C deux points distincts, et M un point n'appartenant pas à la droite (BC) .

Discuter l'existence et l'unicité d'un point A vérifiant :

- ♣ M est le centre de gravité du triangle ABC ;
- ♦ M est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC ;
- ♥ M est l'orthocentre du triangle ABC ;
- ♠ M est le centre du cercle inscrit au triangle ABC .

[Capes 2010]

Exercice 3 : Etant données trois droites concourantes, construire un triangle tel que les trois droites en soient : a) les médianes ; b) les médiatrices ; c) les hauteurs ; d) les bissectrices intérieures.

Exercice 4 : Soit ABC un triangle isocèle en A . Le milieu M de $[BC]$ se projette orthogonalement en H sur (AC) . Soit P le milieu de $[MH]$. Montrer que les droites (BH) et (AP) sont perpendiculaires.

[Le Monde, 18 juillet 2006]

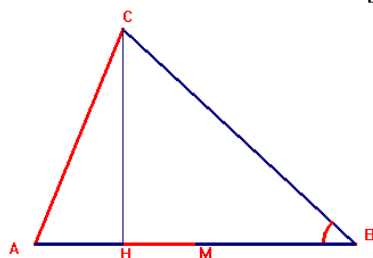
Exercice 5 : Indices triangulaires.

Dans un triangle ABC , on construit M , milieu de $[AB]$, et H , projection de C sur (AB) .

On donne trois indices : la distance AC (100 m), la distance HM (50 m), l'angle B (35°).

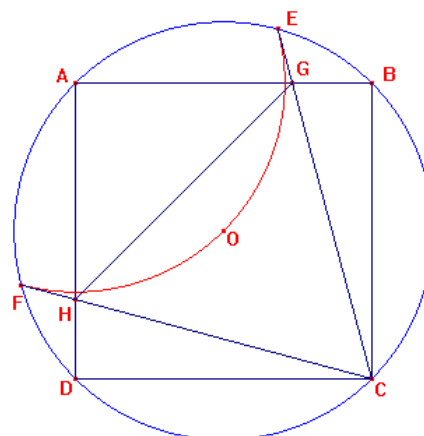
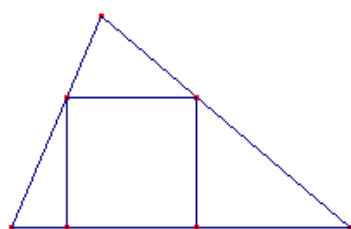
Quelle est la valeur des deux autres angles ?

[Le Monde, 23 septembre 2015]



Exercice 6 : Inscire un carré dans un triangle comme l'indique la figure ci-dessous.

(Pour des compléments, cf. *Tangente*, p. 86-93.)



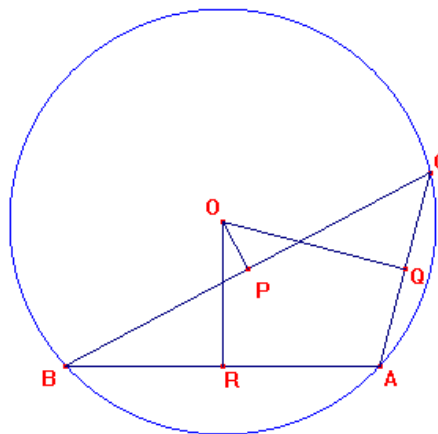
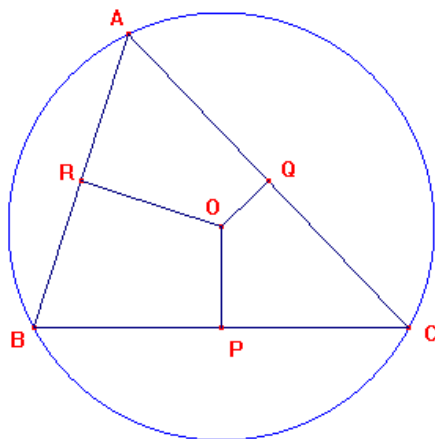
Exercice 7 : Le triangle d'Abul-Wafa.

Le mathématicien arabe Abul-Wafa (940-997) inscrit un triangle équilatéral dans un carré par la méthode suivante. Soit ABCD un carré de centre O. Le cercle de centre A passant par O coupe en E et F le cercle circonscrit au carré. La demi-droite [CE) recoupe [AB] en G, la demi-droite [CF) recoupe [AD] en H. Montrer que le triangle CGH est équilatéral.

Exercice 8 : Un sangaku japonais ²³.

Le triangle est rectangle, ses côtés sont entiers, son aire est 60. Quels sont ses deux diamètres (des cercles inscrit et circonscrit) ?

Problème 9 : Le théorème de Lazare Carnot (1803).



Soient ABC un triangle, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ses côtés,

O le centre et R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit.

On note P, Q et R les projections de O sur les côtés BC, CA et AB du triangle.

On se propose de montrer le **théorème de Carnot** :

$OP + OQ + OR = R + r$ si le triangle est acutangle,

$-OP + OQ + OR = R + r$ si l'angle A est obtus

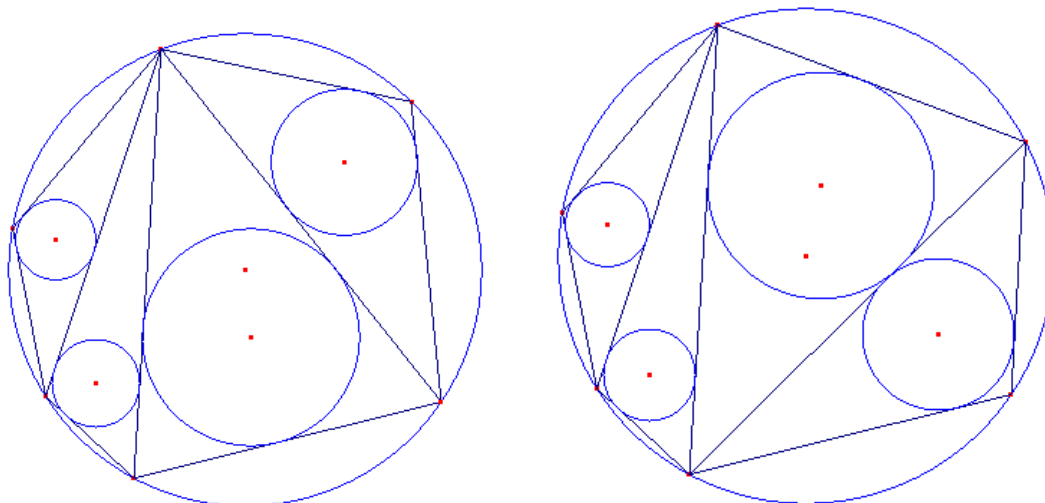
autrement dit $\varepsilon \cdot OP + \varepsilon' \cdot OQ + \varepsilon'' \cdot OR = R + r$, où $\varepsilon = 1$ si le segment OP est intérieur au triangle, et $\varepsilon = -1$ s'il est extérieur au triangle, etc. On utilisera le théorème de Ptolémée.

1) On suppose ABC acutangle, et on note $x = OP$, $y = OQ$ et $z = OR$.

a) Montrer que OPCQ sont cocycliques. En déduire que $a \cdot y + b \cdot x = c \cdot R$.

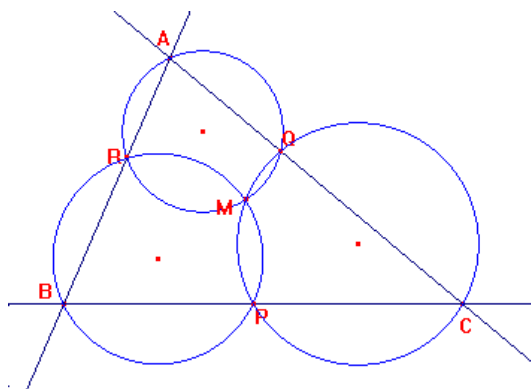
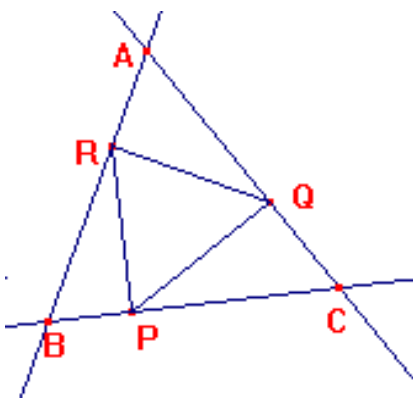
²³ En 1639, le shogun ferma les frontières du Japon. Commença une période dite de *sakoku* ("fermeture du pays"), où les chrétiens furent persécutés, les navires portugais et espagnols interdits d'accostage, les livres étrangers proscrits ainsi que les voyages à l'étranger. Seuls étaient autorisés à commercer les marchands de la Compagnie hollandaise des Indes orientales. Cela dura jusqu'en 1854, quand une armada américaine obligea le Japon à s'ouvrir au monde extérieur. Pendant ces deux siècles, les idées occidentales cessèrent de s'introduire et les mathématiques japonaises se développèrent en circuit fermé. Elles s'épanouirent au début avec **Takakazu Seki** (1642-1708), qui élaborait une théorie des déterminants plus puissante que celle de Leibniz, 10 ans avant celui-ci, et trouva des méthodes pour résoudre des équations algébriques de degré élevé. Parallèlement, on vit fleurir une élégante tradition mathématique : samourais, marchands et paysans philomathes résolvaient des problèmes de géométrie variés, puis inscrivaient leurs résultats sur des tablettes de bois qu'ils suspendaient sous les toits des édifices religieux. Selon les cas, ces *sangaku*, littéralement "tablettes mathématiques", étaient des offrandes aux dieux ou des défis aux autres visiteurs des temples. La plupart de ces *sangaku* étaient issus de problèmes de géométrie euclidienne : inscrire des cercles dans des cercles ou dans des triangles, des ellipses dans des cercles et inversement, etc. Le problème de Malfatti, le théorème de Casey (relation entre les rayons de 4 cercles tangents à un 5^{ème} cercle ou à une droite), le théorème de Descartes (relation entre les rayons de 4 cercles tangents 2 à 2), le théorème des 6 sphères de Frederick Soddy furent démontrés au Japon avant d'être démontrés en Europe. Cependant, les mathématiques japonaises s'étiolèrent et, en 1854, étaient largement devancées par les mathématiques européennes.

- b) Montrer de même $b.z + c.y = a.R$ et $c.x + a.z = b.R$.
- c) Montrer que $S = \frac{1}{2}(a+b+c).r$, puis que $S = \frac{1}{2}(a.x + b.y + c.z)$.
- d) En déduire $a.x + b.y + c.z = (a+b+c).r$.
- e) Déduire de ce qui précède que $x + y + z = R + r$.
- 2) Reprendre la démonstration précédente lorsque l'angle A est obtus.
- 3) Application à un sangaku.



Soit un polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle (C). On choisit une triangulation de ce polygone et on trace les cercles inscrits dans chacun des triangles. Montrer que la somme des rayons de ces cercles est indépendante de la triangulation choisie.

Exercice 10 : Soit ABC un triangle. Montrer qu'il existe un unique triangle inscrit PQR (P sur la droite BC, Q sur la droite CA, R sur la droite AB) tel que $RP \perp BC$, $PQ \perp CA$ et $QR \perp AB$.



Exercice 11 : Le pivot de A. Miquel.

Soit ABC un triangle fixe, P, Q et R trois points sur les côtés du triangle, M un point du plan.

- 1) Montrer que si ARMQ et BRMP sont cocycliques, alors CQMP sont cocycliques.
- 2) On suppose maintenant le pivot M fixe, et P, Q et R mobiles sur les côtés en sorte que les cocyclicités ci-dessus soient respectées. Montrer que le triangle PQR reste directement semblable à lui-même. En déduire que tout point semblablement lié à PQR décrit une droite et que toute droite semblablement liée à PQR enveloppe une parabole de foyer M.

Exercice 12 : Figure de Vecten²⁴ (1816).

²⁴ **Vecten**, professeur de mathématiques spéciales à Nîmes dans les années 1810-1818, où il fut collègue de Joseph Diaz Gergonne, aurait-il découvert cette figure en allant à la tour Magne ? On ne sait rien de lui, pas même son prénom. Geneanet suggère qu'il serait originaire de l'Oise.

Soit ABC un triangle. On construit extérieurement au triangle les carrés ACRS, BAMN et CBPQ, de centres resp. O_2 , O_3 et O_1 , et on complète les parallélogrammes MASA', PBNB' et RCQC'.

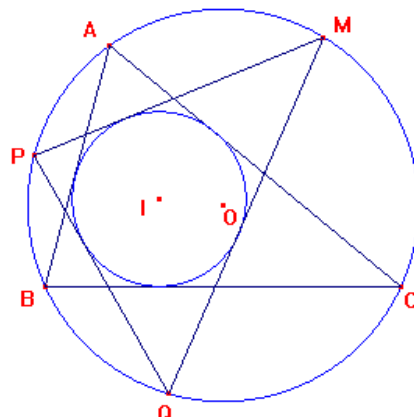
- 1) Montrer que les droites BS et CM sont perpendiculaires, ainsi que CN et AP, et que AQ et BR.
- 2) Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en H, orthocentre du triangle ABC.
- 3) Sur quelles droites se trouve l'orthocentre du triangle APQ ? En déduire que les droites CN, BR et AH sont concourantes.
- 4) Montrer que $MS^2 + NP^2 + QR^2 = 3.(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.
- 5) Montrer que les droites O_1A , O_2B et O_3C concourent en un point V, orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.

Exercice 13 : d'Euler à Poncelet.

1) Soient $T = ABC$ un triangle, O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit, I et r ceux du cercle inscrit, d la distance OI. Montrer que $d^2 = R^2 - 2Rr$. En déduire $r \leq \frac{R}{2}$; cas d'égalité ?

2) Réciproquement, soient $\Gamma(O, R)$ et $C(I, r)$ deux cercles vérifiant $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Montrer que, pour tout point $A \in \Gamma$, il existe un triangle ABC inscrit dans Γ et circonscrit à C.

NB : Ce résultat est un cas particulier du grand théorème de Poncelet.



Exercice 14 : Dans le plan on considère un triangle ABC, et les six points D, E, F, G, H, I tels que ABED, BCFG, ACHI soient des carrés extérieurs à ABC. Montrer que les six points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

- le triangle ABC est équilatéral
- le triangle ABC est rectangle isocèle.

[Concours général 1996, ex. 1]

Exercice 15 : Soit T un triangle. Montrer l'équivalence des propriétés :

- a) T est isocèle ;
- b) T a deux hauteurs égales ;
- c) T a deux médianes égales ;
- d) T a deux bissectrices intérieures égales.

NB : Ce dernier problème est dû à Lehmus-Steiner (cf Avez p. 140 et 144, et Tangente, p. 34)

Exercice 16 : Soit T un triangle. Montrer que les symétriques de chacun des sommets par rapport au côté opposé sont alignés si et seulement si $OH = 2R$ (R rayon du cercle circonscrit).

[Indication : On pourra considérer l'homothétie de centre G et de rapport $1/4$.]

[Concours général 1999, ex. 5]

Exercice 17 : Un jardin à la 6-4-2.

Le jardin d'Alice a la forme d'un triangle rectangle isocèle. Tandis qu'elle se tient au sommet de l'angle droit, Bob et Charlène se postent aux deux autres sommets. Pierre, quant à lui, est à l'intérieur, à 4 mètres d'Alice, à 6 mètres de Bob et à 2 mètres de Charlène. Quelle est l'aire du jardin ?

[Le Monde, n° 680, juillet 2010]

Exercice 18 : dédié à Rémi Coillet-Matillon. Soit T un triangle ABC. On note p la projection sur AB parallèlement à BC, q la projection sur BC parallèlement à CA, r la projection sur CA parallèlement à AB. Soit M un point du plan. Etudier la suite récurrente (M_n) définie par :

$$M_0 = M, \quad M_{3k+1} = p(M_{3k}), \quad M_{3k+2} = q(M_{3k+1}), \quad M_{3k+3} = r(M_{3k+2}).$$

Exercice 19 : Soit T un triangle ABC.

- 1) On note $A_0 = A$, A_{n+1} le centre du cercle inscrit dans le triangle A_nBC . Montrer que la suite (A_n) converge vers un point L de BC que l'on déterminera.

2) On note $A_0 = A$, A_{n+1} l'orthocentre du triangle A_nBC . Que dire de la suite (A_n) ?

[Concours général 2005, ex. 3]

Exercice 20 : Soit T un triangle ABC . On considère la suite (A_n) de points définie par :

$A_0 = A$, $A_1 = B$, $A_2 = C$, A_{n+3} est le centre de gravité du triangle $A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

Montrer que la suite (A_n) converge vers un point du plan que l'on déterminera.

Bibliographie

- C. Lebossé, C. Hémary : Cours de géométrie (Nathan)
Y. et R. Sortais : La géométrie du triangle (Hermann)
M. Collet, G. Griso : Le cercle d'Euler (Vuibert)
M. Berger : Géométrie, chap. 2 (Cédic, Nathan)
J.-C. Carrega : Théorie des corps, La règle et le compas (Hermann)
H. Dörrie : 100 Great Problems of Elementary Mathematics (Dover)
J. Hadamard : Leçons de géométrie élémentaire (A. Colin, 1947)
R. Deltheil et D. Caire : Géométrie (Baillièrre, 1939)
A. Avez : Le leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation (Masson)
A. Viricel : Le théorème de Morley (A. Blanchard)
E. Ehrhart : Sur le triangle et le tétraèdre (RMS, mai 1991)
T. B. Soulamy : Les olympiades de mathématiques (Ellipses, 1999)
M. Aassila : Olympiades internationales de mathématiques (Ellipses, 2003)
P. Bourgade : Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 (Cassini)
J.-D. Eiden : Géométrie analytique classique (Calvage et Mounet, 2009)
G. Nicollier : Le chaos des triangles de réflexion (Pour la science, juin 2013)
Revue Tangente : Le triangle, Le cercle (Hors séries n° 24 et 36)
Sites Internet de géométrie du triangle :
[Cut-the-knot](http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/html) propose 54 démonstrations du théorème de Pythagore.
<http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/html>,
site d'un haut niveau animé par un collègue stéphanois.
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>,
site de Clark Kimberling, contenant les définitions et les coordonnées barycentriques et
trilinéaires de plusieurs centaines de points remarquables du triangle !
[Japanese Temple Geometry Problems](#) recense les sangaku
-

Les triangles dans le sable

Il ne voyait pas les mouettes qui volaient en cercle au-dessus de sa tête ni les galères et les trirèmes qui glissaient doucement à l'horizon ; il portait une étrange robe vague, et son visage était fixé avec une expression morne et angoissée sur ses dessins dans le sable, tandis que ses lèvres murmuraient des mots inintelligibles. Un vieillard aux yeux malins et ridés s'assit à l'autre extrémité du banc ; et, après avoir observé pendant un moment les gestes du jeune homme, lui parla d'une voix douce :

– Que faites-vous donc avec votre bâton, mon ami ?

Le jeune homme sursauta comme s'il eût été surpris dans une occupation honteuse et criminelle.

– Je dessine des triangles, dit-il en rougissant bêtement.

– Et pourquoi, après en avoir dessiné un, l'effacez-vous avec votre main pour ensuite en dessiner un autre pareil au précédent ?

– Je ne sais pas. Je crois que ces triangles ont un secret et je voudrais le découvrir.

– Un secret... dites-moi, mon ami, souffririez-vous par hasard de mauvais rêves ? Criez-vous parfois dans votre sommeil ?

– Cela m'arrive de temps en temps.

– Et quel est le rêve qui vous hante dans la nuit ?

Le jeune homme rougit de nouveau de tout son visage.

– Je rêve toujours que ma chère Célia et moi assistons aux jeux athlétiques auxquels mon ami Porphyrius prend part ; il lance le disque, mais dans la mauvaise direction, et le lourd engin vient en roulant dans l'air frapper à la tête ma pauvre femme, qui s'évanouit avec un sourire mystérieux sur les lèvres.

Le vieillard se mit à ricaner et posa la main sur l'épaule de l'autre.

– Mon cher ami, dit-il, vous avez de la chance que le destin m'ait fait traverser votre chemin, car je sais interpréter les oracles, déchiffrer les énigmes ; je suis un guide pour les affligés. Cela vous coûtera une drachme, mais ce n'est pas trop payé. Et maintenant, écoutez : j'ai remarqué que, pendant que vous racontiez votre rêve, votre main s'était remise machinalement à dessiner dans le sable. Quand vous parliez de vous, vous dessiniez une ligne droite ; quand vous parliez de votre ami Porphyrius, vous dessiniez une seconde ligne à angle droit avec la première ; et quand vous parliez de votre femme Celia, vous complétiez le triangle en traçant l'hypoténuse reliant les deux autres. Ainsi, votre rêve devient parfaitement clair : votre esprit est obsédé par une inquiétude que vous cachez à vous-même ; et le secret du triangle, vous le découvrirez aisément en interrogeant vos serviteurs sur la vie privée de votre femme.

Le jeune homme, dont le nom était Pythagore, se leva d'un bond :

– Louange aux dieux qui vous ont permis de déchiffrer l'énigme qui hantait ma pensée ! Au lieu de continuer à dessiner ces stupides triangles comme je le fais depuis deux ans, je m'en vais rentrer chez moi et donner à Celia une bonne raclée, ainsi qu'il convient à un homme raisonnable.

Il effaça du pied la dernière figure qu'il avait dessinée, puis, retroussant sa robe, s'éloigna d'un pas rapide sur la plage. Il se sentait heureux et soulagé ; le sombre et inexplicable besoin de dessiner des triangles dans le sable l'avait quitté pour toujours ; et c'est ainsi que le théorème de Pythagore ne fut jamais découvert...

Arthur Koestler, *Croisade sans croix*

Sonnet pointu

Reviens sur moi ! Je sens ton amour qui se dresse ;
Viens. J'ouvre mon désir au tien, mon jeune amant.
Là... Tiens... Doucement... Va plus doucement..
Je sens tout au fond ta chair qui me presse.

Rythme ton ardente caresse
Au gré de mon balancement.
Ô mon âme... Lentement,
Prolongeons l'instant d'ivresse.

Là... Vite ! Plus longtemps !
Je fonds ! Attends
Oui... Je t'adore...

Va ! Va ! Va !
Encore !
Ha !

Edouard Haraucourt,
La Légende des sexes (1882)

Le triangle orgueilleux a dit...

Le triangle orgueilleux a dit :
– Je suis symbole de science,
C'est en m'étudiant que le savant pâlit. –

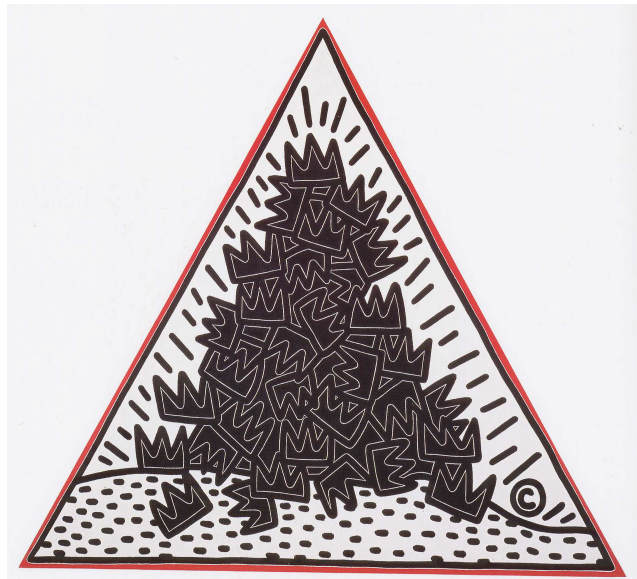
Le triangle orgueilleux a dit :
– Je suis symbole d'harmonie,
Et ma voix argentine à l'orchestre s'unit. –

Le triangle orgueilleux a dit :
– Je rayonne au fronton des temples,
Et c'est en mon milieu que l'œil de Dieu luit. –

Mais voici dans les cieux une voix qui s'écrie :
– Toi qui te dis Science et te dis Harmonie,
Qui t'égaies aux Dieux en d'insolents discours,

Ô Superbe, courbe la tête :
Tu ne seras jamais la roue de la bicyclette
Avec laquelle on va jusqu'à Saint-Pétersbourg.

Franc-Nohain, *Flûtes* (1898)



Keith Haring, 1988